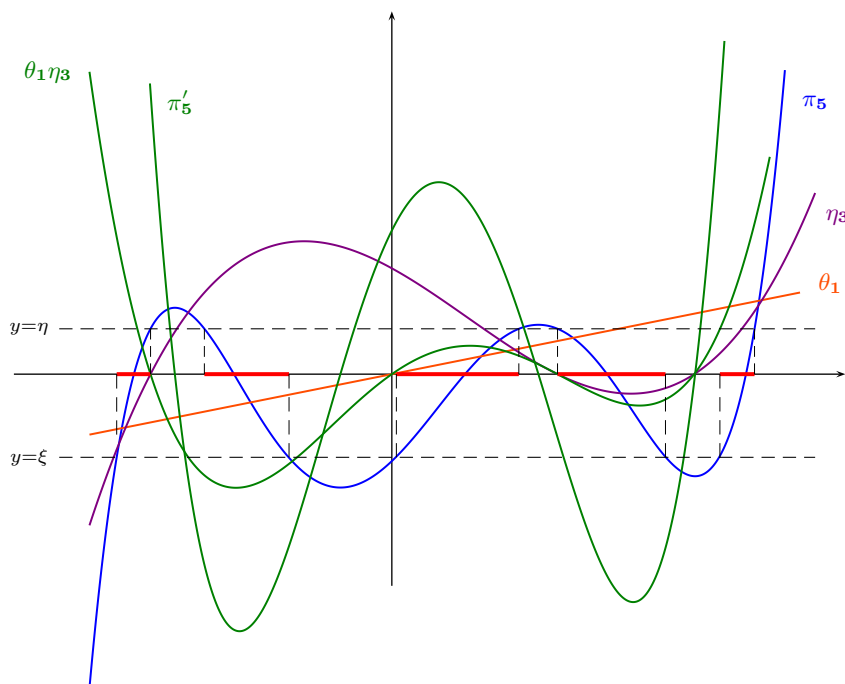


Márcio Dinis do Nascimento de Jesus

SOBRE DOIS PROBLEMAS INVERSOS
NA TEORIA DOS POLINÓMIOS ORTOGONAIS



Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Universidade de Coimbra

2010

*Dissertação apresentada à
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
para obtenção de grau de Doutor em Matemática,
especialidade em Matemática Pura*

Ao meu pai

Agradecimentos

Um agradecimento muito especial ao Professor Doutor José Carlos Petronilho, que me iniciou no estudo da Teoria dos Polinómios Ortogonais e que, sempre manifestando uma disponibilidade incondicional, me guiou, incentivou e acompanhou na elaboração desta dissertação. Agradeço-lhe ainda o muito que com ele aprendi.

À minha Mãe e ao meu irmão, agradeço-lhes todo o apoio e força que me têm transmitido.

Ao meu Pai, que embora já não esteja presente, agradeço-lhe tudo o que não consigo expressar.

Um agradecimento especial aos Professores Doutores Maria Paula Serra de Oliveira, Maria de Fátima Leite, José Augusto Ferreira, Lurdes Sousa, Fernando Duarte, Cecília Agostinho e Ana Matos, pela confiança que depositaram em mim para a realização deste trabalho, bem como aos colegas Paula Sarabando, Nuno Bastos e Joana Fialho, por todo o apoio que me deram.

Aos Departamentos de Matemática da FCTUC e da ESTGV, agradeço as condições de trabalho concedidas durante a preparação desta dissertação.

Manifesto igualmente o meu agradecimento à FCT (Fundação para a Ciência e Tecnologia) pelo apoio financeiro que me deu através da concessão da bolsa de Doutoramento SFRH/BD/29192/2006. Esta dissertação foi ainda realizada no âmbito do Projecto de Investigação Científica PTDC/MAT/098060/2008 (FCT).

E à minha família e aos meus amigos, o meu muito obrigado.

Índice

Glossário de Notações	iii
Introdução	vii
1 Funcionais regulares e polinómios ortogonais	1
1.1 Aspectos topológicos	1
1.2 Polinómios ortogonais sobre a recta real	4
1.3 Base dual	13
1.4 Exemplos	14
1.5 Polinómios ortogonais semiclássicos	17
2 SPO's com derivadas linearmente relacionadas	21
2.1 Introdução	21
2.2 Solução do Problema (P1)	23
2.3 Relação entre as séries formais de Stieltjes	26
2.4 O caso $k = m + 1$	29
3 Pares (M, N)-coerentes	33
3.1 Introdução	33
3.2 Pares (M, N) -coerentes	35
3.3 SPO's de Sobolev e pares (M, N) -coerentes	37
3.4 Coeficientes de Fourier-Sobolev	39
3.5 Casos particulares	45
3.6 Série de Fourier-Sobolev: exemplos	50
4 Polinómios ortogonais e transformações polinomiais	55
4.1 Introdução	55
4.2 SPO's via transformações polinomiais	57

4.3	Determinação da medida de ortogonalidade	64
4.4	O caso $m = 0$	74
4.5	O caso $m = k - 1$	82
4.6	Um exemplo com $k = 5$ e $m = 1$	90
5	Operadores de Jacobi e transformações polinomiais	95
5.1	Espectro de um operador de Jacobi periódico	96
5.2	Espectro essencial obtido via uma transformação polinomial . . .	100
5.3	Espectro essencial obtido via uma transformação quadrática . . .	105
5.4	Espectro essencial obtido via uma transformação cúbica	107
A	Modificações racionais de medidas	111
B	Complemento à secção 2.4	115
B.1	Determinação de Φ_1, Φ_2, Ψ_2 e Ψ_3	115
B.2	Determinação das classes de \mathbf{u} e \mathbf{v}	117
C	Complemento à secção 4.6	119
	Bibliografia	123

Glossário de Notações

$B_n^{(\alpha)}$... polinómio de Bessel de grau n , 17
$B(\cdot, \cdot)$... função Beta
$B_n^\lambda(\cdot; k)$... polinómio mónico ultrasférico crivado de segunda espécie, 89
$\text{co}(A)$... invólucro convexo do conjunto A , 10
\mathbb{C}	... conjunto dos números complexos
C_n^λ	... polinómio ultrasférico de grau n com parâmetro λ , 88
$\chi_E(\cdot)$... função característica do conjunto E
\mathbb{D}	... círculo unitário, 76
$D\mathbf{u}$... derivada de \mathbf{u} , 2
$\delta_{n,m}$... símbolo de Kronecker: $\delta_{n,m} = 0$ se $n \neq m$ e $\delta_{n,n} = 1$
$\delta(x - z_i)$... medida de Dirac em z_i
Δ'	... espaço das séries formais, 3
$\Delta_n(i, j; \cdot)$... determinante de ordem $j - i + 2$ se $j \geq i \geq 1$, 57
$\widehat{\Delta}_n(i, j; \cdot)$... determinante de ordem $j - i + 2$ se $j \geq i \geq 1$, 80
$\Delta_{i,j}(\cdot; \cdot)$... determinante de ordem $j - i + 1$ se $0 \leq i < j \leq k - 1$, 82
$F(\cdot; \psi)$... função de Stieltjes associada à mediada $d\psi$, 9
$F_T(\cdot)$... função de Stieltjes correspondente à SPO $(T_n)_n$, 14
$F_U(\cdot)$... função de Stieltjes correspondente à SPO $(U_n)_n$, 14
gr	... grau de um polinómio
H_n	... polinómio de Hermite de grau n , 17
h_n	... determinante de Hankel, 4

$\mathcal{L}(X, Y)$... espaço das aplicações lineares limitadas de X em Y , 2
$L_n^{(\alpha)}$... polinómio de Laguerre de grau n , 17
\mathbb{N}	... conjunto dos números naturais
$\partial\mathbb{D}$... circunferência unitária, 76
\mathcal{P}	... espaço dos polinómios com coeficientes complexos, 1
\mathcal{P}_n	... espaço dos polinómios de grau menor ou igual a n , 1
$P_n^{(k)}$... polinómio associado de P_n de ordem k , 6
$\dot{P}_n^{(k)}$... derivada de ordem k do polinómio P_n , 22
$P_n^{[k]}$	$= \frac{\dot{P}_{n+k}^{(k)}}{(n+1)_k}$, 23
$P_n^{(\alpha, \beta)}$... polinómio de Jacobi de grau n , 17
\mathcal{P}^*	... dual algébrico de \mathcal{P} , 2
\mathcal{P}'	... dual topológico de \mathcal{P} , 1
$p\mathbf{u}$... produto à esquerda da funcional \mathbf{u} pelo polinómio p , 2
\mathbb{R}	... conjunto dos números reais
RRTT	... relação de recorrência a três termos, 5
SPO	... sucessão de polinómios ortogonais, 4
SPOM	... sucessão de polinómios ortogonais mónicos, 4
$\text{sgn}(\cdot)$... sinal de um número real: $\text{sgn}(\lambda) = -1$ se $\lambda < 0$, $\text{sgn}(\lambda) = 0$ se $\lambda = 0$ e $\text{sgn}(\lambda) = 1$ se $\lambda > 0$
$\text{supp}(d\psi)$... suporte da medida $d\psi$, 8
S_n^λ	... polinómio mónico de Sobolev de grau n , 37
$S_{\mathbf{u}}$... série formal de Stieltjes associada à funcional \mathbf{u} , 4
$S_{\mathbf{u}}^{(j)}$... derivada de ordem j de $S_{\mathbf{u}}$, 27
T_n	... polinómio de Chebyshev de 1ª espécie de grau n , 14
Γ	... função Gamma
$\mathbf{u}f$... produto à direita da funcional \mathbf{u} pelo polinómio f , 3
U_n	... polinómio de Chebyshev de 2ª espécie de grau n , 14
u_n	... momento de ordem n da funcional \mathbf{u} , 2
$(x - c)^{-1}\mathbf{u}$... divisão da funcional \mathbf{u} pelo polinómio $x - c$, 3
$\binom{n}{p}$	$= \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$(a)_n$... símbolo de Pochhammer, 23
$\langle \cdot, \cdot \rangle_i$... produto interno associado à medida $d\mu_i$, 37
$\langle \cdot, \cdot \rangle_S$... produto interno Sobolev, 37
$\ \cdot \ _i$... norma associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$
$\ \cdot \ _S$... norma associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$
$\sigma_p(T)$... espectro pontual de T , 95
$\sigma_c(T)$... espectro contínuo de T , 95
$\sigma_{\text{ess}}(T)$... espectro essencial de T , 95
$\sigma_p^f(T)$... espectro discreto de T , 95
$\sigma(T)$... espectro de T , 95
\rightharpoonup	... convergência fraca
\rightarrow	... convergência forte
\sharp	... cardinal de um conjunto, 67

Introdução

A presente dissertação insere-se no âmbito da Teoria dos Polinómios Ortogonais e das Funções Especiais, nos domínios da Análise e da Teoria da Aproximação, bem como das suas aplicações, incluindo o estudo de certos operadores de Jacobi, na descrição dos correspondentes espectros e espectros essenciais.

Antes de descrever os problemas centrais a tratar, é conveniente introduzir algumas noções preliminares. Sejam $\mathbf{u} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ uma funcional linear e $(p_n)_n$ uma sucessão de polinómios em $\mathbb{C}[x]$ tal que p_n tem grau n para todo o n . Diz-se que $(p_n)_n$ é uma sucessão de polinómios ortogonais (SPO) a respeito de \mathbf{u} se existe uma sucessão de números complexos não nulos, $(k_n)_n$, tal que

$$\langle \mathbf{u}, p_n p_m \rangle = k_n \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

onde $\delta_{n,m}$ designa o símbolo de Kronecker. Se cada p_n é um polinómio mónico, a SPO $(p_n)_n$ diz-se uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos (SPOM); e se $k_n = 1$ para todo o n , a SPO $(p_n)_n$ diz-se uma sucessão ortonormada. Constatase facilmente que polinómios correspondentes do mesmo grau de quaisquer duas SPO's $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$ a respeito de uma mesma funcional linear \mathbf{u} diferem por um factor constante, i.e., existe uma sucessão de números complexos não nulos, $(c_n)_n$, tal que

$$q_n(x) = c_n p_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, sem perda de generalidade, pode passar-se a uma normalização adequada no estudo de uma dada SPO (e.g., a SPO dos polinómios mónicos, ou a dos polinómios ortonormados, ou qualquer outra de maior conveniência).

Um resultado fundamental da Teoria dos Polinómios Ortogonais, usualmente atribuído a J. Favard, estabelece que uma sucessão de polinómios, $(p_n)_n$, tal que grau $p_n = n$ para todo o n , é uma SPO a respeito de alguma funcional linear $\mathbf{u} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ se e só se existem sucessões de números complexos $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$

e $(\gamma_n)_n$, com $\alpha_n \gamma_{n+1} \neq 0$ para todo o n , tais que $(p_n)_n$ satisfaz a relação de recorrência a três termos (RRTT)

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

com condições iniciais $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = \text{constante} \neq 0$. Note-se que se $p_0(x) = 1$ e $\alpha_n = 1$ para todo o n então $(p_n)_n$ é uma SPOM. Por outro lado, se $p_0(x) = u_0^{-1/2}$ e $\alpha_n = \gamma_{n+1}$ para todo o $n \geq 0$, onde $u_0 := \langle \mathbf{u}, 1 \rangle$ (momento de ordem 0 de \mathbf{u}), então $(p_n)_n$ é uma sucessão ortonormada.

Por um teorema de representação (cf. e.g. [19, Cap. II], [32, Cap. 2]) se $\gamma_n > 0$ e $\beta_n \in \mathbb{R}$ para todo o n então a funcional \mathbf{u} a respeito da qual $(p_n)_n$ é ortonormada admite uma representação integral do tipo

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle := \int_{\mathbb{R}} p(x) d\mu(x), \quad p \in \mathbb{C}[x],$$

onde μ é uma medida definida sobre os borelianos de \mathbb{R} com momentos de todas as ordens finitos e cujo suporte

$$\text{supp}(\mu) := \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x - \delta, x + \delta) > 0, \forall \delta > 0\}$$

é um conjunto infinito. μ é chamada *medida de ortogonalidade* de $(p_n)_n$, e diz-se que $(p_n)_n$ é ortogonal no sentido definido-positivo, a respeito da medida μ . Se as sucessões $(\beta_n)_n$ e $(\gamma_n)_n$ são ambas limitadas, a medida de ortogonalidade μ é única [32, pg.32]. É importante reter que, dada uma SPO $(p_n)_n$ caracterizada pela RRTT (2) e ortogonal no sentido definido-positivo, a correspondente medida de ortogonalidade, μ , pode determinar-se, do ponto de vista teórico, recorrendo ao chamado Teorema de Markov, o qual, na sua versão mais simples, estabelece que, sob certas condições, e considerando, sem perda de generalidade, que $(p_n)_n$ é uma sucessão ortonormada,

$$-\frac{1}{\gamma_1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{x - z} =: F(z; d\mu), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{co}(\text{supp}(\mu)) \quad (3)$$

$\text{co}(\text{supp}(\mu))$ designa o invólucro convexo de $\text{supp}(\mu)$, sendo a convergência uniforme em todos os subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{co}(\text{supp}(\mu))$. Na igualdade (3), $(p_n^{(1)})_n$ é a sucessão dos chamados *polinómios associados* (ou *polinómios numerador*) que são definidos por uma RRTT do tipo (2), mas efectuando a mudança $n \rightsquigarrow n + 1$ nos coeficientes que figuram na relação de recorrência. À função $F(\cdot; d\mu)$ chama-se *função* (ou *transformada*) de Stieltjes da medida μ . O conhecimento desta função permite determinar μ através da *fórmula de inversão*

de Stieltjes:

$$\mu((a, b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(F(x - i\varepsilon; d\mu)) dx .$$

Estes e outros resultados básicos da Teoria do Polinómios Ortogonais serão recordados com maior pormenor no Capítulo 1, no qual serão também apresentados alguns exemplos de SPO's bem conhecidas na literatura e que irão desempenhar um papel importante nos capítulos subsequentes.

Dada uma funcional linear $\mathbf{u} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$, se esta funcional for **regular** (i.e., existe uma SPO a respeito de \mathbf{u}), coloca-se, naturalmente, o problema da determinação da correspondente SPO (a qual é definida de modo único a menos de uma normalização adequada). Mais geralmente, dadas uma ou várias funcionais regulares, ligadas por alguma relação (tipicamente, uma relação algébrica), o problema da determinação das correspondentes SPO's ou de alguma relação entre estas, diz-se um problema **directo**. Por outro lado, chama-se **problema inverso** a um problema que consiste em, dadas uma ou várias SPO's satisfazendo certas relações entre si, determinar relações entre as correspondentes funcionais lineares (a respeito das quais aquelas SPO's são ortogonais). Note-se que no caso definido-positivo o problema inverso trata da determinação de medidas de ortogonalidade, ou de relações entre estas.

O objectivo principal desta dissertação é o estudo de dois problemas inversos. O primeiro destes problemas será analisado nos capítulos 2 e 3. O segundo será tratado nos capítulos 4 e 5.

No Capítulo 2, discute-se um problema inverso envolvendo duas famílias de polinómios ortogonais e suas derivadas, relacionadas por uma relação de estrutura linear. O problema em análise é o seguinte:

(P1) *Sejam $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ duas SPOM's cujas derivadas de ordem m e k (resp.) satisfazem a relação algébrica*

$$\sum_{i=0}^N r_{i,n} \dot{P}_{n-i+m}^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^M s_{i,n} \dot{Q}_{n-i+k}^{(k)}(x) \quad (4)$$

para todo o $n \geq \max\{M, N\}$, onde M e N são números inteiros não negativos, e $r_{i,n}$ e $s_{i,n}$ são números complexos que satisfazem certas condições naturais, com a convenção $r_{i,n} = s_{i,n} = 0$ se $n < i$. Caracterizar as funcionais lineares (regulares) \mathbf{u} e \mathbf{v} correspondentes (resp.) às sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$.

Em (4), adoptámos a notação $\dot{P}^{(m)}$ para representar a derivada de ordem m de um polinómio P , sendo o “ponto” introduzido para evitar eventuais confusões de notação, por termos reservado a notação $P^{(m)}$ para designar os polinómios associados (como é usual na literatura da especialidade!). A solução do problema (P1) será apresentada no Capítulo 2, e deu lugar à seguinte publicação [37]:

M.N. de Jesus, J. Petronilho: *On linearly related sequences of derivatives of orthogonal polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **347** (2008) 482-492.

Assumindo, sem perda de generalidade, que $0 \leq m \leq k$, neste trabalho provámos a existência de quatro polinómios Φ_{M+m+i} e Ψ_{N+k+i} , com graus $M+m+i$ e $N+k+i$ (resp.), tais que

$$D^{k-m}(\Phi_{M+m+i}\mathbf{u}) = \Psi_{N+k+i}\mathbf{v}, \quad i = 0, 1,$$

onde a derivada de ordem $k-m$, bem como o produto à esquerda de uma funcional por um polinómio são definidos no sentido usual da Teoria das Distribuições. Se $k=m$, a igualdade anterior implica que \mathbf{u} e \mathbf{v} estão relacionadas por uma modificação racional. Se $k=m+1$, então \mathbf{u} e \mathbf{v} são funcionais semi-clássicas as quais estão ainda relacionadas por uma modificação racional.

A relação algébrica (4) é motivada pelo estudo dos chamados polinómios ortogonais de Sobolev, quando as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} admitem representações integrais em termos de medidas de Borel μ_1 e μ_2 (resp.) que induzem um produto interno de Sobolev do tipo

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{-\infty}^{+\infty} f g d\mu_2 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f' g' d\mu_1, \quad (5)$$

onde λ é uma constante positiva. A ortogonalidade de tipo Sobolev tem atraído atenção assinalável nas duas últimas décadas, especialmente após um importante trabalho de A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Nørsett, e J. M. Sanz-Serna [35], no qual se introduziu a noção de par coerente de medidas. As SPOM's associadas a pares de medidas coerentes são descritas pela relação (4) na situação em que $(N, M, m, k) = (0, 1, 0, 1)$. K. H. Kwon, J. H. Lee e F. Marcellán [42] estudaram os polinómios ortogonais de Sobolev descritos por (4)–(5) para $(N, M, m, k) = (0, 2, 0, 1)$, enquanto que o caso $(N, M, m, k) = (1, 1, 0, 1)$ foi estudado por A. M. Delgado e F. Marcellán [21]. Observemos ainda que o caso

$m = 0$, $k = 1$, $N = 0$ e M arbitrário foi analisado por F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein e J. Moreno-Balcázar em [51]. O caso $m = k = 0$, com M e N arbitrários, foi estudado por J. Petronilho [79].

O caso especial em que $m = 0$ e $k = 1$ na relação de estrutura (4), com M e N arbitrários, conduz à noção de par (M, N) -coerente de medidas (ou, mais geralmente, de funcionais regulares), que será introduzida e estudada no Capítulo 3. Neste capítulo estudam-se SPO's de Sobolev oriundas de pares (M, N) -coerentes. Será estabelecida uma propriedade algébrica fundamental, ligando os polinômios de Sobolev e os polinômios *standard*, generalizando propriedades conhecidas (cf. [35, 14, 42, 51]). Tal propriedade permite obter os coeficientes de Fourier-Sobolev de uma função f (pertencente a um espaço de funções apropriado) a respeito dos polinômios ortogonais de Sobolev associados ao produto interno (5), considerando que $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ é um par de medidas (M, N) -coerente. O espaço de funções (tipo Sobolev) apropriado, $W^{1,2}(\mathbb{R}, d\mu_1, d\mu_2)$, deverá conter as funções $f \in L^2_{\mu_2}(\mathbb{R})$ tais que $f' \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{R})$, onde $L^2_{\mu_1}(\mathbb{R})$ e $L^2_{\mu_2}(\mathbb{R})$ são espaços de Lebesgue definidos de maneira natural. Assim, dada uma função $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}, d\mu_1, d\mu_2)$, pode-se considerar a série de Fourier-Sobolev a respeito da SPOM de Sobolev $(S_n^\lambda)_n$ associada ao produto interno de Sobolev (5):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{s_n} S_n^\lambda(x), \quad (6)$$

sendo os coeficientes de Fourier-Sobolev dados por $c_n \equiv c_n(\lambda) := \frac{f_n}{s_n}$, onde

$$f_n \equiv f_n(\lambda) := \langle f, S_n^\lambda \rangle_S, \quad s_n \equiv s_n(\lambda) := \langle S_n^\lambda, S_n^\lambda \rangle_S = \|S_n^\lambda\|_S^2 \quad (7)$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Em [35] Iserles *et. al.* estabeleceram um algoritmo eficiente para calcular os parâmetros f_n e s_n no caso em que o produto interno de Sobolev provém de um par de medidas coerente. Este algoritmo foi generalizado por K. H. Kwon, J. H. Lee e F. Marcellán [42] para produtos internos de Sobolev associados a pares de medidas $(2, 0)$ -coerentes. Nesta dissertação obtém-se uma extensão destes algoritmos para produtos internos de Sobolev associados a pares de medidas (M, N) -coerentes, com M e N arbitrários. Este algoritmo permitirá também estabelecer uma equação de diferenças de ordem $K := \max\{M, N\}$ para a sucessão $(s_n)_n$ das normas de Sobolev para um dado par (M, N) -coerente. Serão ainda apresentados exemplos de pares (M, N) -coerentes, bem como da construção das correspondentes séries de Fourier-Sobolev. Os resultados obtidos no Capítulo 3 estão contidos no seguinte trabalho [39]:

M.N. de Jesus, J. Petronilho: *Sobolev orthogonal polynomials and (M, N) -coherent pairs of measures*. (Submetido)

O Capítulo 4 centra-se no estudo de um outro problema inverso, relacionado com transformações polinomiais:

(P2) *Seja $(P_n)_n$ uma SPOM. Determinar condições necessárias e suficientes para que exista uma outra SPO $(Q_n)_n$ tal que a sucessão $(P_n)_n$ possa ser descrita por uma transformação polinomial do tipo*

$$P_{nk+m}(x) = \theta_m(x)Q_n(\pi_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde k e m são números inteiros fixos, com $k \geq 2$ e $0 \leq m \leq k-1$, e π_k e θ_m são polinómios fixos de graus k e m , respectivamente. Sob tais condições, descrever as relações algébricas e analíticas relativas às sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$. Em particular, no caso definido-positivo, determinar uma expressão explícita para a medida de ortogonalidade para $(P_n)_n$ à custa da medida para $(Q_n)_n$.

Para $m = 0$ o problema **(P2)** foi analisado por J. Charris, M. E. H. Ismail e S. Monsalve [16], bem como por J. Geronimo e W. Van-Assche [28], quer do ponto de vista algébrico (determinação do polinómio π_k que induz a transformação polinomial e da nova sucessão $(Q_n)_n$, bem como relações algébricas entre as sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$), quer do ponto de vista analítico (determinação das relações entre as transformadas de Stieltjes e as medidas de ortogonalidade associadas às sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$, considerando o caso definido-positivo). Por outro lado, para $k = 2$ e $k = 3$ o problema (algébrico e analítico) foi estudado por F. Marcellán e J. Petronilho [56, 57, 53, 54]. Para um k arbitrário e $m = k - 1$ a solução da parte algébrica do problema foi apresentada em [24]. Neste último trabalho não se estudou o problema analítico (para $m = k - 1$), o qual viria a ser o tema central da dissertação de Mestrado [36]. Utilizando as técnicas e resultados descritos nos trabalhos [28, 16, 54, 6, 36], bem como em resultados gerais da Teoria dos Polinómios Ortogonais, é possível concluir que uma das características do tipo de relação descrita pelo problema **(P2)** se traduz no facto de a medida de ortogonalidade da SPO $(P_n)_n$ se poder obter explicitamente em função da medida de ortogonalidade da SPO $(Q_n)_n$. Com efeito, provaremos que, sob certas condições, $(P_n)_n$ é ortogonal a respeito de uma medida cujo suporte está contido numa reunião de k intervalos—definidos pela transformação polinomial inversa $\pi_k^{-1}([\xi, \eta])$, onde $[\xi, \eta]$ é o verdadeiro in-

tervalo de ortogonalidade (menor intervalo que contém todos os zeros) da SPOM $(Q_n)_n$ —explicitamente definida, a menos de um factor constante, por

$$d\sigma_p(x) = \sum_{i=1}^m M_i \delta(x - z_i) dx + \chi_{\pi_k^{-1}(\cdot|\xi, \eta]}(x) \left| \frac{\eta_{k-1-m}(x)}{\theta_m(x)} \right| \frac{d\sigma_q(T(x))}{T'(x)},$$

onde M_1, \dots, M_m são constantes não negativas (“massas”) explicitamente determinadas em função dos valores da transformada de Stieltjes associada à medida $d\sigma_q$ nos zeros z_1, \dots, z_m do polinómio θ_m , $\delta(x - z_i)$ é a medida de Dirac no ponto z_i e $\chi_{\pi_k^{-1}(\cdot|\xi, \eta]}$ é a função característica do conjunto $\pi_k^{-1}(\cdot|\xi, \eta]$. Os resultados obtidos no Capítulo 4 foram objecto da seguinte publicação [38]:

M.N. de Jesus, J. Petronilho: *On orthogonal polynomials obtained via polynomial mappings*, Journal of Approximation Theory (2010), doi:10.1016/j.jat.2010.07.012. [35 páginas]

Após o estudo de **(P2)** procuraram-se aplicações dos resultados obtidos. De facto, consequências e aplicações de natureza diversa estão associadas ao estudo de **(P2)**, como se põe em evidência, entre outros, nos trabalhos [31, 28, 56, 53, 40, 24, 6], envolvendo, por exemplo, aplicações à Física (e.g., à Mecânica Quântica, na descrição do chamado hamiltoniano de certos sistemas físicos, designados por “chain models”) e à Álgebra Linear (no cálculo dos valores e vectores próprios de matrizes tridiagonais k -Toeplitz, bem como na determinação explícita das inversas destas matrizes). Por outro lado, aplicações incluindo o âmbito das Teorias dos Polinómios Ortogonais (quer na recta real, quer na circunferência unitária) e dos Operadores (em particular, dos operadores de Jacobi) foi também um dos aspectos abordados neste estudo. No tocante às aplicações à Teoria dos Operadores de Jacobi (dos quais são casos especiais os operadores de Shrödinger discretos), apresentam-se provas alternativas às existentes na literatura envolvendo a descrição do espectro dos chamados operadores de Jacobi periódicos (e assintoticamente periódicos), bem como perturbações compactas destes (cf. e.g. [30, 3, 66]). Em particular, clarifica-se uma questão colocada por A. Maté, P. Nevai e W. Van-Assche em [66] envolvendo o espectro de tais operadores.

Existe uma vasta literatura sobre a ligação entre a Teoria dos Polinómios Ortogonais e a Teoria de Operadores. Para descrever sucintamente esta ligação, considere-se uma SPO $(p_n)_n$ caracterizada pela RRTT

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

com condições iniciais $p_{-1}(x) = 1$ e $p_0(x) = 1$, onde $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n . Claramente, existe uma correspondência biunívoca entre a SPO $(p_n)_n$ caracterizada pela RRTT anterior e a matriz tridiagonal infinita

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

designada por matriz de Jacobi. Por sua vez (continuando a supor que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são limitadas e que $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n), esta matriz infinita representa um operador linear definido no espaço de sucessões $\ell^2(\mathbb{C})$, a respeito da base canónica de $\ell^2(\mathbb{C})$, que continuaremos a designar por \mathbf{J} , a que se chama operador de Jacobi. Explicitamente, fica definido um operador

$$\mathbf{J} : \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$$

tal que, para cada $x = (\xi_n)_n \in \ell^2(\mathbb{C})$, é $\mathbf{J}x = (\eta_n)_n$, onde

$$\eta_n := a_{n+1}\xi_{n+1} + b_n\xi_n + a_n\xi_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

De facto, constata-se facilmente que \mathbf{J} é um operador limitado se e só se ambas as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são limitadas. Nestas condições, \mathbf{J} é auto-adjunto e, além disso, \mathbf{J} é compacto se e só se

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

O operador de Jacobi \mathbf{J} , ou a correspondente SPO $(p_n)_n$, pode interpretar-se como uma realização do operador multiplicação em $L_\mu^2(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{M} : L_\mu^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_\mu^2(\mathbb{R}),$$

definido por

$$\mathbf{M}f(s) := sf(s), \quad f \in L_\mu^2(\mathbb{R}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Este facto é justificado por um teorema espectral (cf. [22, Cap. 2]) o qual assegura que, dado um operador de Jacobi limitado, \mathbf{J} , existe uma única medida de probabilidade, μ , com suporte compacto, tal que

$$\langle e_0, (\mathbf{J} - z\mathbf{I})^{-1}e_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(s)}{s - z}, \quad \Im z \neq 0,$$

onde $e_0 := (1, 0, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{C})$, \mathbf{I} é o operador identidade em $\ell^2(\mathbb{C})$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o produto interno usual em $\ell^2(\mathbb{C})$; além disso, a aplicação

$$\varphi : \mathbf{J} \mapsto \mu$$

é a aplicação espectral, no seguinte sentido: a aplicação

$$\mathbf{U} : \ell^2(\mathbb{C}) \ni p(\mathbf{J})e_0 \mapsto p(s) \in L_\mu^2(\mathbb{R}) \quad (p \text{ polinómio}),$$

admite uma extensão a um operador unitário $\mathbf{U} : L_\mu^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_\mu^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathbf{U}\mathbf{J}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{M} \quad \text{em } L_\mu^2(\mathbb{R}).$$

Além disso, a aplicação $\varphi : \mathbf{J} \mapsto \mu$ é bijetiva e tem imagem $\mathcal{R}(\varphi) = \mathcal{B}$, onde

$$\mathcal{B} := \left\{ \text{medidas de Borel } \mu \text{ em } \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} d\mu = 1 \text{ e } \mu \text{ tem suporte compacto} \right\}.$$

Deste modo, a determinação da aplicação inversa φ^{-1} reduz-se ao problema clássico da construção da SPO associada à medida μ . E, portanto, μ não é outra senão a medidade de ortogonalidade da sucessão $(p_n)_n$ caracterizada pela matriz de Jacobi \mathbf{J} . Além disso, o suporte de μ coincide com o espectro de \mathbf{J} :

$$\sigma(\mathbf{J}) = \text{supp}(\mu).$$

Os resultados gerais precedentes podem ser vistos, e.g., em [22, 32].

No Capítulo 5 obtiveram-se alguns resultados sobre o espectro (e, em particular, sobre o espectro essencial) de um operador de Jacobi limitado cuja SPO associada pode ser expressa em termos de uma transformação polinomial do tipo descrito no Problema **(P2)**, nomeadamente, transformações quadráticas e transformações cúbicas. Neste contexto, como exemplo típico dos resultados obtidos, estabelece-se que o espectro essencial do operador de Jacobi

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & b_2 & c_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_3 & b_3 & c_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & b_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8)$$

definido por

$$\begin{aligned} b_{3n} &= c \sin^2(n+1), & b_{3n+1} &= c \cos^2(n+1), & b_{3n+2} &= b, \\ c_{3n+1} &= \frac{c}{2} |\sin(2n+2)|, & c_{3n} &= 1/\sqrt{n+1}, & c_{3n-1} &= \sqrt{n/(n+1)}, \end{aligned}$$

(onde $b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, de modo que \mathbf{J} é um operador limitado e auto-adjunto) está contido numa reunião de três intervalos de números reais:

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}) \subset I_1 \cup I_2 \cup I_3 ,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left[\frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2}, \min \left\{ 0, \frac{c + b - \sqrt{(c-b)^2 + 4}}{2} \right\} \right] , \\ I_2 &:= \left[\max \left\{ 0, \frac{c + b - \sqrt{(c-b)^2 + 4}}{2} \right\}, \min \left\{ c, \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \right\} \right] , \\ I_3 &:= \left[\max \left\{ c, \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \right\}, \frac{c + b + \sqrt{(c-b)^2 + 4}}{2} \right] . \end{aligned}$$

Este tipo de problemas tem sido objecto de investigação recente, sendo o seu estudo fortemente motivado pela importância que os resultados obtidos neste campo adquiriram na análise de problemas no âmbito da Física-Matemática (veja-se, e.g., [73, 22, 41, 40, 84, 85, 86]).

Capítulo 1

Funcionais regulares e polinómios ortogonais

Neste capítulo recordam-se alguns conceitos básicos da teoria dos polinómios ortogonais. A apresentação é baseada, essencialmente, nas monografias [19, 32, 91], bem como nos artigos [59, 60, 61, 78, 48, 93].

1.1 Aspectos topológicos

Os espaços \mathcal{P} e \mathcal{P}'

Com as operações usuais da adição e multiplicação escalar, $\mathbb{C}[x]$ fica munido com uma estrutura de espaço linear, que denotaremos por \mathcal{P} . Em \mathcal{P} consideramos a topologia do limite indutivo estrito definida pela sucessão $(P_n, \|\cdot\|_n)$ (ver Maroni [60, 61]; Trèves [91]) onde P_n representa o espaço de Banach de todos os polinómios de grau menor ou igual que n com a topologia induzida pela norma

$$\|p\|_n := \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad p \equiv \sum_{k=0}^n a_k x^k \in P_n. \quad (1.1)$$

O espaço dual topológico de \mathcal{P} será representado por \mathcal{P}' , i.e.,

$$\mathcal{P}' := \{\mathbf{u} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbf{u} \text{ é linear e contínua}\}.$$

Em \mathcal{P}' considera-se a topologia fraca de dual. Por definição, esta topologia é caracterizada pelo sistema de semi-normas $\{|\cdot|_n : n \in \mathbb{N}\}$, onde, para $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$,

$|\mathbf{u}|_n$ é definido por (cf. [61])

$$|\mathbf{u}|_n := \sup_{0 \leq m \leq n} |u_m|, \quad n \geq 0, \quad (1.2)$$

sendo $u_n := \langle \mathbf{u}, x^n \rangle$ o momento de ordem n de \mathbf{u} . Uma vez que este sistema de semi-normas é numerável, \mathcal{P}' é um espaço metrizável, facto que é utilizado para mostrar que

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}^*,$$

onde \mathcal{P}^* denota o dual algébrico de \mathcal{P} , isto é,

$$\mathcal{P}^* := \{\mathbf{u} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbf{u} \text{ é linear}\}.$$

Algumas operações em \mathcal{P} e \mathcal{P}'

Como é usual na literatura, $\mathcal{L}(X, Y)$ designa o espaço das aplicações lineares contínuas de X em Y . Aqui, estamos particularmente interessados nas seguintes transformações em $\mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$:

$$f \mapsto gf, \quad f \mapsto Df, \quad f \mapsto \theta_c f$$

onde f é um polinómio (variável), g é um polinómio fixo e c é um número complexo fixo, sendo as operações definidas por

$$gf(x) := g(x)f(x), \quad Df(x) := f'(x), \quad \theta_c f(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \quad (1.3)$$

Por dualidade, as aplicações seguintes estão em $\mathcal{L}(\mathcal{P}', \mathcal{P}')$:

$$\mathbf{u} \mapsto g\mathbf{u} := \mathbf{u} \circ g, \quad \mathbf{u} \mapsto D\mathbf{u} := -\mathbf{u} \circ D, \quad \mathbf{u} \mapsto (x - c)^{-1}\mathbf{u} := \mathbf{u} \circ \theta_c.$$

Isto motiva as seguintes definições:

Definição 1.1. *Sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$, $g \in \mathcal{P}$ e $c \in \mathbb{C}$. Definimos*

- (i) *o produto à esquerda da funcional \mathbf{u} pelo polinómio p : é a funcional de \mathcal{P}' , designada por $p\mathbf{u}$, tal que*

$$\langle p\mathbf{u}, f \rangle := \langle \mathbf{u}, pf \rangle, \quad f \in \mathcal{P};$$

- (ii) *a derivada de \mathbf{u} : é a funcional de \mathcal{P}' , designada por $D\mathbf{u}$, tal que*

$$\langle D\mathbf{u}, f \rangle := -\langle \mathbf{u}, f' \rangle, \quad f \in \mathcal{P};$$

(iii) a divisão da funcional \mathbf{u} pelo polinómio $x - c$: é a funcional de \mathcal{P}' , designada por $(x - c)^{-1}\mathbf{u}$, tal que

$$\langle (x - c)^{-1}\mathbf{u}, f \rangle := \langle \mathbf{u}, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \rangle, \quad f \in \mathcal{P}.$$

É importante destacar que o produto à esquerda de uma funcional por um polinómio goza da regra de derivação usual, i.e.,

$$D(p\mathbf{u}) = p'\mathbf{u} + pD\mathbf{u}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{P}'.$$

De acordo com a definição precedente, a multiplicação à esquerda de uma funcional por um polinómio é uma nova funcional. Define-se também a multiplicação à direita de uma funcional por um polinómio, como sendo um polinómio.

Definição 1.2. *Sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$ e $f \in \mathcal{P}$. O produto à direita da funcional \mathbf{u} pelo polinómio f é o polinómio, designado por $\mathbf{u}f$, definido por*

$$\mathbf{u}f(x) := \left\langle \mathbf{u}_\xi, \frac{xf(x) - \xi f(\xi)}{x - \xi} \right\rangle, \quad (1.4)$$

onde o índice ξ em \mathbf{u}_ξ indica que \mathbf{u} actua em polinómios na variável ξ .

Observação 1.3. *Note-se que, para $f \in \mathcal{P}_n$, digamos, $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, o polinómio $\mathbf{u}f(x)$ em (1.4) admite a seguinte expressão explícita, em termos das sucessivas potências:*

$$\mathbf{u}f(x) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n a_j u_{j-i} \right) x^i.$$

Série formal de Stieltjes

Designemos por Δ' o espaço vectorial das séries formais, i.e.

$$\Delta' := \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n : a_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

As operações de adição, multiplicação e multiplicação por um escalar em Δ' são definidas por generalização das correspondentes operações em \mathcal{P} (ver [91]).

Deste ponto de vista, Δ' fica munido de uma estrutura algébrica, e pode operar-se (formalmente) com elementos de Δ' como se de funções analíticas se tratasse.

Munindo Δ' da família de seminormas $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ definidas por

$$s_n \left(\sum_{k \geq 0} a_k z^k \right) := \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|, \quad n \geq 0$$

é possível estabelecer um isomorfismo $F : \mathcal{P}' \rightarrow \Delta'$ definido por [59]

$$\mathbf{u} \in \mathcal{P}' \mapsto F(\mathbf{u}) := F_{\mathbf{u}}(z) \equiv \sum_{n \geq 0} u_n z^n .$$

Este isomorfismo transporta a estrutura algébrica de Δ' para \mathcal{P}' .

Definição 1.4. Para $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$, a série formal de Stieltjes associada a \mathbf{u} , $S_{\mathbf{u}}$, é a série formal definida por

$$S_{\mathbf{u}}(z) := - \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{z^{n+1}} \equiv -\frac{1}{z} F_{\mathbf{u}} \left(\frac{1}{z} \right) . \quad (1.5)$$

1.2 Polinômios ortogonais sobre a recta real

Definição 1.5. Seja $\mathbf{u} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ uma funcional linear.

(i) $(P_n)_n$ diz-se uma sucessão de polinômios ortogonais (SPO) a respeito de \mathbf{u} (ou associada a \mathbf{u}) se se verificarem as duas condições seguintes:

- $(P_n)_n$ é uma família livre de polinômios, i.e., cada P_n tem grau n ;
- existe uma sucessão $(k_n)_n$ de números complexos não nulos tal que

$$\langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = k_n \delta_{mn} , \quad n, m = 0, 1, 2, \dots .$$

(ii) \mathbf{u} diz-se regular se existe uma SPO a respeito de \mathbf{u} .

(iii) Uma SPO $(P_n)_n$ diz-se uma sucessão de polinômios ortogonais mónicos (SPOM) se cada P_n é mónico (i.e., o coeficiente do termo de maior grau é 1); e diz-se uma sucessão de polinômios ortonormados se $k_n = 1$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$.

É fácil de verificar que se $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são duas SPO's a respeito da mesma funcional $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$, então existe uma sucessão de números complexos $(c_n)_n$ tal que $Q_n(x) = c_n P_n(x)$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. De seguida apresentamos uma condição necessária e suficiente para a regularidade da funcional \mathbf{u} . Para isso, defina-se o determinante de Hankel de ordem n associado à funcional \mathbf{u} :

$$h_n := \det[u_{i+j}]_{i,j=0}^n .$$

A existência de uma SPO a respeito de \mathbf{u} traduz-se pela condição algébrica de todos os menores principais do determinante anterior serem não nulos, para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$; ou seja: \mathbf{u} é regular se e só se

$$h_n \neq 0 , \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Nestas condições, designando por $(P_n)_n$ a correspondente SPOM, cada polinómio P_n pode ser calculado explicitamente de acordo com a fórmula [19, pg.11]

$$P_n(x) = \frac{1}{h_{n-1}} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & \cdots & u_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Relação de recorrência a três termos (RRTT)

Um dos resultados mais importantes na teoria dos polinómios ortogonais é o chamado Teorema de Favard (ver, e.g., [19, pg.21]), o qual estabelece que toda a SPO $(P_n)_n$ é caracterizada por uma relação de recorrência a três termos (RRTT) do tipo

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = \text{constante} \neq 0$, onde $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ e $(\gamma_n)_n$ são sucessões de números complexos tais que $\alpha_n \gamma_{n+1} \neq 0$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. O caso mónico corresponde a $\alpha_n = 1$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. É fácil de verificar que se $(P_n)_n$ é uma SPOM a respeito da funcional linear \mathbf{u} então os coeficientes β_n e γ_n podem obter-se pelas fórmulas

$$\beta_n = \frac{\langle \mathbf{u}, xP_n^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle} \quad (n \geq 0), \quad \gamma_n = \frac{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, P_{n-1}^2 \rangle} \quad (n \geq 1).$$

Normalmente considera-se a convenção $\gamma_0 = u_0$, facto que, juntamente com a expressão de γ_n dada anteriormente, permite obter a relação

$$\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle = \prod_{k=0}^n \gamma_k, \quad n \geq 0. \quad (1.7)$$

Além disso, tem-se

$$\gamma_n = \frac{h_{n-2} h_n}{h_{n-1}^2}, \quad n \geq 1,$$

com a convenção $h_{-1} = 1$, o que permite concluir que, dada a relação (1.6), \mathbf{u} é regular e $(P_n)_n$ é a correspondente SPOM se e só se $\gamma_n \neq 0$ para todo o $n \geq 0$. Pondo $a_n := \sqrt{\alpha_{n-1} \gamma_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) e $b_n := \beta_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), obtém-se a RRTT que caracteriza a SPO ortonormada $(p_n)_n$ correspondente à sucessão $(P_n)_n$, i.e.,

$$xp_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

com condições iniciais $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = u_0^{-1/2}$. Além disso, considerando, sem perda de generalidade, que $u_0 = 1$, os polinómios ortogonais mónicos e os ortonormados estão relacionados por

$$p_n(x) = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Verifica-se também, como consequência da Identidade de Christoffel-Darboux [19, pg. 23], a seguinte igualdade

$$\sum_{k=0}^n [p_k(x)]^2 = a_{n+1} [p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)] \quad (1.10)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.

Polinómios ortogonais associados

Definição 1.6. *Sejam $(P_n)_n$ a SPOM associada a uma funcional regular \mathbf{u} e k um número inteiro não negativo. A sucessão de polinómios mónicos $(P_n^{(k)})_n$ definida por*

$$P_n^{(k)}(x) := \frac{1}{\langle \mathbf{u}_y, P_{k-1}^2(y) \rangle} \left\langle P_{k-1}(y) \mathbf{u}_y, \frac{P_{n+k}(x) - P_{n+k}(y)}{x - y} \right\rangle,$$

onde \mathbf{u}_y representa a acção de \mathbf{u} na variável y , chama-se sucessão de polinómios ortogonais mónicos associados de ordem k correspondente à SPOM $(P_n)_n$.

Esta sucessão de polinómios $(P_n^{(k)})_n$ é, de facto, uma SPOM, facto que decorre imediatamente da circunstância de satisfazer uma RRTT, a qual se obtém efectuando translações nos índices dos polinómios que figuram na RRTT satisfeita por $(P_n)_n$, i.e.,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(k)}(x) &= (x - \beta_{n+k}) P_n^{(k)}(x) - \gamma_{n+k} P_{n-1}^{(k)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ P_{-1}^{(k)}(x) &= 0, \quad P_0^{(k)}(x) = 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Em particular, para $k = 1$, obtém-se

$$P_{n+1}^{(1)}(x) = (x - \beta_{n+1}) P_n^{(1)}(x) - \gamma_{n+1} P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

(com $P_{-1}^{(1)}(x) = 0$ e $P_0^{(1)}(x) = 1$). Esta sucessão $(P_n^{(1)})_n$ é particularmente importante e normalmente designa-se sucessão dos polinómios (mónicos) associados ou sucessão dos polinómios (mónicos) numerador da SPOM. Naturalmente, para $k = 0$ obtém-se a própria SPOM $(P_n)_n$. Constata-se facilmente, a partir da relação de recorrência (1.11), que o polinómio mónico associado de ordem k é

dado explicitamente, para todos os $n, k = 0, 1, 2, \dots$, pela formula determinantal (determinante de ordem n , de uma matriz tridiagonal)

$$P_n^{(k)}(x) = \begin{vmatrix} x - \beta_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_{k+1} & x - \beta_{k+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_{n+k-2} & x - \beta_{n+k-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{n+k-1} & x - \beta_{n+k-1} \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

e que

$$P_{n+1}^{(k+1)}(x)P_{n+1}^{(k)}(x) - P_{n+2}^{(k)}(x)P_n^{(k+1)}(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \gamma_{j+k}, \quad n, k \geq 0. \quad (1.14)$$

Caso definido-positivo: medida de ortogonalidade

Recorde-se que, dada uma medida de Borel positiva sobre \mathbb{R} , μ , com suporte infinito e tal que todos os momentos $\int_{\mathbb{R}} x^n d\mu$ existem para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, a função de distribuição de μ é definida por $\psi_\mu(x) := \mu((-\infty, x])$; esta função é não negativa, limitada, não decrescente, contínua à direita, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_\mu(x) = 0$. Reciprocamente, qualquer função, ψ , que satisfaça estas propriedades é a função de distribuição de alguma medida de Borel, μ , tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x)$$

(cf. McDonald e Weiss [67, § 4.7]). Assim, por abuso de linguagem, será corrente escrever indistintamente μ (medida) ou ψ (função de distribuição) para representar quer a medida quer a função de distribuição. As notações $d\mu$ e $d\psi$ serão também usadas com o mesmo significado. Neste contexto, e.g., será frequente escrever “Seja $d\mu$ uma medida ...” ou “Seja $d\psi$ uma medida ...”, com o mesmo significado.

A noção de ortogonalidade tal como foi introduzida na Definição 1.5 é, em princípio, uma “ortogonalidade formal”, no sentido em que, na realidade, os polinómios $(P_n)_n$ são ortogonais relativamente a uma sucessão de números $u_n := \langle \mathbf{u}, x^n \rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), ignorando a questão de saber se tais números são realmente os momentos correspondentes a alguma medida, no sentido usual da teoria analítica dos momentos.

Definição 1.7. *Uma funcional linear \mathbf{u} diz-se definida-positiva se $\langle \mathbf{u}, f \rangle > 0$ para todo o polinómio f tal que f não é o polinómio identicamente nulo em \mathbb{R}*

e $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se $(P_n)_n$ é uma SPO associada a uma funcional linear definida-positiva, diz-se que $(P_n)_n$ é ortogonal no sentido definido-positivo.

Observação 1.8. Se \mathbf{u} é uma funcional linear definida-positiva, é claro que $\langle \mathbf{u}, x^{2n} \rangle > 0$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, tendo em conta que

$$0 < \langle \mathbf{u}, (x+1)^{2n} \rangle = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} u_k,$$

verifica-se facilmente, por indução matemática, que cada momento de ordem ímpar, u_{2n-1} , é real. Consequentemente, decorre da desigualdade anterior que se \mathbf{u} é definida-positiva então todos os momentos são números reais e, em particular, os momentos de ordem par são números reais estritamente positivos. Por outro lado, sendo \mathbf{u} uma funcional linear definida-positiva, pode-se construir, passo a passo, pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, uma SPO $(p_n)_n$ (ortonormal) de polinómios reais, pondo

$$p_n(x) := (\langle \mathbf{u}, q_n^2 \rangle)^{-1/2} q_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $q_0(x) := u_0^{-1/2}$ e

$$q_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle \mathbf{u}, x^{n+1} q_k \rangle q_k(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Isto mostra que toda a funcional linear definida-positiva é regular.

De acordo com o exposto anteriormente, dada uma SPOM $(P_n)_n$, esta sucessão satisfaz uma relação de recorrência do tipo (1.6) (com $\alpha_n = 1$). O caso em que β_n é real e $\gamma_{n+1} > 0$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ tem uma especial importância em aplicações. Neste caso, \mathbf{u} admite uma representação integral a respeito de alguma função de distribuição ψ (não decrescente, contínua à direita, não negativa, limitada e com $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0$) tal que o conjunto

$$\text{supp}(\psi) := \{x \in \mathbb{R} \mid \psi(x + \delta) - \psi(x - \delta) > 0, \forall \delta > 0\}$$

(dito o suporte de ψ , ou conjunto dos pontos de crescimento de ψ) é infinito. De facto, um importante Teorema da Representação (cf. [19, Cap.II]) estabelece que uma funcional \mathbf{u} é definida-positiva se e só se admite uma representação integral da forma

$$\langle \mathbf{u}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi(x), \quad f \in \mathcal{P} \quad (1.15)$$

onde ψ é uma função de distribuição com suporte infinito e momentos de todas as ordens finitos, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\psi(x) < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Apresenta-se de seguida um resultado teoricamente interessante para a determinação da medida de ortogonalidade associada a uma dada SPOM. É conveniente introduzir a definição de transformada de Stieltjes associada a uma função de distribuição ψ .

Definição 1.9. *Seja ψ uma função distribuição com $\text{supp}(\psi) \subset \mathbb{R}$. Definimos a transformada de Stieltjes de ψ (ou função de Stieltjes), como sendo a função analítica, $F(\cdot; \psi)$, dada por*

$$F(z; \psi) := \int_{\text{supp}(\psi)} \frac{d\psi(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\psi) \quad (1.16)$$

Observação 1.10. *É possível estabelecer uma relação entre a função de Stieltjes (1.16) e a série formal de Stieltjes (1.5), no caso de ser $\text{supp}(d\psi) = [a, b]$, com a e b finitos. Considerando o desenvolvimento*

$$\frac{1}{x - z} = - \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{z^{n+1}},$$

a série converge absoluta e uniformemente para $x \in [a, b]$ e para z pertencente a um subconjunto compacto do domínio definido por $|z| > R := \max\{|a|, |b|\}$. Integrando termo a termo em $[a, b]$ a respeito de $\psi(x)$, obtém-se

$$F(z; \psi) = - \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{z^{n+1}}, \quad |z| > R \quad (1.17)$$

onde $u_n := \int_a^b x^n d\psi(x)$. Assim, a série de potências que figura no segundo membro de (1.17) é a série de Laurent (em torno do infinito) para $F(\cdot; \psi)$ e converge para $S_{\mathbf{u}}(z)$ no domínio indicado.

O próximo resultado mostra-nos a importância da função de Stieltjes. Antes porém, definimos os seguintes conjuntos, introduzidos em [93]:

$$\begin{aligned} Z_N &:= \{x_{n,j} : j = 1, \dots, n, n \geq N\}, \\ X_1 &:= Z'_1 \equiv \{\text{conjunto dos pontos de acumulação de } Z_1\}, \\ X_2 &:= \{x \in Z_1 : P_n(x) = 0 \text{ para infinitos valores de } n\}, \end{aligned}$$

onde $\{x_{n,j} : j = 1, \dots, n\}$ designa o conjunto de zeros de P_n . É importante destacar que, se \mathbf{u} é uma funcional definida-positiva, existe um representante ψ

tal que

$$\text{supp}(d\psi) \subset X_1 \cup X_2 \subset \text{co}(\text{supp}(d\psi)) ,$$

onde $\text{co}(\text{supp}(d\psi))$ designa o invólucro convexo do conjunto $\text{supp}(d\psi)$, i.e., o menor intervalo fechado que contém $\text{supp}(d\psi)$. O resultado que a seguir se enuncia foi estabelecido por W. Van-Assche [93] e é uma generalização de um importante Teorema de Markov , que provou o teorema supondo ψ uma medida absolutamente contínua e $\text{supp}(d\psi) = [a, b]$, com a e b finitos.

Teorema 1.11. *Seja ψ uma função distribuição unicamente determinada pela correspondente sucessão de momentos e $(P_n)_n$ a correspondente SPOM. Então*

$$-u_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = F(z, \psi) , \quad z \in \mathbb{C} \setminus (X_1 \cup X_2),$$

onde $u_0 := \int_{\mathbb{R}} d\psi(x)$ (o primeiro momento de $d\psi$) e a convergência é uniforme em cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

O Teorema precedente permite determinar a medida de ortogonalidade de uma dada sucessão de polinômios ortogonais. Com efeito, é válido o seguinte resultado:

Teorema 1.12. (Fórmula de inversão de Stieltjes) *Seja ψ uma função de distribuição e $F(\cdot; \psi)$ a correspondente transformada de Stieltjes. Então*

$$\psi(b) - \psi(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(F(x - i\varepsilon; d\psi)) dx ,$$

onde se considera ψ normalizada de modo que

$$\psi(-\infty) = 0, \quad \psi(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2} .$$

Note-se que se $d\mu$ é uma medida de probabilidade e (p_n) é a correspondente sucessão de polinômios ortonormados, então (cf. e.g. [41])

$$-\frac{1}{a_1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = F(z; d\mu) , \quad z \in \mathbb{C} \setminus (X_1 \cup X_2)$$

$$\mu((a, b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(F(x - i\varepsilon; d\mu)) dx .$$

Zeros dos polinômios ortogonais

De acordo com o teorema fundamental da Álgebra, todo o polinômio de grau n , com coeficientes reais ou complexos, tem n zeros em \mathbb{C} (contando as suas

multiplicidades). Quando se trata de polinômios ortogonais podemos dizer mais. Uma consequência imediata da relação de recorrência a três termos para uma dada SPO $(P_n)_n$ é que dois polinômios consecutivos P_n e P_{n+1} não podem ter zeros comuns. Por outro lado, se a funcional de momentos \mathbf{u} a respeito da qual $(P_n)_n$ é ortogonal for definida-positiva, muito mais se pode afirmar acerca dos zeros das correspondentes SPO's. Para obter informação sobre estes zeros começamos por observar que a relação de recorrência (1.6) pode reescrever-se em termos matriciais como

$$x \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} = J_n \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} + \alpha_{n-1} P_n(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($n = 1, 2, \dots$), onde J_n é a matriz tridiagonal, chamada matriz de Jacobi, de ordem n definida por

$$J_n := \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Assim, os zeros de P_n são os valores próprios de J_n , e como, se a funcional \mathbf{u} for definida-positiva, é $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{n-1}\gamma_n > 0$, pondo $a_n := \sqrt{\alpha_{n-1}\gamma_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) e $b_n = \beta_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), deduz-se que o conjunto dos valores próprios de J_n coincide com o conjunto dos valores próprios da matriz

$$\tilde{J}_n := \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ora, esta é uma matriz simétrica, logo os valores próprios (zeros de P_n) são reais. Observe-se que, tal como J_n se obteve a partir da RRTT (1.6), também \tilde{J}_n se

pode obter (por processo análogo) da RRTT que caracteriza a SPO ortonormada $(p_n)_n$, correspondente à sucessão $(P_n)_n$. No que vai seguir-se, considere-se que $(P_n)_n$ é uma SPOM no sentido definido positivo. Nestas condições, cada $P_n(x)$, $n \geq 1$, tem n zeros reais e simples, que denotaremos, por ordem crescente

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n} , \quad (1.18)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. Além desta propriedade, verifica-se também, o entrelaçamento dos zeros de dois polinômios consecutivos P_n e P_{n+1} (propriedade de separação), i.e.,

$$x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1} \quad \text{para } j = 1, \dots, n . \quad (1.19)$$

Assim podemos deduzir que para todo o $n = 1, 2, 3, \dots$, existem todos os limites

$$\xi_i := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,i} \quad \text{e} \quad \eta_j := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,n-j+1} , \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

(podendo, eventualmente, ser infinitos).

Definição 1.13. *Se \mathbf{u} é uma funcional de momentos definida-positiva e $(P_n)_n$ a correspondente SPOM, o intervalo fechado $[\xi_1, \eta_1]$, com ξ_1 e η_1 definidos por (1.20), é chamado o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da sucessão $(P_n)_n$.*

Observação 1.14. *O verdadeiro intervalo de ortogonalidade é o menor intervalo fechado (no sentido da inclusão) que contém todos os zeros de todos os polinômios P_n ($n = 1, 2, \dots$).*

Uma estimativa interessante para os zeros de uma dada SPOM, em termos dos coeficientes da RRTT, é dada por [72]

$$|x_{n,j}| \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} |\beta_i| + 2 \max_{1 \leq i \leq n-1} \gamma_i , \quad 1 \leq j \leq n , \quad n = 1, 2, \dots .$$

Em particular, esta relação mostra que se as sucessões $(\beta_n)_n$ e $(\gamma_n)_n$ (que figuram na RRTT) forem ambas limitadas, então $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado.

Pode também mostrar-se que $[\xi_1, \eta_1]$ é um conjunto suporte para alguma função de distribuição ψ a respeito da qual $(P_n)_n$ seja ortogonal, no seguinte sentido: se $(P_n)_n$ é uma SPO a respeito de uma funcional linear \mathbf{u} definida-positiva, então existe uma função de distribuição, ψ , representante de \mathbf{u} tal que (ver [19, pg.58])

$$\text{supp}(d\psi) \subset [\xi_1, \eta_1] .$$

1.3 Base dual

Vimos na secção anterior que podemos expressar a SPOM a respeito de uma funcional regular \mathbf{u} em termos da sua sucessão de momentos, $(u_n)_n$. De seguida apresentamos uma representação para a funcional \mathbf{u} em termos da correspondente SPOM. Começamos por definir base dual, $(\mathbf{a}_n)_n$, duma sucessão livre de polinómios mónicos $(R_n)_n$ (não necessariamente ortogonal), por

$$\langle \mathbf{a}_n, R_m \rangle := \delta_{m,n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema 1.15. *Seja $(R_n)_n$ uma sucessão de polinómios em \mathcal{P} e $(\mathbf{a}_n)_n$ a base dual associada em \mathcal{P}^* . Então para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{P}^*$ a representação*

$$\mathbf{v} = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \mathbf{a}_n, \quad \lambda_n := \langle \mathbf{v}, R_n \rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.21)$$

verifica-se, no sentido da topologia fraca de dual em \mathcal{P}' .

O teorema seguinte, estabelece algumas relações entre uma funcional regular em \mathcal{P}' e a base dual associada à correspondente SPO.

Teorema 1.16. *Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{P}^*$ regular, $(P_n)_n$ a correspondente SPOM, e $(\mathbf{a}_n)_n$ a base dual associada. Então as seguintes afirmações verificam-se:*

- (i) *Cada elemento \mathbf{a}_n da base dual associada pode exprimir-se em função da própria funcional \mathbf{u} de acordo com a fórmula*

$$\mathbf{a}_n = \frac{P_n(x)}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle} \mathbf{u}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

- (ii) *Se $\mathbf{v} \in \mathcal{P}^*$ e existe um inteiro $N \in \mathbb{N}$ tal que $\langle \mathbf{v}, P_n \rangle = 0$ para todo o $n \geq N + 1$, então*

$$\mathbf{v} = \sum_{\nu=0}^N \langle \mathbf{v}, P_\nu \rangle \mathbf{a}_\nu. \quad (1.23)$$

Como consequência, existe $\phi \in \mathcal{P}$, com $\text{gr} \phi \leq N$, tal que $\mathbf{v} = \phi \mathbf{u}$. Este polinómio ϕ é dado por $\phi(x) = \sum_{\nu=0}^N \frac{\langle \mathbf{v}, P_\nu \rangle}{\langle \mathbf{u}, P_\nu^2 \rangle} P_\nu(x)$. Além disso $\text{gr} \phi = N$ se e só se $\langle \mathbf{v}, P_N \rangle \neq 0$.

- (iii) *$(P_n)_n$ é ortogonal a respeito de \mathbf{a}_0 .*

- (iv) *Se $(P_n)_n$ satisfaz a RRTT (1.6) (com $\alpha_n = 1$ para todo o n) então*

$$x \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} + \beta_n \mathbf{a}_n + \gamma_{n+1} \mathbf{a}_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como consequência imediata do teorema anterior conclui-se que uma dada sucessão livre de polinómios $(P_n)_n$ é uma SPOM a respeito de alguma funcional $\mathbf{v} \in \mathcal{P}^*$ se e só se

$$\langle \mathbf{v}, 1 \rangle \neq 0, \quad \langle \mathbf{v}, P_n \rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

1.4 Exemplos

Nesta secção introduzem-se algumas famílias de polinómios ortogonais, bem conhecidas na literatura, que irão desempenhar um papel fundamental em diversos momentos no texto.

Polinómios de Chebyshev

Os polinómios de Chebyshev são determinados a partir da relação de recorrência

$$2xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

No caso das condições iniciais serem $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, estes polinómios designam-se por polinómios de Chebyshev de primeira espécie e em vez de P_n escreve-se T_n ; e se as condições iniciais forem $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = 2x$, designam-se polinómios de Chebyshev de segunda espécie e em vez de P_n escreve-se U_n . Relações trigonométricas elementares mostram que, para $x = \cos \theta$, $\theta \in (0, \pi)$, são válidas as representações

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Daqui deduzem-se facilmente as expressões explícitas para os zeros das sucessões $(T_n)_n$ e $(U_n)_n$, o que permite concluir que o verdadeiro intervalo de ortogonalidade destas sucessões de polinómios ortogonais é o intervalo $[-1, 1]$. Notemos também que os polinómios associados de primeira ordem correspondentes às sucessões $(T_n)_n$ e $(U_n)_n$ satisfazem

$$T_{n-1}^{(1)}(z) = U_{n-1}(z) \quad \text{e} \quad U_{n-1}^{(1)}(z) = U_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots$$

Assim, designando por F_T e F_U , as funções de Stieltjes correspondentes às sucessões $(T_n)_n$ e $(U_n)_n$ (resp.), pode provar-se que

$$F_T(z) = -\frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad F_U(z) = -2 \left(z - (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (1.25)$$

onde

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \begin{cases} -\sqrt{z^2 - 1} & \text{se } z \in (-\infty, -1] \\ i\sqrt{1 - z^2} & \text{se } z \in [-1, 1] \\ \sqrt{z^2 - 1} & \text{se } z \in [1, +\infty) \end{cases} . \quad (1.26)$$

Assim, tendo em conta a fórmula de inversão de Stieltjes, pode mostrar-se que as medidas de ortogonalidade correspondentes às sucessões $(T_n)_n$ e $(U_n)_n$ são dadas, respectivamente, por

$$d\psi_U(x) := \chi_{(-1,1)}(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} dx \quad \text{e} \quad d\psi_T(x) := \chi_{(-1,1)}(x) \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Observação 1.17. *A sucessão $(U_n)_n$ é uma SPO ortonormada relativamente à medida $d\psi_U$. Porém, $(T_n)_n$ não é uma SPO ortonormada relativamente a $d\psi_T$; a correspondente SPO ortonormada relativamente a $d\psi_T$ é a sucessão $(t_n)_n$ definida por*

$$t_0(x) = 1, \quad t_n(x) = \sqrt{2}T_n(x), \quad n = 1, 2, \dots .$$

As SPO's mónicas, $(\widehat{T}_n)_n$ e $(\widehat{U}_n)_n$, correspondentes às SPO's $(T_n)_n$ e $(U_n)_n$ são dadas por

$$\widehat{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x), \quad \widehat{U}_n(x) = 2^{-n}U_n(x), \quad n = 1, 2, \dots . \quad (1.27)$$

SPO's geradas por perturbações nas condições iniciais

Seja $(P_n)_n$ uma SPOM associada à funcional linear \mathbf{u} , e suponha-se que $(P_n)_n$ satisfaz a RRTT

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$, onde $(\beta_n)_n$ e $(\gamma_n)_n$ são duas sucessões de números complexos tais que $\gamma_n \neq 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$. Efectue-se a seguinte perturbação nas condições iniciais:

$$\beta_0 \rightsquigarrow \beta_0 + \mu, \quad \gamma_1 \rightsquigarrow \lambda\gamma_1$$

com $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda \neq 0$. Obtém-se assim uma nova sucessão de polinómios ortogonais, denotada por $(P_n(x; \lambda, \mu))_n$, caracterizada pela RRTT

$$P_{n+1}(x; \lambda, \mu) = (x - \beta_n)P_n(x; \lambda, \mu) - \gamma_n P_{n-1}(x; \lambda, \mu), \quad n \geq 2$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} P_0(x; \lambda, \mu) = 1 \\ P_1(x; \lambda, \mu) = x - \beta_0 - \mu \\ P_2(x; \lambda, \mu) = x^2 - (\beta_0 + \beta_1 + \mu)x + \beta_0\beta_1 + \mu\beta_1 - \lambda\gamma_1 \end{cases} .$$

Esta sucessão $(P_n(x; \lambda, \mu))_n$ foi estudada em [23], tendo sido provado que

$$P_n(x; \lambda, \mu) = \lambda P_n(x) + [(1 - \lambda)(x - \beta_0) - \mu]P_{n-1}^{(1)}(x) , \quad n \geq 1 \quad (1.28)$$

e que a série formal de Stieltjes relativamente à funcional $\mathbf{u}_{\lambda, \mu}$ a respeito da qual $(P_n(x; \lambda, \mu))_n$ é ortogonal se pode exprimir em função da série formal de Stieltjes associada à funcional \mathbf{u} através da relação

$$S_{\mathbf{u}_{\lambda, \mu}}(z) = \frac{S_{\mathbf{u}}(z)}{\lambda + (\mu - (1 - \lambda)(z - \beta_0))S_{\mathbf{u}}(z)} .$$

Observação 1.18. Fazendo $\lambda = 1$ em (1.28), obtemos a SPOM $(P_n(\cdot; \mu))_n$ definida por

$$P_{n+1}(x; \mu) := P_{n+1}(x) - \mu P_n^{(1)}(x) , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

conhecida por sucessão co-recursiva correspondente a $(P_n)_n$. Esta sucessão foi introduzida e estudada por T.S. Chihara em [17], e é útil, e.g., no estudo da regularidade de certos problemas inversos.

SPO's obtidas por uma transformação afim da variável

Consideremos uma SPOM $(P_n)_n$ caracterizada pela relação de recorrência (1.6), com $\alpha_n = 1$. Seja $(\tilde{P}_n)_n$ a sucessão de polinômios ortogonais que se obtém de $(P_n)_n$ por uma transformação afim da variável, i.e.,

$$\tilde{P}_n(x) = c^n P_n\left(\frac{x-b}{c}\right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

com $b, c \in \mathbb{C}$ e $c \neq 0$. Constata-se facilmanete que $(\tilde{P}_n)_n$ satisfaz a RRTT

$$x\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_{n+1}(x) + (c\beta_n + b)\tilde{P}_n(x) + c^2\gamma_n\tilde{P}_{n-1}(x).$$

Além disso, no caso definido-positivo, admitindo que o suporte da medida associada à SPOM $(P_n)_n$ é o intervalo $[\xi, \eta]$, verificam-se as relações

$$F_{\tilde{P}}(z) = \frac{1}{c}F_P\left(\frac{z-b}{c}\right) , \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\xi c + b, \eta c + b]$$

$$d\sigma_{\tilde{P}}(x) = d\sigma_P\left(\frac{x-b}{c}\right) , \quad \text{supp}(\sigma_P) = [\xi c + b, \eta c + b] ,$$

onde $d\sigma_{\tilde{P}}$ designa a medida de ortogonalidade da SPOM $(\tilde{P}_n)_n$, $F_{\tilde{P}}$ a correspondente função de Stieltjes e $d\sigma_P$ é a medida de ortogonalidade correspondente à SPOM $(P_n)_n$ à qual corresponde a função de Stieltjes F_P .

1.5 Polinómios ortogonais semiclássicos

As SPO's mais estudadas na literatura são, inquestionavelmente, as famílias clássicas de Hermite, Laguerre, Bessel e Jacobi (que incluem os polinómios de Chebyshev e de Legendre). Por sua vez, as SPO's clássicas são um caso particular das chamadas SPO's semi-clássicas, introduzidas por J. Shoat e exaustivamente estudadas por diversos autores, com particular destaque para P. Maroni. Nesta secção recordam-se algumas das propriedades das SPO's semiclássicas.

Definição 1.19. *Uma funcional $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$ diz-se semiclássica se:*

- (i) \mathbf{u} é regular;
- (ii) existem dois polinómios ϕ e ψ , não identicamente nulos, tais que

$$D(\phi\mathbf{u}) = \psi\mathbf{u} . \tag{1.29}$$

Uma SPO associada a uma funcional semiclássica diz-se uma SPO semiclássica.

Note-se que a definição anterior implica que $\text{gr } \psi \geq 1$.

Uma quantidade importante no estudo de uma funcional semiclássica \mathbf{u} é a classe de \mathbf{u} , que é definida como sendo o número inteiro não negativo

$$s := \min_{(\phi, \psi) \in \mathcal{A}} \max \{ \text{gr } \phi - 2, \text{gr } \psi - 1 \} ,$$

onde \mathcal{A} é o conjunto de todos os pares de polinómios (ϕ, ψ) , com $\text{gr } \psi \geq 1$ satisfazendo a equação (distribucional) (1.29). Também se diz que uma SPO semiclássica tem classe s quando a classe da correspondente funcional é s .

Quando $s = 0$, \mathbf{u} diz-se funcional clássica e a correspondente SPO diz-se SPO clássica. É bem conhecido (cf. e.g. [48]) que, a menos de uma transformação afim das variáveis, se obtêm os polinómios de Hermite, $(H_n)_n$, no caso $\phi \equiv \text{const.}$; os polinómios de Laguerre, $(L_n^{(\alpha)})_n$, no caso $\text{gr } \phi = 1$; os polinómios de Jacobi, $(P_n^{(\alpha, \beta)})_n$, no caso $\text{gr } \phi = 2$ e ϕ com dois zeros distintos; e os polinómios de Bessel, $(B_n^{(\alpha)})_n$, no caso $\text{gr } \phi = 2$ e ϕ com um zero duplo. Além disso podem tomar-se para ϕ e ψ as formas canónicas indicadas na Tabela 1.1.

P_n	ϕ	ψ	Restrições
H_n	1	$-2x$	—
$L_n^{(\alpha)}$	x	$-x + \alpha + 1$	$\alpha \neq -n, n \geq 1$
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	$1 - x^2$	$-(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$	$\alpha \neq -n, \beta \neq -n, \alpha + \beta + 1 \neq -n, n \geq 1$
$B_n^{(\alpha)}$	x^2	$(\alpha + 2)x + 2$	$\alpha \neq -n, n \geq 2$

Tabela 1.1: Classificação das SPO's clássicas

Em geral, provar a regularidade de uma dada funcional linear em \mathcal{P}' pode ser uma tarefa difícil. No entanto, para as funcionais lineares clássicas é conhecido o seguinte critério [55]: dada uma funcional não nula $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$, então \mathbf{u} é clássica se e só se existem dois polinómios não nulos $\phi \in \mathcal{P}_2$ e $\psi \in \mathcal{P}_1$ que satisfazem a equação diferencial distribucional (1.29) e as condições

$$\psi'_{n/2} \neq 0, \quad \phi\left(-\frac{\psi_n(0)}{\psi'_n}\right) \neq 0 \quad \text{para todo o } n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $\psi_\nu(x) := \psi(x) + \nu\phi'(x)$ para todo o número real ν .

Observação 1.20. *Por vezes, na literatura, impõe-se na definição de funcional semiclássica que o par (ϕ, ψ) satisfaça (1.29) e que além disso seja um par admissível, no sentido de se verificar a condição*

$$na + p \neq 0 \quad \text{para todo o } n = 0, 1, 2, \dots$$

onde a e p são os coeficientes principais de ϕ e ψ (resp.). J. C. Medem [71] encontrou uma funcional regular \mathbf{u} e um par de polinómios não-admissível (ϕ, ψ) satisfazendo (1.29). Por esta razão omitimos a condição de admissibilidade na definição de funcional semiclássica. Notemos, no entanto, que esta condição é sempre verificada para funcionais clássicas [62], uma vez que neste caso é equivalente à condição $\psi'_{n/2} \neq 0$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.

Se $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$ é uma funcional semiclássica, então satisfaz a equação (1.29) para algum par de polinómios (ϕ, ψ) , com $\text{gr } \psi \geq 1$. Para tal par (ϕ, ψ) , o número $\tilde{s} := \max\{\text{gr } \phi - 2, \text{gr } \psi - 1\}$ não é necessariamente a classe de \mathbf{u} (nestas condições apenas se pode afirmar que \mathbf{u} é de classe quando muito \tilde{s}). No entanto, uma vez encontrado um par (ϕ, ψ) satisfendo (1.29), a classe de \mathbf{u} pode ser determinada através de um algoritmo que é construído com base na seguinte propriedade [61]: Se \mathbf{u} é uma funcional semiclássica que satisfaz (1.29) para um certo par (ϕ, ψ) , então a classe de \mathbf{u} é $\max\{\text{gr } \phi - 2, \text{gr } \psi - 1\}$ se e só se

$$\prod_{c \in \mathcal{Z}_\phi} (|\psi(c) - \phi'(c)| + |\langle \mathbf{u}, \theta_c \psi - \theta_c^2 \phi \rangle|) > 0, \quad (1.30)$$

onde $\mathcal{Z}_\phi := \{c \in \mathbb{C} : \phi(c) = 0\}$ e

$$\theta_c q(x) := \frac{q(x) - q(c)}{x - c}, \quad q \in \mathcal{P}. \quad (1.31)$$

O algoritmo que permite determinar a classe de uma dada funcional semiclássica, dado um par (ϕ, ψ) que verifica (1.29), pode ser descrito como se segue. Se o

par (ϕ, ψ) satisfaz (1.30), então a classe de \mathbf{u} é $\max\{\text{gr } \phi - 2, \text{gr } \psi - 1\}$. Se não, escolhemos um zero d de ϕ tal que

$$\psi(d) - \phi'(d) = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{u}, \theta_d \psi - \theta_d^2 \phi \rangle = 0 \quad (1.32)$$

e defina-se $\tilde{\phi} := \theta_d \phi$ e $\tilde{\psi} := \theta_d \psi - \theta_d^2 \phi$. Então \mathbf{u} satisfaz $D(\tilde{\phi}\mathbf{u}) = \tilde{\psi}\mathbf{u}$ e $\tilde{s} := \max\{\text{gr } \tilde{\phi} - 2, \text{gr } \tilde{\psi} - 1\} < \max\{\text{gr } \phi - 2, \text{gr } \psi - 1\}$. Assim, se se verificar (1.30) para os polinómios $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$, então \tilde{s} é a classe de \mathbf{u} . Se não, escolhemos um zero e de $\tilde{\phi}$ tal que (1.32) se verifica para estes polinómios $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ (com d substituído por e) e procede-se sucessivamente como anteriormente.

Para concluir esta secção, observamos que as funcionais semiclássicas podem ser caracterizadas de diferentes formas (veja-se e.g. [61]). Uma das caracterizações mais importantes destas funcionais envolve a série formal de Stieltjes $S_{\mathbf{u}}(z)$ associada, definida por (1.5). De facto, uma funcional regular $\mathbf{u} \in \mathcal{P}'$ é semiclássica se e só se existem polinómios ϕ , C e D tais que $S_{\mathbf{u}}$ é a solução (formal) da equação diferencial linear de primeira ordem não homogénea

$$\phi(z)S'_{\mathbf{u}}(z) = C(z)S_{\mathbf{u}}(z) + D(z). \quad (1.33)$$

Além disso, se ϕ , C e D são polinómios primos entre si, então a classe de \mathbf{u} é dada por

$$s = \max\{\text{gr } C - 1, \text{gr } D\}.$$

Observação 1.21. *A menos de factores comuns, o polinómio ϕ que figura em (1.33) é o mesmo que aparece em (1.29), e os polinómios C e D podem obter-se através das relações*

$$C(z) = \psi(z) - \phi'(z), \quad D(z) = (\mathbf{u}\theta_0\psi)(z) - (\mathbf{u}\theta_0\phi)'(z).$$

Capítulo 2

SPO's com derivadas linearmente relacionadas

2.1 Introdução

Nas últimas duas décadas, os chamados polinómios ortogonais de Sobolev foram objecto de elevado interesse. Trata-se de sucessões de polinómios ortogonais a respeito de produtos internos do tipo

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\nu=0}^N \int_{\mathbb{R}} f^{(\nu)} g^{(\nu)} d\mu_{\nu} ,$$

onde μ_0, \dots, μ_N são medidas de Borel positivas com suportes infinitos contidos num intervalo de \mathbb{R} e cujos momentos de todas as ordens são finitos, i.e., $\int_{\mathbb{R}} |x|^s d\mu_{\nu} < \infty$ para $s = 0, 1, 2, \dots$ e $\nu = 0, 1, \dots, N$. Este tipo de ortogonalidade tem sido objecto de intenso estudo, quer do ponto de vista algébrico, quer do ponto de vista analítico, especialmente após um importante trabalho de A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Nørsett, e J. M. Sanz-Serna [35], no qual se introduziu a noção de *par coerente* de medidas (conceito associado ao produto interno de Sobolev anterior no caso especial $N = 1$). Uma generalização desta noção será o assunto central do capítulo seguinte. Este estudo pode ser motivado por problemas inversos da Teoria dos Polinómios Ortogonais descritos por relações de estrutura algébricas diferenciais ligando as SPO's associadas às medidas que aparecem na definição do produto interno de Sobolev. Neste capítulo analisa-se um destes problemas inversos. O problema é o seguinte:

(P1) Sejam $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ duas SPOM's cujas derivadas de ordem m e k (resp.) satisfazem a relação algébrica

$$\sum_{i=0}^N r_{i,n} \dot{P}_{n-i+m}^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^M s_{i,n} \dot{Q}_{n-i+k}^{(k)}(x)$$

para todo o $n \geq \max\{M, N\}$, onde M e N são números inteiros não negativos, e $r_{i,n}$ e $s_{i,n}$ são números complexos, com a convenção $r_{i,n} = s_{i,n} = 0$ se $n < i$. Caracterizar as funcionais lineares (regulares) \mathbf{u} e \mathbf{v} correspondentes (resp.) às sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$.

Adoptou-se a notação $\dot{P}^{(m)}$ para representar a derivada de ordem m de um polinómio P , para evitar eventuais confusões de notação, por termos reservado a notação $P^{(m)}$ para designar polinómios associados de uma dada SPO.

Neste capítulo apresenta-se a solução para o problema (P1), remetendo-se para o capítulo 3 uma ligação com a ortogonalidade de Sobolev.

Vários trabalhos poderiam aqui ser referidos como motivação para o estudo do problema (P1), referências que serão oportunamente feitas no âmbito do estudo a realizar no capítulo 3. Em especial, o estudo deste problema foi fortemente motivado pelo desejo de generalizar resultados estabelecidos por M. Alfaro, F. Marcellán, A. Pena, e M.L. Rezola [1, 2] —onde se analisaram SPO's satisfazendo uma relação algébrica do tipo acima no caso especial em que $k = m = 0$ e $M = N = 1$, incluindo a análise do correspondente problema directo e a discussão em torno da questão da regularidade—, bem como os resultados apresentados por J. Petronilho em [79].

Referira-se, ainda, que problemas inversos semelhantes a (P1), descritos por relações de estrutura envolvendo duas SPO's e suas derivadas, têm atraído a atenção de vários autores, quer sob o ponto de vista algébrico, quer sob o ponto de vista analítico. Exemplos importantes apareceram nos trabalhos [11, 12] onde, em especial, S. Bonan, D. Lubinsky e P. Nevai caracterizaram as medidas de Borel positivas associadas às SPO's $(P_n)_n$ e $(R_n)_n$ tais que existem números inteiros não negativos s e t , e um polinómio ϕ de grau t , tais que

$$\phi(x)R'_{n+1}(x) = \sum_{i=n-s}^{n+t} \lambda_{n,i} P_i(x), \quad n \geq s$$

onde os $\lambda_{n,i}$'s são números reais tais que $\lambda_{n,n-i} \neq 0$ para $n \geq s$, com a convenção $\lambda_{n,i} = 0$ se $i < 0$. O resultado principal provado em [12] estabelece que as medidas de ortogonalidade envolvidas estão relacionadas por uma modificação racional a menos de uma medida discreta com suporte finito (propriedade

analítica). Do ponto de vista algébrico, em [47] F. Marcellán, A. Branquinho e J. Petronilho provaram que ambas as sucessões $(P_n)_n$ e $(R_n)_n$ são, necessariamente, SPO's semiclássicas.

2.2 Solução do Problema (P1)

No que se segue, utiliza-se a notação

$$P_n^{[m]}(x) := \frac{\dot{P}_{n+m}^{(m)}(x)}{(n+1)_m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots),$$

onde $(a)_n$ denota o símbolo de Pochhammer: para $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(a)_0 := 1 \quad \text{e} \quad (a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+n-1),$$

onde Γ designa a função Gamma. Note-se que $P_n^{[m]}(x)$ é um polinómio mónico de grau n na variável x . Se $n < 0$ convencionam-se $P_n^{[m]}(x) := 0$.

Teorema 2.1. *Sejam $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ duas SPOM's e suponha-se que existem dois números inteiros não negativos N e M , e números complexos $r_{i,n}$ e $s_{j,n}$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$; $n = 0, 1, \dots$), com a convenção $r_{i,n} = 0$ se $n < i$ e $s_{j,n} = 0$ se $n < j$, tais que*

$$P_n^{[m]}(x) + \sum_{i=1}^N r_{i,n} P_{n-i}^{[m]}(x) = Q_n^{[k]}(x) + \sum_{j=1}^M s_{j,n} Q_{n-j}^{[k]}(x) \quad (2.1)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Sem perda de generalidade, considere-se $0 \leq m \leq k$.

Designa-se $A_{N+M} := [a_{i,j}]_{i,j=1}^{N+M}$ a matriz de ordem $N+M$ definida por

$$a_{i,j} = \begin{cases} r_{j-i,j-1}, & \text{se } 1 \leq i \leq M \wedge i \leq j \leq N+i \\ s_{j-i+M,j-1}, & \text{se } M+1 \leq i \leq M+N \wedge i-M \leq j \leq i \\ 0, & \text{nos restantes casos} \end{cases} \quad (2.2)$$

e a convenção $r_{0,\kappa} = s_{0,\nu} = 1$ ($\kappa = 0, \dots, M-1$; $\nu = 0, \dots, N-1$). Assuma-se ainda que se verificam as seguintes condições

$$r_{N,M+N+i} s_{M,M+N+i} \neq 0 \quad (i = 0, 1), \quad \det A_{N+M} \neq 0.$$

Nestas condições, existem polinómios Φ_{M+m+i} e Ψ_{N+k+i} , de graus $M+m+i$ e $N+k+i$ (resp.), tais que

$$D^{k-m}(\Phi_{M+m+i}\mathbf{u}) = \Psi_{N+k+i}\mathbf{v}, \quad i = 0, 1, \quad (2.3)$$

onde \mathbf{u} e \mathbf{v} designam as funcionais regulares em \mathcal{P}' a respeito das quais $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são ortogonais (resp.).

Demonstração. Sejam $(\mathbf{a}_n)_n$ e $(\mathbf{b}_n)_n$ as bases duais associadas à SPO's $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$, respectivamente. De acordo com (1.22), podemos escrever

$$\mathbf{a}_n = \frac{P_n}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle} \mathbf{u}, \quad \mathbf{b}_n = \frac{Q_n}{\langle \mathbf{v}, Q_n^2 \rangle} \mathbf{v} \quad (2.4)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Tendo em conta (2.1), defina-se o polinómio

$$R_n(x) := \sum_{i=0}^N r_{i,n} P_{n-i}^{[m]}(x) = \sum_{i=0}^M s_{i,n} Q_{n-i}^{[k]}(x), \quad (2.5)$$

com a convenção $r_{0,n} = s_{0,n} = 1$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Note-se que R_n tem grau n para todo o n . Sejam $(\mathbf{c}_n)_n$, $(\mathbf{e}_n)_n$ e $(\mathbf{d}_n)_n$ as bases duais associadas à sucessões polinomiais $(Q_n^{[k]})_n$, $(P_n^{[m]})_n$ e $(R_n)_n$, respectivamente. Então

$$\mathbf{e}_n = \sum_{j \geq 0} \lambda_{n,j} \mathbf{d}_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

onde, de acordo com (2.5),

$$\lambda_{n,j} = \langle \mathbf{e}_n, R_j \rangle = \sum_{i=0}^N r_{i,j} \langle \mathbf{e}_n, P_{j-i}^{[m]}(x) \rangle = \begin{cases} r_{j-n,j}, & \text{se } n \leq j \leq n+N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, (2.6) reduz-se a

$$\mathbf{e}_n = \sum_{j=n}^{n+N} r_{j-n,j} \mathbf{d}_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.7)$$

De modo análogo se mostra que

$$\mathbf{c}_n = \sum_{j=n}^{n+M} s_{j-n,j} \mathbf{d}_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.8)$$

Agora, considerando as equações (2.7) para $n = 0, 1, \dots, M-1$ e (2.8) para $n = 0, 1, \dots, N-1$, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares

$$A_{M+N} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{M-1} \\ \mathbf{d}_M \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{M+N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{M-1} \\ \mathbf{c}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde $A_{M+N} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{N+M}$, com a_{ij} definido em (2.2). Como $\det(A_{M+N}) \neq 0$, resolvendo (2.9) a respeito de \mathbf{d}_i obtém-se

$$\mathbf{d}_i = \ell_{i,0}\mathbf{e}_0 + \cdots + \ell_{i,M-1}\mathbf{e}_{M-1} + \ell_{i,M}\mathbf{c}_0 + \cdots + \ell_{i,M+N-1}\mathbf{c}_{N-1} \quad (2.10)$$

para $i = 0, 1, \dots, M+N-1$, onde $\ell_{i,j}$ ($j = 0, 1, \dots, M+N-1$) são constantes.

Considere-se agora o sistema formado pelas duas equações que se obtém de (2.7) para $n = M$ e de (2.8) para $n = N$. Multiplicando a primeira destas duas equações por $s_{M,M+N}$ e a segunda por $r_{N,M+N}$, e subtraindo em seguida as equações resultantes, obtém-se

$$s_{M,M+N}\mathbf{e}_M - r_{N,N+M}\mathbf{c}_N = \ell_1\mathbf{d}_K + \cdots + \ell_{M+N-K}\mathbf{d}_{N+M-1}, \quad (2.11)$$

onde $K := \min\{N, M\}$ e $\ell_1, \dots, \ell_{M+N-K}$ são constantes. Então, substituindo $\mathbf{d}_K, \dots, \mathbf{d}_{N+M-1}$ dado por (2.10) no segundo membro de (2.11), obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha_0\mathbf{e}_0 + \cdots + \alpha_{M-1}\mathbf{e}_{M-1} + s_{M,M+N}\mathbf{e}_M \\ = \beta_0\mathbf{c}_0 + \cdots + \beta_{N-1}\mathbf{c}_{N-1} + r_{N,N+M}\mathbf{c}_N, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}, \beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ são constantes. Tomando a derivada de ordem k em ambos os membros de (2.12), tendo em conta as relações

$$D^k\mathbf{c}_n = (-1)^k(n+1)_k\mathbf{b}_{n+k}, \quad (2.13)$$

$$D^m\mathbf{e}_n = (-1)^m(n+1)_m\mathbf{a}_{n+m}, \quad (2.14)$$

e uma vez que se assume que $m \leq k$, de (2.4) obtém-se

$$D^{k-m}(\Phi_{M+m}\mathbf{u}) = \Psi_{N+k}\mathbf{v}, \quad (2.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_{M+m}(x) &:= (-1)^m \frac{(M+1)_m s_{M,N+M}}{\langle \mathbf{u}, P_{M+m}^2 \rangle} x^{M+m} + \pi_{M+m-1}(x), \\ \Psi_{N+k}(x) &:= (-1)^k \frac{(N+1)_k r_{N,N+M}}{\langle \mathbf{v}, Q_{N+k}^2 \rangle} x^{N+k} + \tilde{\pi}_{N+k-1}(x), \end{aligned}$$

com $\pi_{M+m-1} \in \mathcal{P}_{M+m-1}$ e $\tilde{\pi}_{N+k-1} \in \mathcal{P}_{N+k-1}$. É claro que Φ_{M+m} e Ψ_{N+k} são polinómios de graus $M+m$ e $N+k$, respectivamente.

Agora, considere-se um novo sistema com duas equações, uma das quais é (2.7) para $n = M+1$ e a outra é (2.8) para $n = N+1$. Multiplicando a primeira destas equações por $s_{M,M+N+1}$ e a segunda por $r_{N,M+N+1}$ e subtraindo em seguida as equações resultantes, deduz-se

$$s_{M,M+N+1}\mathbf{e}_{M+1} - r_{N,N+M+1}\mathbf{c}_{N+1} = \tilde{\ell}_1\mathbf{d}_{K+1} + \cdots + \tilde{\ell}_{M+N-K}\mathbf{d}_{N+M}, \quad (2.16)$$

onde $\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_{M+N-K}$ são constantes. Mas, de (2.7) com $n = M$ podemos escrever

$$\mathbf{d}_{N+M} = \frac{1}{r_{N,N+M}} \left(\mathbf{e}_M - \sum_{j=M}^{M+N-1} r_{j-M,j} \mathbf{d}_j \right),$$

logo o segundo membro de (2.16) pode exprimir-se como uma combinação linear das funcionais $\mathbf{d}_K, \dots, \mathbf{d}_{N+M-1}$. Assim, usando (2.10), conclui-se que

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}_0 \mathbf{e}_0 + \dots + \tilde{\alpha}_{M-1} \mathbf{e}_{M-1} + s_{M,M+N+1} \mathbf{e}_{M+1} \\ & = \tilde{\beta}_0 \mathbf{c}_0 + \dots + \tilde{\beta}_{N-1} \mathbf{c}_{N-1} + r_{N,N+M+1} \mathbf{c}_{N+1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_{M-1}, \tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_{N-1}$ são constantes. Finalmente, tomando a derivada de ordem k em ambos os membros de (2.17) e tendo em conta (2.13), (2.14) e (2.4), deduz-se

$$D^{k-m} (\Phi_{M+m+1} \mathbf{u}) = \Psi_{N+k+1} \mathbf{v}, \quad (2.18)$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_{M+m+1}(x) & := (-1)^m \frac{(M+2)_m s_{M,M+N+1}}{\langle \mathbf{u}, P_{M+m+1}^2 \rangle} x^{M+m+1} + \pi_{M+m}(x), \\ \Psi_{N+k+1}(x) & := (-1)^k \frac{(N+2)_k r_{N,N+M+1}}{\langle \mathbf{v}, Q_{N+k+1}^2 \rangle} x^{N+k+1} + \tilde{\pi}_{N+k}(x), \end{aligned}$$

onde $\pi_{M+m} \in \mathcal{P}_{M+m}$ e $\tilde{\pi}_{N+k} \in \mathcal{P}_{N+k}$. □

Observação 2.2. *Considerando $k = m = 0$ no Teorema 2.1 obtém-se o resultado principal estabelecido por J. Petronilho em [79]: \mathbf{u} e \mathbf{v} estão relacionadas por uma modificação racional:*

$$\Phi_M \mathbf{u} = \Psi_N \mathbf{v}.$$

2.3 Relação entre as séries formais de Stieltjes

A fim de explorar o significado da equação diferencial distribucional (2.3) ligando as funcionais lineares \mathbf{u} e \mathbf{v} dadas pelo Teorema 2.1, é útil obter informação a respeito dos momentos destas funcionais. Isto traduz-se por estabelecer a relação entre as correspondentes séries formais de Stieltjes,

$$S_{\mathbf{u}}(z) := - \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{z^{n+1}}, \quad S_{\mathbf{v}}(z) := - \sum_{n \geq 0} \frac{v_n}{z^{n+1}},$$

onde $u_n := \langle \mathbf{u}, x^n \rangle$ e $v_n := \langle \mathbf{v}, x^n \rangle$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. A derivada (formal) de ordem j de $S_{\mathbf{u}}(z)$ é dada por

$$S_{\mathbf{u}}^{(j)}(z) := (-1)^{j+1} \sum_{n \geq 0} (n+1)_j \frac{u_n}{z^{n+1+j}}. \quad (2.19)$$

Notemos que dado $\phi \in \mathcal{P}$, $\theta_0 \phi$ é definido por (1.3) com $c = 0$, o que implica, tendo em conta (1.4), que $\mathbf{u} \theta_0 \phi$ é o polinómio definido por

$$(\mathbf{u} \theta_0 \phi)(z) = \left\langle \mathbf{u}_\xi, \frac{z(\theta_0 \phi)(z) - \xi(\theta_0 \phi)(\xi)}{z - \xi} \right\rangle.$$

Teorema 2.3. *Nas condições do Teorema 2.1 verificam-se as igualdades*

$$\Psi_{N+k+i}(z) S_{\mathbf{v}}(z) - (\Phi_{M+m+i}(z) S_{\mathbf{u}}(z))^{(k-m)} = B(z; i), \quad i = 0, 1 \quad (2.20)$$

onde $B(\cdot; 0)$ e $B(\cdot; 1)$ são polinómios em z , dados explicitamente por

$$B(z; i) = (\mathbf{u} \theta_0 \Phi_{M+m+i})^{(k-m)}(z) - (\mathbf{v} \theta_0 \Psi_{N+k+i})(z), \quad i = 0, 1,$$

com $\text{gr } B(\cdot; i) \leq i - 1 - k + \max\{M + 2m, N + 2k\}$ para $i = 0, 1$.

Demonstração. Provaremos (2.20) para $i = 0$. O caso $i = 1$ demonstra-se de forma análoga. De (2.3) com $i = 0$ obtém-se

$$\langle D^{k-m}(\Phi_{M+m} \mathbf{u}), x^n \rangle = \langle \Psi_{N+k} \mathbf{v}, x^n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pondo

$$\Phi_{M+m}(z) = \sum_{\nu=0}^{M+m} a_\nu z^\nu \quad \text{e} \quad \Psi_{N+k}(z) = \sum_{\nu=0}^{N+k} b_\nu z^\nu,$$

obtém-se a seguinte relação linear entre as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} :

$$(-1)^{k-m} \sum_{\nu=0}^{M+m} a_\nu (n-k+m+1)_{k-m} u_{n-k+m+\nu} = \sum_{\nu=0}^{N+k} b_\nu v_{n+\nu}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por z^{-n-1} e somando para $n = 0, 1, 2, \dots$, deduz-se

$$(-1)^{k-m} \sum_{\nu=0}^{M+m} a_\nu \sum_{n \geq 0} (n-k+m+1)_{k-m} \frac{u_{n-k+m+\nu}}{z^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{N+k} b_\nu \sum_{n \geq 0} \frac{v_{n+\nu}}{z^{n+1}}. \quad (2.21)$$

Mas,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{v_{n+\nu}}{z^{n+1}} = -z^\nu \left(S_{\mathbf{v}}(z) + \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{v_n}{z^{n+1}} \right), \quad \nu = 0, \dots, N+k \quad (2.22)$$

e, para $\nu = 0, \dots, M + m$, tem-se

$$\begin{aligned}
& z^{k-m-\nu} \sum_{n \geq 0} (n - k + m + 1)_{k-m} \frac{u_{n-k+m+\nu}}{z^{n+1}} \\
&= \sum_{n \geq 0} (n + 1)_{k-m} \frac{u_{n+\nu}}{z^{n+\nu+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k-m}{j} (-\nu)_{k-m-j} \sum_{n \geq 0} (n + \nu + 1)_j \frac{u_{n+\nu}}{z^{n+\nu+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k-m}{j} (-\nu)_{k-m-j} \left((-1)^{j+1} z^j S_{\mathbf{u}}^{(j)}(z) - \sum_{n=0}^{\nu-1} (n + 1)_j \frac{u_n}{z^{n+1}} \right), \tag{2.23}
\end{aligned}$$

sendo a segunda igualdade precedente justificada tomando $p = k - m$, $\alpha = -\nu$ e $\beta = n + \nu + 1$ na seguinte fórmula análoga à fórmula da binomial [7, pg.70]

$$(\alpha + \beta)_p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} (\alpha)_{p-j} (\beta)_j ,$$

a qual se verifica para todos os números complexos α e β e para todo o número inteiro não negativo p . Substituindo (2.22) e (2.23) em (2.21), e tendo em conta que, para um dado polinômio ϕ de grau p , digamos, $\phi(z) = \sum_{\nu=0}^p c_{\nu} z^{\nu}$, o polinômio $\mathbf{u}\theta_0\phi$ admite a representação explícita

$$(\mathbf{u}\theta_0\phi)(z) = \sum_{\nu=0}^{p-1} c_{\nu+1} \sum_{n=0}^{\nu} u_n z^{\nu-n} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \left(\sum_{n=\nu}^{p-1} c_{\nu+1} u_{n-\nu} \right) z^{\nu} ,$$

obtém-se o resultado desejado. \square

Teorema 2.4. *Nas condições do Teorema 2.3, se $k > m$ então*

$$\sum_{\nu=0}^{k-m} A_{\nu}(z) S_{\mathbf{u}}^{(\nu)}(z) = B(z) , \tag{2.24}$$

isto é, $S_{\mathbf{u}}(z)$ é a solução (formal) de uma equação diferencial ordinária não-homogênea de ordem $k - m$ com coeficientes polinomiais, dados por

$$\begin{aligned}
A_{\nu}(z) &:= \binom{k-m}{\nu} \left[\Psi_{N+k}(z) \Phi_{M+m+1}^{(k-m-\nu)}(z) - \Psi_{N+k+1}(z) \Phi_{M+m}^{(k-m-\nu)}(z) \right] , \\
B(z) &:= \Psi_{N+k+1}(z) B(z; 0) - \Psi_{N+k}(z) B(z; 1) ,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\text{gr } A_{\nu} &\leq N + M + 2m + 1 + \nu , \quad \nu = 0, \dots, k - m , \\
\text{gr } B &\leq N + \max\{M + 2m, N + 2k\} .
\end{aligned}$$

Demonstração. Considerem-se as duas equações resultantes de (2.20) para $i = 0$ e $i = 1$. Multiplicando ambos os membros da primeira destas equações por

$\Psi_{n+k+1}(z)$ e os da segunda por $\Psi_{n+k}(z)$, e subtraindo em seguida as equações resultantes, obtém-se

$$\Psi_{N+k}(z) (\Phi_{M+m+1} S_{\mathbf{u}})^{(k-m)}(z) - \Psi_{N+k+1}(z) (\Phi_{M+m} S_{\mathbf{u}})^{(k-m)}(z) = B(z),$$

o que prova (2.24), tendo em conta a regra de Leibniz para a derivada de um produto. \square

Observação 2.5. *Resolvendo (formalmente) a equação diferencial (2.24) obtém-se $S_{\mathbf{u}}(z)$. Logo utilizando a equação (2.20) também se obtém $S_{\mathbf{v}}(z)$.*

2.4 O caso $k = m + 1$

Carácter Semiclássico

O caso em que $k = m + 1$ no Teorema 2.1 é particularmente interessante, uma vez que nesta situação ambas as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} são funcionais lineares semiclássicas. Note-se que se $k = m + 1$ então o Teorema 2.4 mostra que $S_{\mathbf{u}}$ satisfaz uma equação diferencial ordinária do tipo (1.33), o que permite concluir imediatamente que \mathbf{u} é uma funcional semiclássica. Nas proposições seguintes mostra-se que \mathbf{v} é também uma funcional semiclássica e, além disso, cada uma das funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} é uma modificação racional uma da outra.

Teorema 2.6. *Nas condições do Teorema 2.1, se $k = m + 1$ e $(P_n)_n \equiv (Q_n)_n$, então \mathbf{u} e \mathbf{v} diferem por um factor constante (não nulo) e*

$$D(\Phi_{M+m} \mathbf{u}) = \Psi_{N+m+1} \mathbf{u},$$

isto é, \mathbf{u} é semiclássica de classe quando muito $\max\{M + m - 2, N + m\}$.

Observação 2.7. *O caso especial $m = 0$, $N = 0$ e $M = 2$ no Teorema 2.6, dá uma conhecida caracterização para os polinómios ortogonais clássicos, que estabelece que as SPO's clássicas são as únicas SPO's tais que cada polinómio é uma combinação linear de derivadas de três polinómios consecutivos da mesma família (ver e.g.[48]).*

Quando $(P_n)_n \not\equiv (Q_n)_n$ verifica-se o seguinte Teorema:

Teorema 2.8. *Nas condições do Teorema 2.1, suponha-se que $k = m + 1$. Então \mathbf{u} e \mathbf{v} são funcionais semiclássicas de classes quando muito $N + M + 2m$*

e $N+3M+4m$ (resp.), as quais estão relacionadas por uma modificação racional. Mais precisamente, verificam-se as relações

$$\Lambda \mathbf{u} = \Phi \mathbf{v} , \quad (2.25)$$

$$D(\Phi \mathbf{u}) = \Psi \mathbf{u} , \quad (2.26)$$

$$D(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) = \tilde{\Psi} \mathbf{v} , \quad (2.27)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \Phi_{M+m} \Phi'_{M+1+m} - \Phi_{M+1+m} \Phi'_{M+m} \in \mathcal{P}_{2(M+m)} , \\ \Phi &:= \Phi_{M+m} \Psi_{N+2+m} - \Phi_{M+1+m} \Psi_{N+1+m} \in \mathcal{P}_{N+M+2m+2} \\ \Psi &:= \Psi'_{N+2+m} \Phi_{M+m} - \Psi'_{N+1+m} \Phi_{M+1+m} \in \mathcal{P}_{N+M+2m+1} , \\ \tilde{\Phi} &:= \Lambda \Phi \in \mathcal{P}_{N+3M+4m+2} , \quad \tilde{\Psi} := 2\Lambda' \Phi + \Lambda(\Psi - \Phi') \in \mathcal{P}_{N+3M+4m+1} . \end{aligned}$$

Demonstração. Do Teorema 2.1 obtém-se

$$D(\Phi_{M+m} \mathbf{u}) = \Psi_{N+1+m} \mathbf{v} , \quad D(\Phi_{M+1+m} \mathbf{u}) = \Psi_{N+2+m} \mathbf{v} \quad (2.28)$$

donde se deduzem facilmente as igualdades (2.25) e (2.26). Para provar (2.27) note-se primeiramente que, atendendo a (2.25), é

$$D(\tilde{\Phi} \mathbf{v}) = D(\Lambda(\Phi \mathbf{v})) = \Lambda' \Phi \mathbf{v} + \Lambda D(\Lambda \mathbf{u}) .$$

Consequentemente, e tendo em conta que

$$\begin{aligned} D(\Lambda \mathbf{u}) &= D(\Phi'_{M+1+m}(\Phi_{M+m} \mathbf{u})) - D(\Phi'_{M+m}(\Phi_{M+1+m} \mathbf{u})) \\ &= \Phi''_{M+1+m} \Phi_{M+m} \mathbf{u} + \Phi'_{M+1+m} \Psi_{N+1+m} \mathbf{v} \\ &\quad - \Phi''_{M+m} \Phi_{M+1+m} \mathbf{u} - \Phi'_{M+m} \Psi_{N+2+m} \mathbf{v} \\ &= \Lambda' \mathbf{u} + (\Psi - \Phi') \mathbf{v} , \end{aligned}$$

obtém-se o resultado pretendido. \square

Observação 2.9. Permanece em aberto o problema de saber se as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} ainda são semiclássicas no caso em que $k > m + 1$.

Observação 2.10. Os números $N + M + 2m$ e $N + 3M + 4m$ que aparecem no Teorema 2.8 são limites superiores para a classe das funcionais semiclássicas \mathbf{u} e \mathbf{v} . Para famílias concretas de SPO's estes números podem não coincidir com a classe das funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} . Um exemplo que ilustra esta situação é apresentado abaixo.

Observação 2.11. *Se as funcionais regulares \mathbf{u} e \mathbf{v} que figuram no Teorema 2.8 forem definidas-positivas, existem duas medidas de Borel positivas $d\mu_1$ e $d\mu_2$, cujos suportes são conjuntos infinitos e com momentos de todas as ordens finitos, tais que \mathbf{u} e \mathbf{v} admitem as representações integrais*

$$\langle \mathbf{u}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\mu_1, \quad \langle \mathbf{v}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\mu_2, \quad f \in \mathcal{P}.$$

Nestas condições, assumido ainda que \mathbf{u} e \mathbf{v} são definidas-positivas e que todos os zeros do polinómio Λ são reais e distintos, digamos, $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$ ($\nu := \text{gr } \Lambda \geq 1$) e que estão todos fora do invólucro convexo do suporte de $d\mu_1$, pode mostrar-se (ver Apêndice A) que a equação (2.25) conduz à seguinte relação entre as medidas $d\mu_1$ e $d\mu_2$:

$$d\mu_1(x) = \left| \frac{\phi(x)}{\Lambda(x)} \right| d\mu_2(x) + \sum_{i=1}^{\text{gr } \Lambda} M_i \delta(x - x_i), \quad (2.29)$$

com

$$M_i := \frac{1}{\Lambda'(x_i)} \left\{ \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^{j-1} (x_i - x_k) u_{0,j} - \sum_{j=0}^{\text{gr } \phi - 1} \frac{v_j}{j!} (\theta_{x_i} \phi)^{(j)}(0) - \phi(x_i) F(x_i, d\mu_2) \right\}$$

onde $u_{0,j} := \left(\prod_{i=1}^{\text{gr } \Lambda - j} (x - x_{\text{gr } \Lambda - i + 1}) \mathbf{u} \right)_0$, $j = 1, \dots, \text{gr } \Lambda$. Aqui, θ_{x_i} é o operador definido como em (1.3) e $F(\cdot; d\mu_2)$ é a transformada de Stieltjes associada à medida $d\mu_2$, definida por (1.16). Naturalmente, se todos os zeros do polinómio Φ são reais e distintos, então uma equação análoga a (2.29) pode ser escrita expressando $d\mu_2$ em função de $d\mu_1$.

Um exemplo

Apresenta-se de seguida um exemplo ilustrativo que mostra que as provas dos Teoremas 2.1 e 2.8 são construtivas. Considerem-se duas SPOM's $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ e suponha-se que tais sucessões satisfazem a relação

$$P_n + r_n P_{n-1} = \frac{Q'_{n+1}}{n+1} + s_n \frac{Q'_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

onde $(r_n)_n$ e $(s_n)_n$ são sucessões de números reais tais que

$$r_1 = \frac{1}{6}, \quad r_2 = \frac{4}{15}, \quad r_3 = \frac{9}{28}, \quad s_1 = -\frac{1}{3}, \quad s_2 = -\frac{2}{5}, \quad s_3 = -\frac{3}{7},$$

sendo os primeiros cinco polinómios da família $(Q_n)_n$ dados por

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1, & Q_1(x) &= x, & Q_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}, \\ Q_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x, & Q_4(x) &= x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

Nestas condições, os Teoremas 2.1 e 2.8 permitem caracterizar completamente ambas as SPO $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$. Os detalhes dos cálculos a efectuar serão aqui omitidos e remetidos para o Apêndice B. Note-se, primeiramente, que a relação (2.30) corresponde a uma situação onde $k = 1$, $m = 0$ e $N = M = 1$. Da demonstração do Teorema 2.1 deduz-se (ver Apêndice B.1)

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= -\frac{8}{3}x + \frac{8}{3}, & \Psi_2(x) &= -6x^2 - 4x + 2, \\ \Phi_2(x) &= -\frac{225}{16}x^2 + \frac{225}{8}x - \frac{225}{16}, & \Psi_3(x) &= -\frac{675}{16}x^3 + \frac{675}{16}x, \end{aligned} \quad (2.31)$$

logo das relações (2.26) e (2.27) no Teorema 2.8 obtém-se

$$\begin{aligned} D((x^2 - 1)^2 \mathbf{u}) &= 6(x^2 - 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) \mathbf{u}, \\ D((x + 1)^2(x - 1)^4 \mathbf{v}) &= 6(x + 1)(x - 1)^3\left(x + \frac{1}{3}\right) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Assim, \mathbf{u} e \mathbf{v} são funcionais semiclássicas de classes quando muito 2 e 4 (resp.). Aplicando o algoritmo de redução da classe descrito na secção 1.5, deduz-se que \mathbf{u} e \mathbf{v} satisfazem as equações (ver Apêndice B.2)

$$D((1 - x^2)\mathbf{u}) = 2(1 - 2x)\mathbf{u}, \quad D((1 - x^2)\mathbf{v}) = -2x\mathbf{v}. \quad (2.33)$$

Consequentemente, \mathbf{u} e \mathbf{v} são funcionais clássicas, e decorre imediatamente por comparação com a Tabela 1.1 que $(P_n)_n$ é uma SPOM de polinómios de Jacobi e $(Q_n)_n$ a SPOM dos polinómios de Legendre:

$$P_n \equiv \widehat{P}_n^{(0,2)}, \quad Q_n \equiv \widehat{P}_n^{(0,0)} \equiv \widehat{L}_n.$$

A relação (2.30) entre os polinómios $\widehat{P}_n^{(0,2)}$ e \widehat{L}_n é conhecida, e pode obter-se como um caso especial da família $J_{1,2}$ considerada em [21, pg. 251].

Capítulo 3

Pares (M, N) –coerentes

3.1 Introdução

No capítulo 2 estabeleceram-se relações entre as funcionais (regulares) \mathbf{u} e \mathbf{v} , associadas a duas SPOM's, $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$, cujas derivadas de ordem m e k satisfazem uma relação de estrutura do tipo

$$\sum_{i=0}^N r_{i,n} \dot{P}_{n-i+m}^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^M s_{i,n} \dot{Q}_{n-i+k}^{(k)}(x) \quad (3.1)$$

para todo o número inteiro $n \geq \max\{M, N\}$, onde M e N são números inteiros não negativos e $r_{i,n}$ e $s_{i,n}$ são números complexos que satisfazem certas condições, com a convenção $r_{i,n} = s_{i,n} = 0$ se $n < i$ (cf. Teorema 2.1). A relação algébrica (3.1) aparece de modo natural relacionada com a teoria dos polinômios ortogonais de Sobolev, na situação em que as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} admitem representações integrais em termos de duas medidas de Borel positivas μ_1 e μ_2 (resp.), as quais permitem definir o produto interno de Sobolev

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{-\infty}^{+\infty} f g \, d\mu_2 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f' g' \, d\mu_1, \quad (3.2)$$

onde se assume $\lambda > 0$ e que μ_1 e μ_2 têm suporte contido num intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

O estudo de SPO's a respeito de produtos internos de Sobolev começou em 1947 com um artigo pioneiro de D. C. Lewis [44] relacionado com o estudo de um problema de aproximação dos mínimos quadrados a respeito de um produto interno que pode ser visto como um caso especial de um produto interno de Sobolev. Em 1962 P. Althammer [5] publicou um trabalho que é apontado como o primeiro trabalho exclusivamente centrado neste tipo de ortogonalidade,

considerando explicitamente um produto interno da forma (3.2), onde $d\mu_1 = d\mu_2 = \chi_{(-1,1)}dx$ (medida de Lebesgue suportada no intervalo $[-1, 1]$) e $\lambda \geq 0$, sendo os correspondentes polinômios ortogonais de Sobolev designados, hoje em dia, por polinômios ortogonais de Legendre-Sobolev. Após o trabalho de Althammer vários autores estudaram SPO's a respeito de produtos internos do tipo (3.2). Um problema que atraiu a atenção dos investigadores foi o de encontrar a melhor aproximação no sentido dos mínimos quadrados a respeito do produto interno (3.2), para funções $f \in W^{1,2}[I, d\mu_1, d\mu_2]$, onde

$$W^{1,2}[I, d\mu_1, d\mu_2] := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^2_{\mu_2}(I), f' \in L^2_{\mu_1}(I)\},$$

por funções polinomiais do espaço \mathcal{P}_n . E. A. Cohen [20] introduziu a designação “Sobolev space” neste domínio de investigação. A ortogonalidade de tipo Sobolev atraiu atenção considerável, especialmente após a publicação de dois trabalhos de A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Nørsett, e J. M. Sanz-Serna [34, 35], nos quais os autores se centram na análise dos coeficientes de Fourier-Sobolev de funções $f \in W^{1,2}[I, d\mu_1, d\mu_2]$ a respeito da SPOM de Sobolev associada, sob a hipótese de $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ ser um par coerente de medidas, num sentido introduzido em [35], e que se caracteriza por as SPOM's associadas a μ_1 e μ_2 satisfazerem uma relação de estrutura do tipo

$$P_n = \frac{Q'_{n+1}}{n+1} + s_n Q'_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $(s_n)_n$ é uma sucessão de números não nulos, ou seja, trata-se de uma situação em que $(N, M, m, k) = (0, 1, 0, 1)$ em (3.1). K. H. Kwon, J. H. Lee e F. Marcellán [42] estudaram os polinômios ortogonais de Sobolev associados a uma relação do tipo (3.1) com $(N, M, m, k) = (0, 2, 0, 1)$ e A. M. Delgado e F. Marcellán [21] estudaram o caso $(N, M, m, k) = (1, 1, 0, 1)$. O caso $m = 0, k = 1, N = 0$ e M arbitrário foi analisado por F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein e J. Moreno-Balcázar [51], dando origem ao conceito de k -coerência (designação introduzida em [51], embora, de acordo com a notação que aqui se adotou, se devesse, mais propriamente, escrever M -coerência).

Resumos históricos sobre a Teoria dos Polinômios Ortogonais de Sobolev podem ser encontrados, e.g., no artigo [68] de H. G. Meijer, na dissertação de doutoramento de J. Moreno-Balcázar [70] e, ainda, na introdução do artigo [25] de W. Gautschi e M. Zhang. Uma lista contendo um elevado número de referências bibliográficas sobre ortogonalidade de Sobolev foi compilada por F. Marcellán e A. Ronveaux [58].

3.2 Pares (M, N) –coerentes

Nesta secção introduz-se uma generalização da noção de coerência (introduzida em [35]) que abarca também a noção de k –coerência (introduzida em [51]).

Definição 3.1. *Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} duas funcionais regulares em \mathcal{P}' e designem $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ as correspondentes SPOM's (respectivamente). Sejam M e N dois números inteiros não negativos. Diz-se que (\mathbf{v}, \mathbf{u}) é um par (M, N) –coerente se existirem números reais $r_{1,n}, \dots, r_{N,n}$ e $s_{1,n}, \dots, s_{M,n}$, com $r_{N,n} \neq 0$ para $n \geq N$ e $s_{M,n} \neq 0$ para $n \geq M$, tais que*

$$P_n(x) + \sum_{i=1}^N r_{i,n} P_{n-i}(x) = \frac{Q'_{n+1}(x)}{n+1} + \sum_{j=1}^M s_{j,n} \frac{Q'_{n-j+1}(x)}{n-j+1} \quad (3.3)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, com a convenção

$$r_{i,n} = 0 \quad \text{para } n < i \leq N \quad \text{e} \quad s_{j,n} = 0 \quad \text{para } n < j \leq M. \quad (3.4)$$

Nestas condições, também se diz que $((Q_n)_n, (P_n)_n)$ é um par (M, N) –coerente.

Observação 3.2. *Em (3.3), adoptam-se as convenções $\frac{Q'_{n-j+1}(x)}{n-j+1} \equiv 0$ quando $n-j+1 \leq 0$ e $P_{n-i} \equiv 0$ quando $n-i < 0$.*

Observação 3.3. *No caso definido-positivo as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} que figuram na definição precedente admitem representações integrais caracterizadas por medidas de Borel positivas (com momentos de todas as ordens finitos e cujos suportes são conjuntos infinitos), digamos, $d\mu_1$ e $d\mu_2$ (resp.). Nestas condições, sendo (\mathbf{v}, \mathbf{u}) um par (M, N) –coerente, também se diz que $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ é um par (M, N) –coerente de medidas.*

Após o aparecimento da noção de coerência [35], surgiram várias generalizações deste conceito, as quais podem ser vistas como casos especiais da (M, N) –coerência. De facto, a coerência corresponde ao caso $N = 0$ e $M = 1$; o caso $N = 0$ e $M = 2$ foi estudado por M. G. de Bruin e H. G. Meijer [14] e por K. H. Kwon, J. H. Lee e F. Marcellán [42]; em [51] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein e J. Moreno-Balcázar consideraram o caso $N = 0$ e $M = k + 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), a já referida k –coerência, a qual se pode identificar, portanto, com a $(k + 1, 0)$ –coerência; também F. Marcellán e A. Delgado [21] realizaram um estudo detalhado do caso $M = N = 1$, determinando todos os pares $(1, 1)$ –coerentes, provando que pelo menos uma das funcionais regulares associadas a um par $(1, 1)$ –coerente é semiclássica de classe quando muito igual

a um, generalizado resultados de H. G. Meijer obtidos no contexto dos pares coerentes.

Uma outra generalização da noção de coerência foi introduzida por P. Maroni [63] (veja-se também [64]) e por R. Sfaxi e J. Alaya [88], que consideraram uma relação de estrutura algébrica do tipo

$$\phi(x)P_n(x) = \sum_{i=n-s}^{n+t} \lambda_{n,i} \frac{Q'_{i+1}(x)}{i+1}, \quad n \geq s \quad (3.5)$$

($s \geq 0$; $t := \text{gr } \phi$; $\lambda_{n,n-s} \neq 0$ para todo o $n \geq s$) e chamaram a um par de SPOM's $((P_n)_n, (Q_n)_n)$ satisfazendo (3.5) um par coerente associado a ϕ com índice s . Usando a RRTT a que satisfaz a SPO $(P_n)_n$ e expandindo $\phi(x)P_n(x)$ como uma combinação linear dos polinómios P_{n-t}, \dots, P_{n+t} , conclui-se que (3.5) se pode reescrever sob a forma (3.3), com $N = 2t$ e $M = t + s$. Deste modo, conclui-se que um par coerente associado a ϕ com índice s pode ser visto como um par (M, N) -coerente.

Uma questão importante neste contexto é a da classificação das SPOM's (ou das correspondentes funcionais regulares) que definem pares (M, N) -coerentes. No caso da coerência, H. G. Meijer [69] provou que se $((Q_n)_n, (P_n)_n)$ é um par coerente então ou $(P_n)_n$ ou $(Q_n)_n$ é uma SPOM clássica. Além disso [49, 50, 69]: se $((Q_n)_n, (P_n)_n)$ é um par coerente então ambas as sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são semiclássicas (sendo que uma destas é necessariamente clássica!). Esta propriedade é preservada no caso das famílias (M, N) -coerentes, i.e., se $((Q_n)_n, (P_n)_n)$ é um par (M, N) -coerente então ambas as sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são semiclássicas. Este facto é estabelecido no teorema seguinte e trata-se de uma consequência imediata do Teorema 2.8 no caso em que $m = 0$.

Teorema 3.4. *Se (\mathbf{v}, \mathbf{u}) é um par (M, N) -coerente então as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} são semiclássicas de classes quando muito $N+M$ e $N+3M$ (resp.), desde que a condição $r_{N,M+N} r_{N,M+N+1} s_{M,M+N} s_{M,M+N+1} \det(A_{N+M}) \neq 0$ se verifique, onde a matriz A_{N+M} é definida por (2.2), a partir dos coeficientes $r_{i,n}$ e $s_{j,n}$ que aparecem em (3.3). Além disso, cada uma das funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} é uma modificação racional da outra.*

Observação 3.5. *Quando $(M, N) = (0, 0)$ o Teorema 3.4 recupera um famoso resultado de W. Hahn [29] sobre uma caracterização das funcionais clássicas, e quando $(M, N) = (2, 0)$ obtém-se o Teorema 3.3 de [42]. Para $(M, N) = (1, 1)$ o teorema anterior permite recuperar resultados de [21].*

Em [69] Meijer deu a classificação completa dos pares de medidas coerentes (e simetricamente coerentes), descrevendo todos os pares possíveis. Em particular, quando o suporte das medidas $d\mu_1$ e $d\mu_2$ são conjuntos compactos, Meijer mostrou que pelo menos uma das medidas é de Jacobi. Com base na classificação de Meijer, em [51] construíram-se alguns exemplos não triviais de pares k -coerentes, incluindo pares coerentes em que ambas as medidas $d\mu_1$ e $d\mu_2$ têm suporte compacto, mas nem $d\mu_1$ nem $d\mu_2$ é a medida de Jacobi. Também, em [21] foram descritos os pares $(1, 1)$ -coerentes.

3.3 SPO's de Sobolev e pares (M, N) -coerentes

Nesta secção assume-se que $d\mu_1$ e $d\mu_2$ são duas medidas de Borel positivas com momentos de todas as ordens finitos e cujos suportes coincidem com um mesmo conjunto infinito de números reais. Deste modo, pode-se definir o seguinte produto interno de Sobolev no espaço \mathcal{P} (aqui, o conjunto de todos os polinómios de coeficientes reais)

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{-\infty}^{+\infty} f g d\mu_2 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f' g' d\mu_1, \quad (3.6)$$

onde se supõe $\lambda \geq 0$. Note-se que (3.6) se pode reescrever sob a forma

$$\langle f, g \rangle_S = \langle f, g \rangle_2 + \lambda \langle f', g' \rangle_1,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ são os produtos internos definidos por $d\mu_1$ e $d\mu_2$, i.e.,

$$\langle f, g \rangle_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f g d\mu_i, \quad i = 1, 2.$$

Designe $(S_n^\lambda)_n$ a sucessão dos polinómios mónicos de Sobolev, ortogonais a respeito do produto interno de Sobolev (3.6), obtida por aplicação do processo de Gram-Schmidt à base canónica de \mathcal{P} .

O próximo resultado generaliza para pares (M, N) -coerentes uma propriedade bem conhecida para pares coerentes e k -coerentes (cf. [35, 14, 42, 51]). A prova é uma adaptação da demonstração de [51, Prop. 1].

Teorema 3.6. *Seja $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ um par de medidas (M, N) -coerente, caracterizado pela relação de estrutura (3.3). Seja $K := \max\{M, N\}$. Então, existem números reais $t_{1,n}^\lambda, \dots, t_{K,n}^\lambda$ tais que*

$$Q_{n+1}(x) + \sum_{j=1}^M s_{j,n} \frac{n+1}{n-j+1} Q_{n-j+1}(x) = S_{n+1}^\lambda(x) + \sum_{j=1}^K t_{j,n}^\lambda S_{n-j+1}^\lambda(x) \quad (3.7)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, com

$$t_{j,n}^\lambda = 0 \quad \text{se } n < j \leq K. \quad (3.8)$$

Além disso, verifica-se o seguinte:

- (i) se $N \neq M$ então $t_{K,n}^\lambda \neq 0$ para todo o $n \geq K$;
- (ii) se $N = M (= K)$ então $t_{K,n}^\lambda \neq 0$ para todo o $n \geq K$ se e só se λ satisfaz

$$\lambda \neq -\frac{s_{K,n}}{r_{K,n}} \frac{\|Q_{n-K+1}\|_2^2}{(n-K+1)^2 \|P_{n-K}\|_1^2} \quad \text{para todo o } n \geq K. \quad (3.9)$$

Demonstração. É bem conhecido que os coeficientes de qualquer polinómio de Sobolev S_n^λ são funções racionais do parâmetro λ , onde o numerador e o denominador de cada uma destas funções racionais são polinómios (em λ) do mesmo grau. Assim, existe

$$R_n(x) := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_n^\lambda(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para cada n , R_n é um polinómio de grau n . Além disso [65]

$$\langle R_n, 1 \rangle_2 = 0, \quad n \geq 1, \quad (3.10)$$

$$\langle R'_{n+1}, x^m \rangle_1 = 0, \quad 0 \leq m \leq n-1, \quad n \geq 1. \quad (3.11)$$

De (3.11) obtém-se

$$R'_{n+1} = (n+1)P_n, \quad n \geq 1. \quad (3.12)$$

Assim, (3.3) pode reescrever-se na forma

$$\frac{R'_{n+1}}{n+1} + \sum_{i=1}^N r_{i,n} \frac{R'_{n-i+1}}{n-i+1} = \frac{Q'_{n+1}}{n+1} + \sum_{j=1}^M s_{j,n} \frac{Q'_{n-j+1}}{n-j+1}$$

para todo o $n \geq 0$. Primitivando ambos os membros desta igualdade e tendo em conta (3.10) deduz-se

$$\frac{R_{n+1}}{n+1} + \sum_{i=1}^N r_{i,n} \frac{R_{n-i+1}}{n-i+1} = \frac{Q_{n+1}}{n+1} + \sum_{j=1}^M s_{j,n} \frac{Q_{n-j+1}}{n-j+1} \quad (3.13)$$

para todo o $n \geq 0$. Expressando o primeiro membro da igualdade (3.13) na base $\{S_\nu^\lambda\}_{\nu=0}^{n+1}$, obtém-se

$$\frac{R_{n+1}}{n+1} + \sum_{i=1}^N r_{i,n} \frac{R_{n-i+1}}{n-i+1} = \frac{S_{n+1}^\lambda}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t_{k,n}^\lambda}{n+1} S_{n-k+1}^\lambda,$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde os números $t_{k,n}^\lambda$ ($k = 1, \dots, n+1$) são definidos por

$$\|S_{n-k+1}^\lambda\|_S^2 \frac{t_{k,n}^\lambda}{n+1} = \left\langle \frac{R_{n+1}}{n+1} + \sum_{i=1}^N r_{i,n} \frac{R_{n-i+1}}{n-i+1}, S_{n-k+1}^\lambda \right\rangle_S, \quad (3.14)$$

sendo $\|\cdot\|_S$ a norma associada ao produto interno de Sobolev (3.6). De (3.13) e (3.12) deduz-se

$$\begin{aligned} \|S_{n-k+1}^\lambda\|_S^2 \frac{t_{k,n}^\lambda}{n+1} &= \sum_{j=1}^M \frac{s_{j,n}}{n-j+1} \langle Q_{n-j+1}, S_{n-k+1}^\lambda \rangle_2 \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^N r_{i,n} \langle P_{n-i}, (S_{n-k+1}^\lambda)' \rangle_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

para todos os inteiros $n = 0, 1, 2, \dots$ e $k = 1, \dots, n+1$. Assim, fixado n , obtém-se $t_{k,n}^\lambda = 0$ para $k > K$, o que prova (3.7) para $n \geq 0$. Partindo da relação (3.14), a qual é válida para todo o $n \geq 0$, e atendendo a (3.10) e (3.12), conclui-se facilmente que as igualdades (3.8) se verificam. Finalmente, para $k = K := \max\{M, N\}$ obtém-se

$$\frac{t_{K,n}^\lambda}{n+1} = \begin{cases} \frac{s_{M,n}}{n-M+1} \frac{\|Q_{n-M+1}\|_2^2}{\|S_{n-M+1}^\lambda\|_S^2} & \text{se } N < M \\ \lambda r_{N,n} (n-N+1) \frac{\|P_{n-N}\|_1^2}{\|S_{n-N+1}^\lambda\|_S^2} & \text{se } N > M \\ \frac{s_{N,n} \|Q_{n-N+1}\|_2^2 + \lambda r_{N,n} (n-N+1)^2 \|P_{n-N}\|_1^2}{(n-N+1) \|S_{n-N+1}^\lambda\|_S^2} & \text{se } N = M, \end{cases} \quad (3.16)$$

o que permite concluir a veracidade das afirmações (i) e (ii). \square

Observação 3.7. Sendo $\lambda > 0$, a condição (3.9) é verificada desde que se cumpra a condição $s_{K,n} r_{K,n} > 0$ para todo o $n \geq K$.

3.4 Coeficientes de Fourier-Sobolev

Nesta secção analisamos a série de Fourier-Sobolev de uma função f pertencente a um espaço de funções apropriado, quando no produto interno de Sobolev (3.6) $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ é um par de medidas (M, N) -coerente. Os requisitos de base exigidos à função são $f \in L_{\mu_2}^2$ e $f' \in L_{\mu_1}^2$. A série de Fourier-Sobolev é

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{s_n} S_n^\lambda(x), \quad (3.17)$$

onde, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$f_n \equiv f_n(\lambda) := \langle f, S_n^\lambda \rangle_S, \quad s_n \equiv s_n(\lambda) := \langle S_n^\lambda, S_n^\lambda \rangle_S = \|S_n^\lambda\|_S^2. \quad (3.18)$$

Os números $c_n \equiv c_n(\lambda) := f_n/s_n$ são os coeficientes de Fourier-Sobolev de f a respeito da SPOM $(S_n^\lambda)_n$. Em [35], A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Nørsett e J. M. Sanz-Serna estabeleceram um algoritmo eficiente para o cálculo dos números f_n e s_n (logo, para a determinação dos coeficientes de Fourier-Sobolev) no caso em que $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ é um par de medidas coerente. Este algoritmo foi generalizado por K. H. Kwon, J. H. Lee e F. Marcellán [42] no caso de $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ ser um par de medidas $(2, 0)$ -coerente. No que se segue vamos estender estes algoritmos para o caso geral em que $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ é um par de medidas (M, N) -coerente. A construção do algoritmo baseia-se nas duas proposições seguintes, que mostram como determinar as sucessões $(f_n)_n$ e $(s_n)_n$ em (3.18). As provas destas proposições serão feitas com base na propriedade algébrica estabelecida no Teorema 3.6.

Teorema 3.8. *A sucessão $(f_n)_n$ definida por (3.18) satisfaz*

$$f_{n+1} + \sum_{j=1}^K t_{j,n}^\lambda f_{n-j+1} = u_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.19)$$

onde $u_n \equiv u_n^\lambda(f)$ é definido por

$$\begin{aligned} u_n := & \langle f, Q_{n+1} + \sum_{j=1}^M \frac{s_{j,n}(n+1)}{n-j+1} Q_{n-j+1} \rangle_2 \\ & + \lambda(n+1) \langle f', P_n + \sum_{i=1}^N r_{i,n} P_{n-i} \rangle_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Demonstração. Por um lado, pelo Teorema 3.6, tem-se

$$\langle f, S_{n+1}^\lambda \rangle_2 = \langle f, Q_{n+1} + \sum_{j=1}^M \frac{(n+1)s_{j,n}}{n-j+1} Q_{n-j+1} \rangle_2 - \sum_{j=1}^K t_{j,n} \langle f, S_{n-j+1}^\lambda \rangle_2 \quad (3.21)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, com a convenção (3.4), onde $t_{j,n} \equiv t_{j,n}^\lambda$. Por outro lado, por (3.3) e usando o Teorema 3.6, tem-se

$$(n+1) \left(P_n + \sum_{i=1}^N r_{i,n} P_{n-i} \right) = (S_{n+1}^\lambda)' + \sum_{j=1}^K t_{j,n} (S_{n-j+1}^\lambda)'$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, logo

$$\langle f', (S_{n+1}^\lambda)' \rangle_1 = (n+1) \langle f', P_n + \sum_{i=1}^N r_{i,n} P_{n-i} \rangle_1 - \sum_{j=1}^K t_{j,n} \langle f', (S_{n-j+1}^\lambda)' \rangle_1 \quad (3.22)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. De (3.21) e (3.22) obtém-se (3.19). \square

Note-se que (3.19) é uma equação de diferenças não-homogénea de ordem K . Assim, os f_n 's podem ser determinados recursivamente, desde que sejam conhecidos os $t_{j,n}$'s. Note-se também que os u_n 's são conhecidos, uma vez que são directamente calculados em termos da função dada, f , do parâmetro λ e da relação (3.3) na definição de (M, N) -coerência.

Em seguida, mostra-se que os s_n 's, conjuntamente com os $t_{j,n}^\lambda$'s, satisfazem um sistema de $K + 1$ equações de diferenças. Convencionou-se que

$$t_{0,n}^\lambda = 1 \quad \text{se } n \geq 0. \quad (3.23)$$

Teorema 3.9. *Verificam-se as seguintes relações*

$$s_{n-K+\ell+1} t_{K-\ell,n}^\lambda = c_{\ell,n} - \sum_{i=1}^{\ell} t_{i,n-K+\ell}^\lambda t_{K-\ell+i,n}^\lambda s_{n-K+\ell-i+1} \quad (3.24)$$

para $\ell = 0, 1, \dots, K$ e $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\begin{aligned} c_{\ell,n} &:= \sum_{i=K-\ell}^M \tilde{s}_{i,n} \tilde{s}_{i-K+\ell,n-K+\ell} \|Q_{n-i+1}\|_2^2 \\ &\quad + \lambda(n+1)(n-K+\ell+1) \sum_{i=K-\ell}^N r_{i,n} r_{i-K+\ell,n-K+\ell} \|P_{n-i}\|_1^2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

com $\tilde{s}_{i,n} := \frac{(n+1)s_{i,n}}{n-i+1}$.

Demonstração. Fazendo $k = K - \ell$ em (3.15) obtém-se

$$\begin{aligned} s_{n-K+\ell+1} t_{K-\ell,n}^\lambda &= \sum_{j=K-\ell}^M \tilde{s}_{j,n} \langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell+1}^\lambda \rangle_2 \\ &\quad + \lambda \sum_{j=K-\ell}^N (n+1) r_{j,n} \langle P_{n-j}, (S_{n-K+\ell+1}^\lambda)' \rangle_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

para $\ell = 0, 1, \dots, K$. Usando a definição (3.3) de (M, N) -coerência e o Teorema 3.6, deduz-se de (3.26), após alguns cálculos, que

$$\begin{aligned} &s_{n-K+\ell+1} t_{K-\ell,n}^\lambda \\ &= \sum_{j=K-\ell}^M \sum_{i=0}^M \tilde{s}_{j,n} \tilde{s}_{i,n-K+\ell} \langle Q_{n-j+1}, Q_{n-K+\ell-i+1} \rangle_2 \\ &\quad - \sum_{j=K-\ell}^M \sum_{i=1}^K \tilde{s}_{j,n} t_{i,n-K+\ell}^\lambda \langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell-i+1}^\lambda \rangle_2 \\ &\quad + \lambda(n+1)(n-K+\ell+1) \sum_{j=K-\ell}^N \sum_{i=0}^N r_{j,n} r_{i,n-K+\ell} \langle P_{n-j}, P_{n-K+\ell-i} \rangle_1 \\ &\quad - \lambda(n+1) \sum_{j=K-\ell}^N \sum_{i=1}^K r_{j,n} t_{i,n-K+\ell}^\lambda \langle P_{n-j}, (S_{n-K+\ell-i+1}^\lambda)' \rangle_1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

para todo o $\ell = 0, 1, \dots, K$. Usando a ortogonalidade, conclui-se que os primeiro e terceiro termos no membro direito da igualdade (3.27) são iguais a

$$\sum_{j=K-\ell}^M \tilde{s}_{j,n} \tilde{s}_{j-K+\ell, n-K+\ell} \|Q_{n-j+1}\|_2^2$$

e

$$\lambda(n+1)(n-K+\ell+1) \sum_{j=K-\ell}^N r_{j,n} r_{j-K+\ell, n-K+\ell} \|P_{n-j}\|_1^2$$

(respectivamente). Além disso, o segundo termo do membro à direita da igualdade (3.27) é igual a

$$\sum_{i=1}^{\ell} t_{i, n-K+\ell}^{\lambda} \sum_{j=K-\ell+i}^M \tilde{s}_{j,n} \langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell+1-i}^{\lambda} \rangle_2.$$

De facto, notando que $\langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell-i+1}^{\lambda} \rangle_2 = 0$ se $j < K - \ell + i$ ou se $i > M - K + \ell$ (para quaisquer $\ell \in \{0, \dots, K\}$, $i \in \{1, \dots, K\}$ e $j \in \{K - \ell, \dots, M\}$), o segundo termo do membro direito de (3.27) é igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{M-K+\ell} t_{i, n-K+\ell}^{\lambda} \sum_{j=K-\ell+i}^M \tilde{s}_{j,n} \langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell-i+1}^{\lambda} \rangle_2 \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} t_{i, n-K+\ell}^{\lambda} \sum_{j=K-\ell+i}^M \tilde{s}_{j,n} \langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell-i+1}^{\lambda} \rangle_2, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada pelo facto de ser

$$\sum_{i=M-K+\ell+1}^{\ell} t_{i, n-K+\ell}^{\lambda} \sum_{j=K-\ell+i}^M \tilde{s}_{j,n} \langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell-i+1}^{\lambda} \rangle_2 = 0,$$

(a igualdade pode ser verificada distinguindo os dois caso possíveis $K = M$ e $K = N$). De modo análogo se mostra que o quarto termo do membro direito de (3.27) é igual a

$$\sum_{i=1}^{\ell} t_{i, n-K+\ell}^{\lambda} \sum_{j=K-\ell+i}^N r_{j,n} \langle P_{n-j}, (S_{n-K+\ell+1-i}^{\lambda})' \rangle_1.$$

Assim, (3.27) pode reescrever-se na forma

$$\begin{aligned}
 & s_{n-K+\ell+1} t_{K-\ell,n}^\lambda \\
 &= \sum_{i=K-\ell}^M \tilde{s}_{i,n} \tilde{s}_{i-K+\ell,n-K+\ell} \|Q_{n-i+1}\|_2^2 \\
 & \quad + \lambda(n+1)(n-K+\ell+1) \sum_{i=K-\ell}^N r_{i,n} r_{i-K+\ell,n-K+\ell} \|P_{n-i}\|_1^2 \\
 & \quad - \sum_{i=1}^{\ell} t_{i,n-K+\ell}^\lambda \left(\sum_{j=K-\ell+i}^M \tilde{s}_{j,n} \langle Q_{n-j+1}, S_{n-K+\ell+1-i}^\lambda \rangle_2 \right. \\
 & \quad \left. + \lambda(n+1) \sum_{j=K-\ell+i}^N r_{j,n} \langle P_{n-j}, (S_{n-K+\ell+1-i}^\lambda)' \rangle_1 \right).
 \end{aligned}$$

Mas, de acordo com (3.26), a expressão entre parêntesis na última soma é igual a $t_{K-\ell+i,n}^\lambda s_{n-K+\ell-i+1}$, obtendo-se o resultado pretendido. \square

Efectuando a mudança de variável $\ell = K - j$ em (3.24) e, em seguida, mudando n em $n + j - 1$ na equação resultante, obtém-se

$$s_n t_{j,n+j-1} = c_{K-j,n+j-1} - \sum_{i=1}^{K-j} t_{i,n-1} t_{i+j,n-1+j} s_{n-i} \quad (3.28)$$

para $j = 0, 1, \dots, K$ e $n = 0, 1, 2, \dots$. As relações (3.28) são a base da construção do algoritmo que permite calcular todas as normas de Sobolev s_n 's bem como todos os coeficientes $t_{j,n}$'s da relação algébrica (3.7), para todo o $j = 0, 1, \dots, K$ e $n = 0, 1, 2, \dots$.

Algoritmo 3.10. *Os números f_n e s_n em (3.18) que conduzem à determinação dos coeficientes de Fourier-Sobolev em (3.17) podem ser calculados usando o seguinte algoritmo:*

- **Condições iniciais.**

$$t_{0,n} := 1, \quad t_{j,n} := 0 \text{ se } j > K \text{ ou } n < j \leq K \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

- **Passo 1.** *Usando as condições iniciais e fazendo $n = 1$ em (3.28), calculam-se s_1 e os elementos “diagonais” $t_{j,j}$ para $j = 1, \dots, K$. De facto, determina-se $s_1 t_{j,j} = c_{K-j,j}$ para $j = 0, 1, \dots, K$, tendo-se*

$$\begin{aligned}
 s_1 &= c_{K,0} = \|Q_1\|_2^2 + \lambda \|P_0\|_1^2, \\
 t_{j,j} &= c_{K-j,j} / s_1, \quad j = 1, 2, \dots, K.
 \end{aligned} \quad (3.29)$$

• **Passo 2.** Usando as condições iniciais, a informação obtida no passo 1 e tomando $n = 2$ em (3.28), calculam-se s_2 e $t_{j,j+1}$ para $j = 1, \dots, K$, obtendo-se

$$\begin{aligned} s_2 &= c_{K,1} - t_{1,1}^2 s_1, \\ t_{j,j+1} &= (c_{K-j,j+1} - t_{1,1} t_{j+1,j+1} s_1) / s_2, \quad j = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (3.30)$$

• **Passo 3.** Usando as condições iniciais, a informação obtida nos passos 1 e 2 e tomando $n = 3$ em (3.28), obtêm-se s_3 e $t_{j,j+2}$ para $j = 1, \dots, K$:

$$\begin{aligned} s_3 &= c_{K,2} - t_{1,2}^2 s_2 - t_{2,2}^2 s_1, \\ t_{j,j+2} &= (c_{K-j,j+2} - t_{1,2} t_{j+1,j+2} s_2 - t_{2,2} t_{j+2,j+2} s_1) / s_3, \quad j = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (3.31)$$

• $[\dots]$

• **Passo r .** Para qualquer número inteiro não negativo (fixo) r , usando a informação obtida até ao passo $r - 1$ e tomando $n = r$ em (3.28), obtêm-se s_r e $t_{j,j+r-1}$ para $j = 1, \dots, K$.

• **Passos finais.** Usando a informação obtida nos passos 1 a r obtêm-se s_n e $t_{j,j+n-1}$ para $j = 1, \dots, K$ e $n = 1, 2, \dots, r$. Uma vez que r pode ser arbitrário, então os parâmetros s_n e $t_{j,n}$ podem ser calculados para todo o $j = 1, \dots, K$ e $n = 1, 2, \dots$. Consequentemente, também os f_n 's podem ser calculados para todo o $n = 1, 2, \dots$, recursivamente, usando (3.19). Deste modo obtêm-se todos os coeficientes de Fourier-Sobolev em (3.17).

Observação 3.11. Decorre do algoritmo anterior que para determinar os coeficientes de Fourier-Sobolev em (3.17) não é necessário conhecer explicitamente os polinómios ortogonais de Sobolev S_n^λ . No contexto dos pares coerentes este facto foi observado por Iserles et. al. em [35].

Como consequência dos resultados precedentes é possível estabelecer cotas para a norma do polinómio de Sobolev de grau n , S_n^λ , em termos das normas dos polinómios P_n e Q_n .

Teorema 3.12. Seja $((Q_n), (P_n))$ um par (M, N) -coerente, satisfazendo (3.2), e suponha-se que $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são ortogonais a respeito das medidas de Borel positivas $d\mu_1$ e $d\mu_2$ que induzem os produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, respectivamente. Considere-se o correspondente produto interno de Sobolev (3.6) e seja $(S_n^\lambda)_n$ a SPOM de Sobolev associada. Definam-se

$$k_n := \|P_n\|_1^2, \quad k'_n := \|Q_n\|_2^2, \quad s_n := \|S_n^\lambda\|_S^2.$$

Nestas condições, pondo $\tilde{s}_{i,n} := (n+1)s_{i,n}/(n-i+1)$, tem-se:

(i) $(s_n)_n$ satisfaz uma equação de diferenças de ordem K

$$s_{n+1} + \sum_{j=1}^K t_{j,n}^2 s_{n+1-j} = c_n \quad (3.32)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$c_n := \sum_{i=0}^M \tilde{s}_{i,n}^2 \|Q_{n+1-i}\|_2^2 + \lambda(n+1)^2 \sum_{i=0}^N r_{i,n}^2 \|P_{n-i}\|_1^2 > 0.$$

(ii) s_n satisfaz as desigualdades

$$k'_n + \lambda n^2 k_{n-1} \leq s_n \leq \sum_{j=0}^M \tilde{s}_{j,n-1}^2 k'_{n-j} + \lambda n^2 \sum_{j=0}^N r_{j,n-1}^2 k_{n-1-j} \quad (3.33)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ (com $\tilde{s}_{0,n-1} = 1$ para todo o n).

Demonstração. (i) Tomando $\ell = K$ em (3.24) obtém-se (3.32), com $c_n \equiv c_{K,n}$.

(ii) A primeira desigualdade de (3.33) é uma consequência da propriedade extremal para SPO's (argumente-se como na prova do Teorema 2 em [65]; cf. Szegő [89, Theorem 3.1.2]):

$$s_n = \|S_n^\lambda\|_2^2 + \lambda \| (S_n^\lambda)' \|_1^2 \geq \|Q_n\|_2^2 + \lambda n^2 \|P_{n-1}\|_1^2.$$

Por outro lado, de (3.32) deduz-se imediatamente que $s_{n+1} \leq c_n$ para todo o $n \geq 0$. Assim, mudando n em $n-1$, obtém-se a segunda desigualdade de (3.33), tendo em conta que o segundo membro de (3.33) é igual a c_{n-1} .

□

3.5 Casos particulares

Nesta secção analisam-se casos particulares de (M, N) -coerência, nomeadamente quando (M, N) é um dos pares $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(2, 1)$, recuperando resultados conhecidos.

$(1, 1)$ -coerência

Neste caso é $N = M = K = 1$ e as relações (3.3) e (3.7) reduzem-se a

$$P_n + r_{1,n} P_{n-1} = \frac{Q'_{n+1}}{n+1} + s_{1,n} \frac{Q'_n}{n}, \quad (3.34)$$

$$Q_{n+1} + \tilde{s}_{1,n}Q_n = S_{n+1}^\lambda + t_{1,n}S_n^\lambda \quad (3.35)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\tilde{s}_{1,0} = 0, \quad \tilde{s}_{1,n} := s_{1,n} \frac{n+1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.36)$$

Após alguns cálculos, de (3.28) obtém-se o sistema de equações de diferenças

$$\begin{cases} t_{1,n}s_n = a_n \\ s_{n+1} = b_n - t_{1,n}a_n \end{cases} \quad (3.37)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $a_n \equiv a_n(\lambda)$ e $b_n \equiv b_n(\lambda)$ são definidos por

$$\begin{aligned} a_n &:= \tilde{s}_{1,n}\|Q_n\|_2^2 + \lambda n(n+1)r_{1,n}\|P_{n-1}\|_1^2 \\ b_n &:= \|Q_{n+1}\|_2^2 + \tilde{s}_{1,n}^2\|Q_n\|_2^2 + \lambda(n+1)^2(\|P_n\|_1^2 + r_{1,n}^2\|P_{n-1}\|_1^2). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para resolver (3.37), note-se que a primeira equação em (3.37) dá $t_{1,n} = a_n/s_n$, logo, substituindo na segunda equação, obtém-se

$$s_{n+1} - b_n + \frac{a_n^2}{s_n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.39)$$

Esta equação determina todos os s_n 's recursivamente e, por conseguinte, também todos os $t_{1,n}$'s e, *a fortiori*, todos os coeficientes de Fourier-Sobolev. No entanto, pode dizer-se algo mais. Introduza-se a SPOM $(\pi_n)_n \equiv (\pi_n(\cdot; \lambda))_n$ caracterizada pela RRTT

$$\pi_{n+1}(x; \lambda) = (x + b_n)\pi_n(x; \lambda) - a_n^2\pi_{n-1}(x; \lambda), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.40)$$

com condições iniciais $\pi_{-1}(x; \lambda) = 0$ e $\pi_0(x; \lambda) = 1$, onde os coeficientes de recorrência $a_n \equiv a_n(\lambda)$ e $b_n \equiv b_n(\lambda)$ são dados por (3.38). Note-se que, quando a_n e b_n são números reais, então $a_n^2 > 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$, logo $(\pi_n)_n$ é uma SPOM a respeito de alguma medida de Borel positiva. Deste modo obtém-se a seguinte proposição

Teorema 3.13. *Seja $((Q_n), (P_n))$ um par $(1, 1)$ -coerente, satisfazendo (3.34), e assumase que $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são ortogonais a respeito dos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ definidos, respectivamente, pelas medidas positivas de Borel $d\mu_1$ e $d\mu_2$. Considere-se o correspondente produto interno de Sobolev (3.6) e seja $(S_n^\lambda)_n$ a SPOM de Sobolev associada. Nestas condições:*

(i) *A norma de Sobolev satisfaz*

$$s_n = \|S_n^\lambda\|_S^2 = \frac{\pi_n(0; \lambda)}{\pi_{n-1}(0; \lambda)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.41)$$

onde $(\pi_n)_n$ é uma SPOM, ortogonal a respeito de alguma medida de Borel positiva, caracterizada pela RRTT (3.40), onde os coeficientes de recorrência $a_n \equiv a_n(\lambda)$ e $b_n \equiv b_n(\lambda)$ são dados por (3.38). Além disso, definindo

$$k_n := \|P_n\|_1^2, \quad k'_n := \|Q_n\|_2^2,$$

s_n satisfaz as desigualdades

$$k'_n + \lambda n^2 k_{n-1} \leq s_n \leq k'_n + \tilde{s}_{1,n-1}^2 k'_{n-1} + \lambda n^2 (k_{n-1} + r_{1,n-1}^2 k_{n-2}) \quad (3.42)$$

para todo o $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $\tilde{s}_{1,n}$ é dado por (3.36).

(ii) A relação (3.35) verifica-se, com

$$t_{1,n} = a_n \frac{\pi_{n-1}(0; \lambda)}{\pi_n(0; \lambda)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.43)$$

(iii) Para uma função f adequada, digamos, tal que $f \in L_{\mu_2}^2$ e $f' \in L_{\mu_1}^2$, os coeficientes da série de Fourier-Sobolev

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{s_n} S_n^\lambda(x)$$

podem ser calculados recursivamente, a partir de (3.39) ou (3.41) e resolvendo a equação de diferenças de primeira ordem

$$f_{n+1} + t_{1,n} f_n = u_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.44)$$

onde

$$u_n := \langle f, Q_{n+1} + \tilde{s}_{1,n} Q_n \rangle_2 + \lambda(n+1) \langle f', P_n + r_{1,n} P_{n-1} \rangle_1 \quad (3.45)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.

Demonstração. Todas as afirmações (i)-(iii) decorrem dos resultados e considerações prévios ao enunciado do teorema. A desigualdade (3.42) é uma consequência imediata do Teorema 3.12. \square

Coerência

Como já foi observado anteriormente, a noção de coerência introduzida por Iserles *et. al.* corresponde à $(1, 0)$ -coerência. Neste caso é $M = K = 1$ e $N = 0$ e as relações (3.3) e (3.7) reduzem-se a

$$P_n = \frac{Q'_{n+1}}{n+1} + s_{1,n} \frac{Q'_n}{n}, \quad Q_{n+1} + \tilde{s}_{1,n} Q_n = S_{n+1}^\lambda + t_{1,n} S_n^\lambda$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\tilde{s}_{1,n}$ é definido por (3.36). Pode estabelecer-se facilmente um resultado similar ao Teorema 3.13. De facto, tomando (formalmente) $r_{1,n} = 0$ em todas as fórmulas que figuram no Teorema 3.13 obtêm-se o seguinte resultado estabelecido em [35, Secção 6]. Note-se também que tomando $r_{1,n} = 0$ em (3.42) obtêm-se as desigualdades das normas de Sobolev estabelecidas em [65, Teorema 2] para pares coerentes. Além disso, fazendo $r_{1,n} = 0$ em (3.38) conclui-se que a_n é independente de λ e $b_n = b_n(\lambda)$ é uma função linear em λ . Assim, para qualquer x (fixo) conclui-se que $\pi_n(x; \lambda)$ pode ser encarado como um polinómio em λ de grau n . Em particular, para $x = 0$ obtêm-se

$$\pi_{n+1}(0; \lambda) = b_n(\lambda)\pi_n(0; \lambda) - a_n^2\pi_{n-1}(0; \lambda),$$

com $b_n(\lambda) = (n+1)^2\|P_n\|_1^2(\lambda + c_n)$ e

$$c_n := \frac{\|Q_{n+1}\|_2^2 + \tilde{s}_{1,n}^2\|Q_n\|_2^2}{(n+1)^2\|P_n\|_1^2}, \quad \text{independente de } \lambda.$$

Definindo

$$\tilde{\gamma}_n(\lambda) := \pi_n(0; \lambda)/\epsilon_n, \quad \epsilon_n := (n!)^2 \prod_{j=0}^{n-1} \|P_j\|_1^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

conclui-se que $(\tilde{\gamma}_n(\lambda))_n$ é uma SPOM na variável λ que satisfaz a RRTT

$$\tilde{\gamma}_{n+1}(\lambda) = (\lambda + c_n)\tilde{\gamma}_n(\lambda) - d_n\tilde{\gamma}_{n-1}(\lambda)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, com condições iniciais $\tilde{\gamma}_{-1}(\lambda) = 0$ e $\tilde{\gamma}_0(\lambda) = 1$, e

$$d_n := \frac{\tilde{s}_{1,n}^2\|Q_n\|_2^4}{n^2(n+1)^2\|P_n\|_1^2\|P_{n-1}\|_1^2} > 0, \quad \text{independente de } \lambda.$$

Assim, $(\tilde{\gamma}_n(\lambda))_n$ é uma SPOM a respeito de alguma medida de Borel positiva. Esta SPOM $(\tilde{\gamma}_n(\lambda))_n$ é precisamente a SPOM introduzida na prova do Teorema 1 em [13] para mostrar que

$$t_{1,n} = \frac{\gamma_{n-1}(\lambda)}{\gamma_n(\lambda)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.46)$$

sendo $(\gamma_n(\lambda))_n$ uma SPO definida por uma normalização adequada de $(\tilde{\gamma}_n(\lambda))_n$, isto é, $\tilde{\gamma}_n(\lambda) = \theta_n\gamma_n(\lambda)$, com $(\theta_n)_n$ uma sucessão de números reais não nulos. De facto, escolhendo $(\theta_n)_n$ tal que $\theta_0 = 1$ e $\theta_n/\theta_{n-1} = a_n\epsilon_{n-1}/\epsilon_n$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, conclui-se que (3.46) é consequência de (3.43), obtendo-se o Teorema 1 em [13].

(2, 1)–coerência

Neste caso, é $N = 1$ e $M = K = 2$, e as relações (3.3) e (3.7) reduzem-se a

$$P_n + r_{1,n}P_{n-1} = \frac{Q'_{n+1}}{n+1} + s_{1,n}\frac{Q'_n}{n} + s_{2,n}\frac{Q'_{n-1}}{n-1}, \quad (3.47)$$

$$Q_{n+1} + \tilde{s}_{1,n}Q_n + \tilde{s}_{2,n}Q_{n-1} = S_{n+1}^\lambda + t_{1,n}S_n^\lambda + t_{2,n}S_{n-1}^\lambda \quad (3.48)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, com

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{1,0} = \tilde{s}_{2,0} = \tilde{s}_{2,1} = 0, \\ \tilde{s}_{1,n} := s_{1,n} \frac{n+1}{n} \text{ se } n \geq 1, \quad \tilde{s}_{2,n} := s_{2,n} \frac{n+1}{n-1} \text{ se } n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Usando (3.28), após alguns cálculos, obtém-se

$$\begin{cases} t_{2,n}s_{n-1} = a_n \\ t_{1,n}s_n = b_n - a_n t_{1,n-1} \\ s_{n+1} = c_n - b_n t_{1,n} + a_n(t_{1,n}t_{1,n-1} - t_{2,n}) \end{cases} \quad (3.50)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde a_n , $b_n \equiv b_n(\lambda)$ e $c_n \equiv c_n(\lambda)$ são definidos por

$$\begin{aligned} a_n &:= \tilde{s}_{2,n} \|Q_{n-1}\|_2^2 \\ b_n &:= \tilde{s}_{1,n} \|Q_n\|_2^2 + \tilde{s}_{2,n} \tilde{s}_{1,n-1} \|Q_{n-1}\|_2^2 + \lambda n(n+1) r_{1,n} \|P_{n-1}\|_1^2 \\ c_n &:= \|Q_{n+1}\|_2^2 + \tilde{s}_{1,n}^2 \|Q_n\|_2^2 + \tilde{s}_{2,n}^2 \|Q_{n-1}\|_2^2 + \lambda(n+1)^2 (\|P_n\|_1^2 + r_{1,n}^2 \|P_{n-1}\|_1^2). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Das primeira e segunda equações de (3.50) deduz-se

$$t_{2,n} = a_n/s_{n-1} = a_n t_{1,n-1} / (b_{n-1} - a_{n-1} t_{1,n-2})$$

e $s_{n+1} = (b_{n+1} - a_{n+1} t_{1,n}) / t_{1,n+1}$. Substituindo esta expressão na terceira equação de (3.50) obtém-se

$$t_{1,n+1} = \frac{(b_{n+1} - a_{n+1} t_{1,n})(b_{n-1} - a_{n-1} t_{1,n-2})}{[c_n - (b_n - a_n t_{1,n-1}) t_{1,n}](b_{n-1} - a_{n-1} t_{1,n-2}) - a_n^2 t_{1,n-1}}$$

para todo o $n = 2, 3, \dots$. Deste modo obtêm-se, recursivamente, todos os $t_{1,n}$'s, tendo em conta as condições iniciais

$$t_{1,0} = 0, \quad t_{1,1} = b_1/s_1, \quad t_{1,2} = (s_1 b_2 - a_2 b_1) / (s_1 c_1 - b_1^2)$$

(note-se que s_1 é calculado usando (3.29)). Em seguida determinam-se todos os s_n 's da segunda equação de (3.50) e, portanto, obtêm-se todos os $t_{2,n}$'s da primeira equação. Assim, nesta situação, os coeficientes de Fourier-Sobolev em (3.17) podem ser calculados resolvendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$f_{n+1} + t_{1,n}f_n + t_{2,n}f_{n-1} = u_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.52)$$

onde

$$u_n = \langle f, Q_{n+1} + \tilde{s}_{1,n}Q_n + \tilde{s}_{2,n}Q_{n-1} \rangle_2 + \lambda(n+1) \langle f', P_n + r_{1,n}P_{n-1} \rangle_1. \quad (3.53)$$

Além disso, como consequência imediata do Teorema 3.12, tem-se o seguinte

Teorema 3.14. *Seja $((Q_n), (P_n))$ um par $(2, 1)$ -coerente satisfazendo (3.47) e suponha-se que $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são ortogonais a respeito dos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ definidos (resp.) pelas medidas de Borel positivas $d\mu_1$ e $d\mu_2$. Considere-se o correspondente produto interno de Sobolev (3.6) e seja $(S_n^\lambda)_n$ a correspondente SPOM de Sobolev. Definam-se*

$$k_n := \|P_n\|_1^2, \quad k'_n := \|Q_n\|_2^2.$$

Então a norma de Sobolev $s_n := \|S_n^\lambda\|_S^2$ satisfaz

$$k'_n + \lambda n^2 k_{n-1} \leq s_n \leq k'_n + \tilde{s}_{1,n-1}^2 k'_{n-1} + \tilde{s}_{2,n-1}^2 k'_{n-2} + \lambda n^2 (k_{n-1} + r_{1,n-1}^2 k_{n-2})$$

para todo $n = 2, 3, \dots$.

$(2, 0)$ -coerência

Neste caso as relações (3.3) e (3.7) reduzem-se a

$$P_n = \frac{Q'_{n+1}}{n+1} + s_{1,n} \frac{Q'_n}{n} + s_{2,n} \frac{Q'_{n-1}}{n-1}, \quad (3.54)$$

$$Q_{n+1} + \tilde{s}_{1,n}Q_n + \tilde{s}_{2,n}Q_{n-1} = S_{n+1}^\lambda + t_{1,n}S_n^\lambda + t_{2,n}S_{n-1}^\lambda \quad (3.55)$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, com $(\tilde{s}_{1,n})_n$ e $(\tilde{s}_{2,n})_n$ dados por (3.49). Os coeficientes de Fourier-Sobolev para este caso $(2, 0)$ -coerente podem ser calculados como no caso $(2, 1)$ -coerente, tomando (formalmente) $r_{1,n} = 0$ nas fórmulas do caso $(2, 1)$ -coerente. Obtém-se, assim, um algoritmo que melhora o apresentado em [42, Secção 5].

3.6 Série de Fourier-Sobolev: exemplos

Nesta secção serão apresentados exemplos envolvendo a construção de séries de Fourier-Sobolev a respeito de produtos internos de Sobolev do tipo (3.6) nos quais as medidas $d\mu_1$ e $d\mu_2$ constituem um par (M, N) -coerente. A determinação dos coeficientes de Fourier-Sobolev será feita usando o Algoritmo 3.10.

Exemplo 1. Considere-se a medida de Jacobi

$$d\mu^{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \chi_{(-1,1)}(x) dx ,$$

que está bem definida para $\alpha, \beta > -1$. Restringindo α e β de modo que $\alpha, \beta > 1$, podem considerar-se as medidas $d\mu_1$ e $d\mu_2$ definidas por

$$d\mu_1 := d\mu^{\alpha-2,\beta} , \quad d\mu_2 := d\mu^{\alpha-1,\beta-2} \quad (\alpha, \beta > 1) .$$

De acordo com resultados obtidos em [79], $\{d\mu_2, d\mu_1\}$ é um par de medidas $(2, 1)$ -coerente, com

$$P_n := \widehat{P}_n^{(\alpha-2,\beta)} , \quad Q_n := \widehat{P}_n^{(\alpha-1,\beta-2)} .$$

Com efeito, tem-se [79]

$$\begin{aligned} & \widehat{P}_n^{(\alpha-2,\beta)} + r_{1,n} \widehat{P}_{n-1}^{(\alpha-2,\beta)} \\ &= \frac{\left(\widehat{P}_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-2)}\right)'}{n+1} + s_{1,n} \frac{\left(\widehat{P}_n^{(\alpha-1,\beta-2)}\right)'}{n} + s_{2,n} \frac{\left(\widehat{P}_{n-1}^{(\alpha-1,\beta-2)}\right)'}{n-1} \end{aligned}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\begin{aligned} r_{1,n} &:= \frac{2n(n+\alpha-2)}{(2n+\alpha+\beta-3)(2n+\alpha+\beta-2)} , \\ s_{1,n} &:= -\frac{4n(n+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta-3)} , \\ s_{2,n} &:= \frac{4n(n-1)(n+\beta-2)(n+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta-4)(2n+\alpha+\beta-3)^2(2n+\alpha+\beta-2)} . \end{aligned}$$

Considere-se a função $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}} , \quad -1 < x < 1 .$$

Constata-se facilmente que $f \in L_{\mu_2}^2(-1, 1)$ se $\alpha > 1$ e $\beta > 2$, e $f' \in L_{\mu_1}^2(-1, 1)$ se $\alpha > 4$ e $\beta > 2$. Deste modo, escolhendo, por exemplo, $(\alpha, \beta) = (5, 4)$, a teoria exposta nas secções anteriores permite determinar a série de Fourier-Sobolev de f a respeito da SPOM de Sobolev associada ao produto interno de Sobolev (3.6) definido pelo par $(2, 1)$ -coerente

$$\{d\mu_2, d\mu_1\} \equiv \{d\mu^{4,2}, d\mu^{3,4}\} .$$

De facto, para esta escolha, aplicando o Algoritmo 3.10, ou, mais precisamente, os resultados obtidos na secção anterior para pares $(2, 1)$ -coerentes,

determinam-se os coeficientes de Fourier-Sobolev de f (com o auxílio do software MAPLE), bem como as sucessões $(t_{1,n})_n$ e $(t_{2,n})_n$ que aparecem em (3.48). Em particular, para $\lambda = 0.1$, obtêm-se os valores indicados na Tabela 3.1, os quais permitem determinar os primeiros 20 coeficientes de Fourier-Sobolev f_n/s_n .

n	$t_{1,n}$	$t_{2,n}$	s_n	f_n
0	0	0	1	-0.302
1	-0.095	0	0.204	0.252
2	0.015	0.025	0.075	0.001
3	0.077	0.015	0.023	0.024
4	0.123	0.011	0.007	0.002
5	0.159	0.009	0.002	0.004
6	0.188	0.007	0.001	4.9×10^{-4}
7	0.212	0.006	1.6×10^{-4}	7.5×10^{-4}
8	0.233	0.005	4.6×10^{-5}	1.2×10^{-4}
9	0.251	4.4×10^{-3}	1.3×10^{-5}	1.5×10^{-4}
10	0.266	3.8×10^{-3}	3.6×10^{-6}	3.0×10^{-5}
11	0.280	3.4×10^{-3}	1.0×10^{-6}	3.1×10^{-5}
12	0.292	3.0×10^{-3}	2.7×10^{-7}	7.2×10^{-6}
13	0.302	2.7×10^{-3}	7.6×10^{-8}	6.9×10^{-6}
14	0.312	2.4×10^{-3}	2.1×10^{-8}	1.7×10^{-6}
15	0.321	2.2×10^{-3}	5.7×10^{-9}	1.5×10^{-6}
16	0.329	2.0×10^{-3}	1.5×10^{-9}	4.1×10^{-7}
17	0.336	1.8×10^{-3}	4.1×10^{-10}	3.4×10^{-7}
18	0.343	1.6×10^{-3}	1.1×10^{-10}	9.9×10^{-8}
19	0.349	1.5×10^{-3}	3.0×10^{-11}	7.8×10^{-8}

Tabela 3.1

Cada uma das duas figuras seguintes inclui representações gráficas conjuntas da função f e das somas parciais de grau 19 das séries de Fourier-Jacobi de f (coincidem com as séries de Fourier-Sobolev para $\lambda = 0$) e de Fourier-Sobolev de f para $\lambda = 0.1$, nos intervalos $[0, 0.9]$ (Figura 3.1) e $[0.9, 0.98]$ (Figura 3.2).

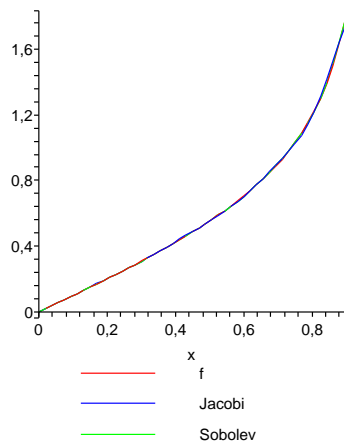


Figura 3.1

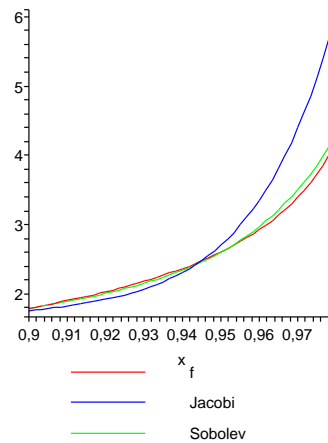


Figura 3.2

Cada uma das figuras seguintes inclui representações gráficas conjuntas da função f' e das derivadas das somas parciais de grau 19 das séries de Fourier-Jacobi de f e de Fourier-Sobolev de f para $\lambda = 0.1$, nos intervalos $[0, 0.9]$ (Figura 3.3) e $[0.9, 0.98]$ (Figura 3.4).

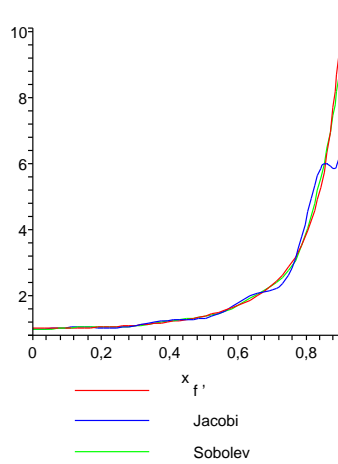


Figura 3.3

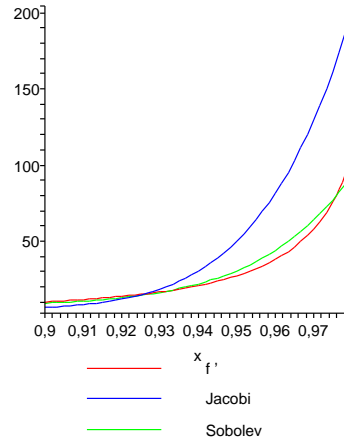


Figura 3.4

Da análise das figuras precedentes retira-se a seguinte *conclusão empírica*: as aproximações para f e f' fornecidas pela série de Fourier-Sobolev são melhores que as aproximações fornecidas pela série de Fourier-Jacobi, sobretudo próximo do ponto $+1$, que é um dos extremos do intervalo $[-1, +1]$ (este intervalo é o suporte da medida de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi). Esta “conclusão” é sustentada por muitos outros exemplos que aqui foram omitidos.

Exemplo 2. Neste exemplo obtém-se de forma alternativa (usando a teoria desenvolvida nas secções anteriores) os resultados contidos num exemplo apresentado por A. Iserles, J. M. Sanz-Serna, P. E. Koch e S. P. Nørsett em [34].
 Designe

$$d\mu(x) := \chi_{(-1,1)}(x) dx$$

(medida de Lebesgue em $(-1, 1)$, a respeito da qual são ortogonais os polinômios de Legendre $P_n := \widehat{F}_n^{(0,0)}$). O par $\{d\mu_2, d\mu_1\} := \{d\mu, d\mu\}$ é $(2, 0)$ -coerente. Este facto é uma consequência imediata da bem conhecida relação envolvendo os polinômios (mónicos) de Legendre:

$$P_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1} - \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \frac{P'_{n-1}}{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Considere-se a função $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, introduzida em [34], definida por

$$f(x) := e^{-100(x-\frac{1}{5})^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Obviamente, $f \in L^2_{\mu_2}(-1, 1)$ e $f' \in L^2_{\mu_1}(-1, 1)$. Assim, a teoria exposta nas secções anteriores permite determinar a série de Fourier-Sobolev de f a respeito da SPOM de Sobolev associada ao produto interno de Sobolev (3.6) definido pelo par $(2, 0)$ -coerente $\{d\mu, d\mu\}$. Com efeito, procedendo como no exemplo 1, aplicando o Algoritmo 3.10, ou os resultados da secção anterior para pares $(2, 0)$ -coerentes, determinam-se os coeficientes de Fourier-Sobolev de f (usando MAPLE), bem como as sucessões $(t_{1,n})_n$ e $(t_{2,n})_n$ que figuram em (3.55). A Figura 3.5 inclui representações gráficas conjuntas da função f (a vermelho) e das somas parciais de graus $n = 3, 6, \dots, 18$ (a azul) da série de Fourier-Legendre de f (a qual coincide com a série de Fourier-Sobolev para $\lambda = 0$), enquanto a Figura 3.6 inclui representações gráficas conjuntas de f' (a vermelho) e das derivadas das somas parciais de graus $n = 3, 6, \dots, 18$ (a azul) da série de Fourier-Legendre de f .

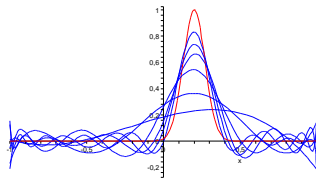


Figura 3.5

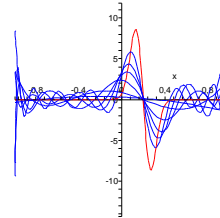


Figura 3.6

Nas figuras 3.7 e 3.8 estão as representações correspondentes às anteriores considerando as somas parciais das séries de Fourier-Sobolev para $\lambda = 0.01$.

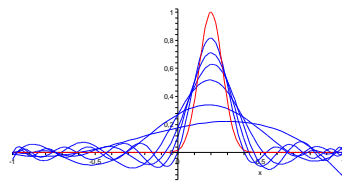


Figura 3.7

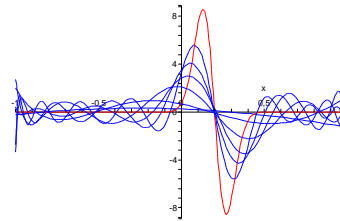


Figura 3.8

Os quatro gráficos precedentes coincidem com os gráficos apresentados em [34, Figura 1]. Finalmente, observa-se que é válida para este exemplo uma *conclusão empírica* análoga à do exemplo anterior.

Observação 3.15. *Fica em aberto o problema de analisar a convergência da série de Fourier-Sobolev (3.17) para a sua função geradora.*

Capítulo 4

Polinómios ortogonais e transformações polinomiais

4.1 Introdução

Neste capítulo introduz-se e resolve-se o seguinte problema inverso:

(P2) *Seja $(P_n)_n$ uma SPOM. Determinar condições necessárias e suficientes que assegurem a existência de uma outra SPOM, $(Q_n)_n$, tal que a SPOM dada, $(P_n)_n$, possa ser descrita por uma transformação polinomial do tipo*

$$P_{nk+m}(x) = \theta_m(x)Q_n(\pi_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

onde k e m são números inteiros fixos, com $k \geq 2$ e $0 \leq m \leq k - 1$, e π_k e θ_m são polinómios de graus k e m , respectivamente. Sob tais condições, descrever relações algébricas e analíticas entre as sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$. Em particular, determinar a relação entre as correspondentes medidas de ortogonalidade.

O estudo deste problema tem atraído a atenção de vários autores nas últimas décadas, em particular devido ao facto de, para escolhas apropriadas da SPOM de partida, $(P_n)_n$, e de certos parâmetros envolvidos, **(P2)** aparecer de modo natural no estudo de alguns problemas em vários domínios do conhecimento, sobretudo nas áreas da Matemática (e.g., Teoria da Aproximação e das Funções Especiais, Teoria dos Operadores, Teoria das Matrizes, Teoria do Potencial, entre outros) e da Física, como é posto em evidência, e.g., nos trabalhos de D.

Bessis e P. Moussa [10], J. Charris e M. E. H. Ismail [15], J. Geronimo e W. Van Assche [28, 27], J. Charris, M. E. H. Ismail e S. Monsalve [16], F. Peherstorfer [75, 74], V. Totik [90], M. J. C. Gover [26], F. Marcellán e J. Petronilho [56, 57, 53, 54], R. Álvarez-Nodarse, J. Petronilho e N. R. Quintero [6], C. M. da Fonseca e J. Petronilho [24], e J. Petronilho [80]. O estudo realizado nestes trabalhos (em cada situação concreta) inclui aspectos de natureza algébrica—determinação do polinómio π_k , que induz a transformação polinomial, e da nova SPOM $(Q_n)_n$ —, e analítica—determinação, no caso definido-positivo, da relação entre as medidas de ortogonalidade das SPOM's $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$.

Na maior parte dos trabalhos anteriores consideram-se situações em que a transformação polinomial é tal que θ_m é uma constante ou um polinómio de grau $k-1$ (i.e., ou $m=0$ ou $m=k-1$). Em particular, **(P2)** foi primeiramente estudado por P. Barrucand e D. Dickinson [9] numa situação em que $(k, m) = (3, 0)$. Do ponto de vista analítico (caso em que a ortogonalidade é no sentido definido-positivo) uma das propriedades mais interessantes que decorre da resolução de **(P2)** é a seguinte: $(P_n)_n$ é ortogonal a respeito de uma medida cujo suporte está contido numa união de no máximo k intervalos, definidos por $\pi_k^{-1}([\xi, \eta])$, onde $[\xi, \eta]$ é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da SPOM $(Q_n)_n$. Mais precisamente, sob certas condições que serão especificadas adiante, provar-se-á (cf. Teorema 4.7) que se $(P_n)_n$ é ortogonal no sentido definido-positivo, a respeito de uma certa medida $d\sigma$ (que se desconhece *a priori!*), então também $(Q_n)_n$ é ortogonal a respeito de uma medida $d\tau$; além disso, se $d\tau$ for conhecida, então $d\sigma$ é dada explicitamente por

$$d\sigma(x) = \sum_{i=1}^m M_i \delta(x - z_i) dx + \chi_{\pi_k^{-1}([\xi, \eta])}(x) \left| \frac{\eta_{k-1-m}(x)}{\theta_m(x)} \right| \frac{d\tau(\pi_k(x))}{\pi'_k(x)}$$

(a menos de um factor constante), onde M_1, \dots, M_m são constantes não negativas que podem ser calculadas explicitamente.

O estudo que se vai seguir, conducente à resolução do problema **(P2)**, será feito em várias etapas. Na secção seguinte determinam-se condições necessárias e suficientes que assegurem a existência de uma transformação polinomial do tipo (4.1)—indicando, também, como “completar” a descrição da família $(P_n)_n$ em termos da transformação polinomial sobre a SPOM $(Q_n)_n$ —, e na secção subsequente analisa-se o caso definido-positivo. Nas restantes secções apresentam-se exemplos de aplicação dos resultados obtidos, incluindo provas alternativas para resultados conhecidos na literatura (contidos nos trabalhos supra-citados).

4.2 SPO's via transformações polinomiais

Nesta secção, e ao longo de todo este capítulo, far-se-á uso de certos determinantes que irão desempenhar um papel fundamental na resolução do Problema **(P2)**. Recorde-se que, de acordo com o Teorema de Favard, qualquer SPOM, $(P_n)_n$, pode ser caracterizada por uma RRTT. Conforme foi observado em [15, 16], fixado um número inteiro $k \geq 2$, esta RRTT pode ser descrita por blocos de RRTT's (cada um dos blocos contendo k equações) do tipo

$$(x - b_n^{(j)})P_{nk+j}(x) = P_{nk+j+1}(x) + a_n^{(j)}P_{nk+j-1}(x), \quad (4.2)$$

$$j = 0, 1, \dots, k-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

com $a_n^{(j)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $b_n^{(j)} \in \mathbb{C}$ para todos os n e j , com as condições iniciais

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1. \quad (4.3)$$

Sem perda de generalidade, pode-se supor que $a_0^{(0)} = 1$ e $P_j(x) := 0$ para $j \leq -1$. De seguida introduzem-se determinantes $\Delta_n(i, j; \cdot)$ como em [15, 16]. Para $n = 0, 1, 2, \dots$, define-se

$$\Delta_n(i, j; x) := \begin{cases} 0 & \text{se } j < i-2 \\ 1 & \text{se } j = i-2 \\ x - b_n^{(i-1)} & \text{se } j = i-1 \end{cases} \quad (4.4)$$

e, para $j \geq i \geq 1$,

$$\Delta_n(i, j; x) := \begin{vmatrix} x - b_n^{(i-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n^{(i)} & x - b_n^{(i)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n^{(i+1)} & x - b_n^{(i+1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x - b_n^{(j-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^{(j)} & x - b_n^{(j)} \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

Como *a priori* o grau do polinómio $\Delta_n(i, j; \cdot)$ pode ser maior ou igual a k e uma vez que em (4.2) os coeficientes $a_n^{(j)}$'s e $b_n^{(j)}$'s estão definidos apenas para $0 \leq j \leq k-1$, adoptam-se as seguintes convenções:

$$b_n^{(k+j)} := b_{n+1}^{(j)}, \quad a_n^{(k+j)} := a_{n+1}^{(j)} \quad (4.6)$$

para $i, j = 0, 1, 2, \dots$ e $n = 0, 1, 2, \dots$. Deste modo, verifica-se a igualdade

$$\Delta_n(k+i, k+j; \cdot) = \Delta_{n+1}(i, j; \cdot) \quad (4.7)$$

para $i, j = 0, 1, 2, \dots$ e $n = 0, 1, 2, \dots$.

O teorema seguinte resolve o Problema **(P2)** do ponto de vista algébrico, sendo estabelecidas condições necessárias e suficientes para a existência de uma transformação polinomial no sentido exposto pela relação (4.1).

Teorema 4.1. *Seja $(P_n)_n$ uma SPOM caracterizada pela RRTT (4.2). Sejam $r \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$, com $0 \leq m \leq k - 1$. Então, existem polinómios π_k e θ_m , de graus k e m (resp.), e uma SPOM $(Q_n)_n$ tais que $Q_1(0) = -r$ e*

$$P_{kn+m}(x) = \theta_m(x) Q_n(\pi_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

se e só se as quatro condições seguintes se verificam:

- (i) $b_n^{(m)}$ é independente de n para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (ii) $\Delta_n(m+2, m+k-1; x)$ é independente de n para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (iii) $\Delta_0(m+2, m+k-1; \cdot)$ é divisível por $\Delta_0(1, m-1; \cdot)$, i.e., existe um polinómio η_{k-1-m} , de grau $k-1-m$, tal que

$$\Delta_0(m+2, m+k-1; x) = \Delta_0(1, m-1; x) \eta_{k-1-m}(x);$$

- (iv) $r_n(x)$ é independente de x para todo o $n = 1, 2, \dots$, onde

$$\begin{aligned} r_n(x) &:= a_n^{(m+1)} \Delta_n(m+3, m+k-1; x) - a_0^{(m+1)} \Delta_0(m+3, m+k-1; x) \\ &\quad + a_n^{(m)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) - a_0^{(m)} \Delta_0(1, m-2; x) \eta_{k-1-m}(x). \end{aligned}$$

Nestas condições, os polinómios θ_m e π_k são dados explicitamente por

$$\begin{aligned} \theta_m(x) &= \Delta_0(1, m-1; x) \equiv P_m(x), \\ \pi_k(x) &= \Delta_0(1, m; x) \eta_{k-1-m}(x) - a_0^{(m+1)} \Delta_0(m+3, m+k-1; x) + r, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e a SPOM $(Q_n)_n$ é caracterizada pela RRTT

$$Q_{n+1}(x) = (x - r_n) Q_n(x) - s_n Q_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

com condições iniciais $Q_{-1}(x) = 0$ e $Q_0(x) = 1$, onde

$$r_0 := r, \quad r_n := r + r_n(0), \quad s_n := a_n^{(m)} a_{n-1}^{(m+1)} \dots a_{n-1}^{(m+k-1)} \quad (4.11)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Além disso,

$$\begin{aligned} P_{kn+m+j+1}(x) &= \frac{1}{\eta_{k-1-m}(x)} \left\{ \Delta_n(m+2, m+j; x) Q_{n+1}(\pi_k(x)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\prod_{i=1}^{j+1} a_n^{(m+i)} \right) \Delta_n(m+j+3, m+k-1; x) Q_n(\pi_k(x)) \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, k-1$ e para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.

e

$$\begin{aligned}
& a_n^{(m)} \Delta_n(m+2, m+k-1; x) P_{nk+m-1}(x) \\
&= \left\{ (x - b_n^{(m)}) \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \right. \\
&\quad \left. - a_n^{(m+1)} \Delta_n(m+3, m+k-1; x) \right\} P_{nk+m}(x) \\
&\quad - P_{(n+1)k+m}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Fazendo $j = k - 2$ em (4.16) e mudando n em $n - 1$ na expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) P_{nk+m-1}(x) \\
&= a_{n-1}^{(m+1)} \dots a_{n-1}^{(m+k-1)} P_{(n-1)k+m}(x) \\
&\quad + \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) P_{nk+m}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Suponha-se (por hipótese) que se cumprem as condições (i)–(iv). Então de (4.17) e (4.18), tendo em conta (i) e (ii), obtém-se

$$\begin{aligned}
P_{(n+1)k+m}(x) &= \left\{ (x - b_0^{(m)}) \Delta_0(m+2, m+k-1; x) \right. \\
&\quad \left. - a_n^{(m)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) \right. \\
&\quad \left. - a_n^{(m+1)} \Delta_n(m+3, m+k-1; x) \right\} P_{nk+m}(x) \\
&\quad - a_n^{(m)} a_{n-1}^{(m+1)} \dots a_{n-1}^{(m+k-1)} P_{(n-1)k+m}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
P_{(n+1)k+m}(x) &= \left\{ (x - b_0^{(m)}) \Delta_0(m+2, m+k-1; x) \right. \\
&\quad \left. - a_0^{(m)} \Delta_0(1, m-2; x) \eta_{k-1-m}(x) \right. \\
&\quad \left. - a_0^{(m+1)} \Delta_0(m+3, m+k-1; x) - r_n(x) \right\} P_{nk+m}(x) \\
&\quad - a_n^{(m)} a_{n-1}^{(m+1)} \dots a_{n-1}^{(m+k-1)} P_{(n-1)k+m}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Atendendo à hipótese (iii), pode-se escrever

$$\begin{aligned}
& (x - b_0^{(m)}) \Delta_0(m+2, m+k-1; x) - a_0^{(m)} \Delta_0(1, m-2; x) \eta_{k-1-m}(x) \\
&= \left((x - b_0^{(m)}) \Delta_0(1, m-1; x) - a_0^{(m)} \Delta_0(1, m-2; x) \right) \eta_{k-1-m}(x) \\
&= \Delta_0(1, m; x) \eta_{k-1-m}(x),
\end{aligned}$$

donde se deduz, usando a hipótese (iv), que

$$P_{(n+1)k+m}(x) = (\pi_k(x) - r_n) P_{nk+m}(x) - s_n P_{(n-1)k+m}(x) \tag{4.19}$$

para todo o $n = 1, 2, 3, \dots$, onde π_k é definido por (4.9) e r_n e s_n são definidas por (4.11). A igualdade (4.19) é ainda válida se $n = 0$. De facto, fazendo $j = n = 0$

em (4.16) e atendendo a que $P_{m+1}(x) = (x - b_0^{(m)})P_m(x) - a_0^{(m)}P_{m-1}(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}
P_{k+m}(x) &= \left\{ (x - b_0^{(m)})\Delta_0(m+2, m+k-1; x) \right. \\
&\quad \left. - a_0^{(m+1)}\Delta_0(m+3, m+k-1; x) \right\} P_m(x) \\
&\quad - a_0^{(m)}\Delta_0(m+2, m+k-1; x) P_{m-1}(x) \\
&= \Delta_0(1, m-1; x) \left\{ (x - b_0^{(m)})\Delta_0(m+2, m+k-1; x) \right. \\
&\quad \left. - a_0^{(m+1)}\Delta_0(m+3, m+k-1; x) - a_0^{(m)}\eta_{k-1-m}(x)P_{m-1}(x) \right\} \\
&= \theta_m(x) (\pi_k(x) - r) = \theta_m(x) Q_1(\pi_k(x)) ,
\end{aligned}$$

onde θ_m é definido por (4.9). Observe-se que, no cálculo precedente, para obter a segunda igualdade usou-se a hipótese (iii) e a terceira igualdade também se pode justificar por (iii), do modo seguinte:

$$\begin{aligned}
&(x - b_0^{(m)})\Delta_0(m+2, m+k-1; x) \\
&\quad - a_0^{(m+1)}\Delta_0(m+3, m+k-1; x) - a_0^{(m)}\eta_{k-1-m}(x)P_{m-1}(x) \\
&= [(x - b_0^{(m)})P_m(x) - a_0^{(m)}P_{m-1}(x)]\eta_{k-1-m}(x) \\
&\quad - a_0^{(m+1)}\Delta_0(m+3, m+k-1; x) \\
&= P_{m+1}(x)\eta_{k-1-m}(x) - a_0^{(m+1)}\Delta_0(m+3, m+k-1; x) \\
&= \pi_k(x) - r .
\end{aligned}$$

Por conseguinte, (4.19) verifica-se para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, donde se deduz, por indução finita, que (4.8) se verifica. A relação (4.12) é uma consequência imediata de (4.16), (4.8) e da hipótese (iii).

Reciprocamente, suponha-se que existem polinómios π_k e θ_m , de graus k e m (resp.), com $0 \leq m \leq k-1$, e uma SPOM $(Q_n)_n$ tais que $(P_n)_n$ satisfaz (4.8). Há que provar que se verificam as quatro propriedades (i)–(iv). Fazendo $n = 0$ e $n = 1$ em (4.8), obtém-se

$$\theta_m(x) = P_m(x) = \Delta_0(1, m-1; x) , \quad P_{m+k}(x) = \theta_m(x)(\pi_k(x) - r) .$$

Mas, uma vez que

$$\begin{aligned}
P_{m+k}(x) &= \Delta_0(1, k+m-1; x) \\
&= \Delta_0(1, m-1; x)\Delta_0(m+1, m+k-1; x) \\
&\quad - a_0^{(m)}\Delta_0(1, m-2; x)\Delta_0(m+2, m+k-1; x) ,
\end{aligned}$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned}
&\Delta_0(1, m-1; x)(\pi_k(x) - r) \\
&= \Delta_0(1, m-1; x)\Delta_0(m+1, m+k-1; x) \\
&\quad - a_0^{(m)}\Delta_0(1, m-2; x)\Delta_0(m+2, m+k-1; x) .
\end{aligned}$$

Como $\Delta_0(1, m-1; \cdot) \equiv P_m$ e $\Delta_0(1, m-2; x) \equiv P_{m-1}$ não têm zeros em comum, conclui-se que $\Delta_0(m+2, m+k-1; x)$ é divisível por $\Delta_0(1, m-1; \cdot)$, o que implica que a condição (iii) se verifica. Conseqüentemente,

$$\pi_k(x) = \Delta_0(m+1, m+k-1; x) - a_0^{(m)} \Delta_0(1, m-2; x) \eta_{k-1-m}(x) + r,$$

e pode verificar-se facilmente que este polinômio pode ser reescrito como em (4.9) (cf. Observação 4.3). Uma vez que $(Q_n)_n$ é uma SPOM, então satisfaz uma RRTT do tipo (4.10), onde $(r_n)_n$ e $(s_n)_n$ são sucessões de números complexos, com $s_n \neq 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$. Mudando x em $\pi_k(x)$ nesta RRTT e multiplicando ambos os membros da equação resultante por $\theta_m(x)$, obtém-se

$$P_{(n+1)k+m}(x) = (\pi_k(x) - r_n) P_{nk+m}(x) - s_n P_{(n-1)k+m}(x) \quad (4.20)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Por outro lado, de (4.17) e (4.18) deduz-se

$$\begin{aligned} & \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) P_{(n+1)k+m}(x) \\ &= \left\{ (x - b_n^{(m)}) \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \right. \\ & \quad - a_n^{(m+1)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \Delta_n(m+3, m+k-1; x) \\ & \quad \left. - a_n^{(m)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \right\} P_{nk+m}(x) \\ & \quad - a_n^{(m)} a_{n-1}^{(m+1)} \dots a_{n-1}^{(m+k-1)} \Delta_n(m+2, m+k-1; x) P_{(n-1)k+m}(x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Substituindo o segundo membro de (4.20) no primeiro membro de (4.21) obtém-se

$$\begin{aligned} & \left\{ s_n \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \right. \\ & \quad \left. - a_n^{(m)} a_{n-1}^{(m+1)} \dots a_{n-1}^{(m+k-1)} \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \right\} P_{(n-1)k+m}(x) \\ &= \left\{ (\pi_k(x) - r_n) \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \right. \\ & \quad - (x - b_n^{(m)}) \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \\ & \quad + a_n^{(m+1)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \Delta_n(m+3, m+k-1; x) \\ & \quad \left. + a_n^{(m)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \right\} P_{nk+m}(x) \end{aligned}$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Observando esta igualdade, conclui-se que o primeiro membro é um polinômio de grau quando muito igual a $nk + m - 1$, enquanto que o segundo membro ou é zero ou um polinômio de grau pelo menos $nk + m$. Assim, pode-se concluir que os polinômios que figuram entre chavetas, em ambos

os membros da igualdade anterior, coincidem com o polinómio nulo, logo

$$\begin{aligned} s_n \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \\ = a_n^{(m)} a_{n-1}^{(m+1)} \cdots a_{n-1}^{(m+k-1)} \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \end{aligned} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned} (\pi_k(x) - r_n) \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \\ = (x - b_n^{(m)}) \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \\ - a_n^{(m+1)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) \Delta_n(m+3, m+k-1; x) \\ - a_n^{(m)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) \Delta_n(m+2, m+k-1; x) \end{aligned} \quad (4.23)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Como $\Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; \cdot)$ e $\Delta_n(m+2, m+k-1; \cdot)$ são polinómios mónicos, decorre imediatamente de (4.22) que a expressão para s_n dada por (4.11) se verifica e, em consequência, também

$$\Delta_{n-1}(m+2, m+k-1; x) = \Delta_n(m+2, m+k-1; x)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$, o que prova que a propriedade (ii) se verifica. Assim, de (4.23) obtém-se

$$\begin{aligned} r_n &= \pi_k(x) - (x - b_n^{(m)}) \Delta_0(m+2, m+k-1; x) \\ &\quad + a_n^{(m+1)} \Delta_n(m+3, m+k-1; x) + a_n^{(m)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) \\ &= (b_n^{(m)} - b_0^{(m)}) \Delta_0(m+2, m+k-1; x) + r + r_n(x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$, onde a última igualdade pode ser justificada usando a expressão (4.9) para $\pi_k(x)$ (veja-se também a Observação 4.3) e tendo em conta a definição de $r_n(x)$. Além disso, uma vez que o primeiro membro de (4.24) é independente de x , então o segundo membro também é independente de x e, assim, tendo em conta que $\Delta_0(m+2, m+k-1; x)$ é um polinómio mónico de grau $k-1$ e $r_n(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a $k-2$, conclui-se que $b_n^{(m)} - b_0^{(m)} = 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$, i.e., verifica-se a propriedade (i). Finalmente, (iv) e a expressão de r_n como em (4.11) são consequências imediatas de (i) e (4.24). \square

Observação 4.2. *Se $m = 0$ a condição (iii) que figura no enunciado do teorema anterior é sempre verificada. Neste caso, tem-se*

$$\theta_m(x) = \theta_0(x) \equiv 1, \quad \eta_{k-1-m}(x) = \eta_{k-1}(x) = \Delta_0(2, k-1; x).$$

Por outro lado, se $m = k - 1$ as condições (ii) e (iii) são equivalentes a

$$\Delta_n(1, k - 2; x) = \Delta_0(1, k - 2; x) \equiv \theta_{k-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De facto, sendo $m = k - 1$, conjungando (ii) com a igualdade (4.7) obtém-se $\Delta_n(m + 2, m + k - 1; x) = \Delta_0(m + 2, m + k - 1; x) = \Delta_0(k + 1, k + k - 2; x) = \Delta_1(1, k - 2; x) = \theta_{k-1}(x)$, sendo a última igualdade justificada por (iii); neste caso tem-se $\eta_{k-1-m}(x) = \eta_0(x) \equiv 1$.

Observação 4.3. Como decorre da demonstração anterior, o polinómio π_k também admite as seguintes expressões alternativas:

$$\begin{aligned} \pi_k(x) &= (x - b_0^{(m)})\Delta_0(m + 2, m + k - 1; x) \\ &\quad - a_0^{(m+1)}\Delta_0(m + 3, m + k - 1; x) - a_0^{(m)}\eta_{k-1-m}(x)P_{m-1}(x) + r \\ &= \Delta_0(m + 1, m + k - 1; x) - a_0^{(m)}\Delta_0(1, m - 2; x)\eta_{k-1-m}(x) + r. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Observação 4.4. Se se verificar a condição (iv), i.e., se o polinómio $r_n(x)$ é independente de x , o coeficiente do termo de maior grau na expressão de $r_n(x)$ deve ser nulo. Assim, nas condições do teorema anterior, se $k > 2$, verifica-se a igualdade

$$a_n^{(m+1)} + a_n^{(m)} = \begin{cases} a_0^{(m+1)} + a_0^{(m)} & \text{se } m \in \{1, \dots, k - 1\} \\ a_0^{(1)} & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$ (isto significa que o primeiro membro da igualdade é independente de n).

4.3 Determinação da medida de ortogonalidade

Nesta secção analisa-se o Problema (P2) no caso definido-positivo, o qual corresponde à situação em que ambas as SPOM's $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ no Teorema 4.1 são ortogonais a respeito de medidas de Borel positivas. O objectivo é determinar a medida de ortogonalidade para a sucessão $(P_n)_n$ em função da medida de ortogonalidade para $(Q_n)_n$. Para tal, determina-se primeiro uma relação entre uma subsucessão apropriada da SPOM dos polinómios associados de primeira espécie, $(P_n^{(1)})_n$, e os polinómios das SPOM's $(Q_n)_n$ e $(Q_n^{(1)})_n$ (Lema 4.6). Esta relação permitirá estabelecer uma relação entre as funções de Stieltjes correspondentes às sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$, donde resultará a relação entre as medidas de ortogonalidade, que será estabelecida usando o Teorema 1.11 (de Markov) e a proposição seguinte, estabelecida por F. Marcellán e J. Petronilho em [54].

Lema 4.5. [54] *Seja σ uma função de distribuição com suporte $\text{supp}(\sigma) \subset [\xi, \eta]$, $-\infty < \xi < \eta < +\infty$. Seja T um polinómio real e mónico de grau $k \geq 2$ cuja derivada T' tem $k-1$ zeros reais e distintos, designados de forma crescente por $y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1}$. Suponha-se que $T(y_{2i-1}) \geq \eta$ e $T(y_{2i}) \leq \xi$ se k é ímpar, ou $T(y_{2i-1}) \leq \xi$ e $T(y_{2i}) \geq \eta$ se k é par. Sejam A e B dois polinómios reais e mónicos tais que $\text{gr } A = k-1-m$ e $\text{gr } B = m$, com $0 \leq m \leq k-1$. Suponha-se que os zeros de AB são reais e distintos, AB e T' têm o mesmo sinal em cada ponto do conjunto $T^{-1}([\xi, \eta])$ e, se $m \geq 1$,*

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{d\sigma(y)}{|y - T(b_j)|} < +\infty \quad (j = 1, \dots, m), \quad (4.26)$$

onde b_1, b_2, \dots, b_m designam os zeros de B . Seja

$$F(z) := \frac{1}{B(z)} [A(z)F(T(z); \sigma) - L_{m-1}(z)], \quad z \in \mathbb{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta]), \quad (4.27)$$

onde L_{m-1} é o polinómio interpolador de Lagrange de grau $m-1$ que coincide com $A(z)F(T(z); \sigma)$ nos zeros de B , i.e., $L_{m-1}(z) := \sum_{j=1}^m M_j B(z)/(z - b_j)$, onde $M_j := A(b_j)F(T(b_j); \sigma)/B'(b_j)$ para $j = 1, \dots, m$ ($L_0(z) \equiv 0$).

Nestas condições, F é a transformada de Stieltjes da função de distribuição τ definida por

$$d\tau(x) := \left| \frac{A(x)}{B(x)} \right| \chi_{T^{-1}([\xi, \eta])}(x) \frac{d\sigma(T(x))}{T'(x)}. \quad (4.28)$$

Demonstração. Sob as hipóteses consideradas, é possível escrever

$$T^{-1}([\xi, \eta]) = \cup_{j=1}^k E_j,$$

onde E_1, \dots, E_k são k intervalos fechados tais que E_j e E_{j+1} têm no máximo um ponto em comum. Para $j = 1, \dots, k$, considerem-se as funções

$$T_j : D_j \rightarrow T(D_j), \quad x \in D_j \mapsto T_j(x) := T(x),$$

onde $D_1 :=]-\infty, y_1]$, $D_j := [y_{j-1}, y_j]$ ($j = 2, \dots, k-1$) e $D_k := [y_{k-1}, +\infty[$. Então, cada T_j é bijectiva e $T_j(E_j) = [\xi, \eta]$ para $j = 1, \dots, k$. Como AB e T' têm o mesmo sinal em cada intervalo E_j de $T^{-1}([\xi, \eta])$ então os zeros de AB estão localizados entre os intervalos E_1, \dots, E_k . Além disso, os zeros a_1, \dots, a_{k-1-m} de A e b_1, \dots, b_m de B satisfazem $T(a_i) \notin]\xi, \eta[$ ($i = 1, \dots, k-1-m$) e $T(b_j) \notin]\xi, \eta[$ ($j = 1, \dots, m$). Prove-se agora que τ define, de facto, uma função de distribuição. Para tal, é suficiente mostrar que

$$\int_{T^{-1}([\xi, \eta])} \left| \frac{A(x)}{B(x)} \right| \frac{d\sigma(T(x))}{T'(x)} < +\infty \quad (4.29)$$

(porque $[\xi, \eta]$ é compacto). Uma vez que os zeros de B e T' são reais e simples, considerando os conjuntos de índices J_1 , J_2 e J_3 definidos por

$$J_1 := \{1, \dots, m\} \setminus \{j : b_j = y_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k-1\}\},$$

$$J_2 := \{1, \dots, k-1\} \setminus \{j : y_j = b_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, m\}\},$$

$$J_3 := \{1, \dots, m\} \cap \{j : b_j = y_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k-1\}\},$$

pode-se escrever

$$\frac{1}{B(x)T'(x)} = \sum_{j \in J_1} \frac{\alpha_{1j}}{x - b_j} + \sum_{j \in J_2} \frac{\alpha_{2j}}{x - y_j} + \sum_{j \in J_3} \frac{\alpha_{3j}}{(x - b_j)^2},$$

onde os α_{ij} 's são números reais. Mas, $T(x) = T(b_j) + T'(b_j)(x - b_j) + \frac{T''(b_j)}{2!}(x - b_j)^2 + \dots + (x - b_j)^k$ (para j fixo). Além disso, se $j \in J_1$ então $T'(b_j) \neq 0$ e $T(x) - T(b_j) = (x - b_j)[T'(b_j) + G_{1j}(x)]$, onde $G_{1j}(x)$ é um polinómio de grau $k-1$ tal que $G_{1j}(b_j) = 0$. Segue-se que

$$\frac{|\alpha_{1j}A(x)|}{|x - b_j|} \leq \frac{K_{1j}}{|T(x) - T(b_j)|}, \quad x \in T^{-1}([\xi, \eta]), \quad j \in J_1$$

onde $K_{1j} := \sup_{x \in T^{-1}([\xi, \eta])} |\alpha_{1j}A(x)||T'(b_j) + G_{1j}(x)| < \infty$. Analogamente, se $j \in J_3$ então $T'(b_j) = 0$ e $T''(b_j) \neq 0$ e $T(x) - T(b_j) = (x - b_j)^2[T''(b_j)/2 + G_{3j}(x)]$, onde $G_{3j}(x)$ é um polinómio de grau $k-2$ tal que $G_{3j}(b_j) = 0$. Assim, deduz-se

$$\frac{|\alpha_{3j}A(x)|}{(x - b_j)^2} \leq \frac{K_{3j}}{|T(x) - T(b_j)|}, \quad x \in T^{-1}([\xi, \eta]), \quad j \in J_3$$

onde $K_{3j} := \sup_{x \in T^{-1}([\xi, \eta])} |\alpha_{3j}A(x)||T''(b_j)/2 + G_{3j}(x)| < \infty$. Finalmente, se $j \in J_2$ então $y_j \neq b_i$ para todo o $i \in \{1, \dots, m\}$ e, além disso, se $T(y_j) = \xi$ ou $T(y_j) = \eta$ para algum j então necessariamente $y_j = a_i$ para algum $i \in \{1, \dots, k-1-m\}$ e pode-se concluir que

$$K_{2j} := \sup_{x \in T^{-1}([\xi, \eta])} \frac{|\alpha_{2j}A(x)|}{|x - y_j|} < \infty, \quad j \in J_2.$$

Este facto é óbvio se $T(y_j) \neq \xi$ e $T(y_j) \neq \eta$ para todo o j . Assim, para $x \in T^{-1}([\xi, \eta])$, tem-se

$$\left| \frac{A(x)}{B(x)T'(x)} \right| \leq K_1 \sum_{j \in J_1} \frac{1}{|T(x) - T(b_j)|} + n_2 K_2 + K_3 \sum_{j \in J_3} \frac{1}{|T(x) - T(b_j)|},$$

onde $K_i := \max_{j \in J_i} K_{ij}$ ($i = 1, 2, 3$) e $n_2 = \#J_2$. Mas, o integral que figura no primeiro membro de (4.29) é igual a

$$\begin{aligned} & \int_{T^{-1}([\xi, \eta])} \left| \frac{A(x)}{B(x)} \frac{1}{T'(x)} \right| \operatorname{sgn} T'(x) d\sigma(T(x)) \leq \\ & \leq K_1 \sum_{j \in J_1} \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \frac{\operatorname{sgn} T'(x)}{|T(x) - T(b_j)|} d\sigma(T(x)) + \\ & + n_2 K_2 \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \operatorname{sgn} T'(x) d\sigma(T(x)) + \\ & + K_3 \sum_{j \in J_3} \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \frac{\operatorname{sgn} T'(x)}{|T(x) - T(b_j)|} d\sigma(T(x)) = \\ & = kK_1 \sum_{j \in J_1} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{|y - T(b_j)|} d\sigma(y) + kn_2 K_2 \mu_0 + \\ & + kK_3 \sum_{j \in J_3} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{|y - T(b_j)|} d\sigma(y) \end{aligned}$$

(efectuou-se a substituição $y = T(x)$, $x \in E_i$). Isto prova (4.29), atendendo à hipótese (4.26). Conclui-se, assim, que a aplicação τ definida por (4.28) é uma função de distribuição, com $\operatorname{supp}(\tau) \subset T^{-1}([\xi, \eta])$. Além disso, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta])$, efectuando a substituição $s = T(x)$ (note-se que AB e T' têm o mesmo sinal em cada intervalo E_j), obtém-se

$$\begin{aligned} F(z; d\tau) &= \sum_{j=1}^k \int_{E_j} \frac{1}{z-x} \left| \frac{A(x)}{B(x)} \right| \frac{d\sigma(T(x))}{T'(x)} \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{z - T_j^{-1}(s)} \frac{A(T_j^{-1}(s))}{B(T_j^{-1}(s)) T'(T_j^{-1}(s))} d\sigma(s). \end{aligned}$$

Uma vez que $T(b_j) \notin]\xi, \eta[$ para $j = 1, \dots, m$, se $s \in]\xi, \eta[$ pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{A(z)}{B(z)} \frac{1}{T(z) - s} &= \sum_{j=1}^k \frac{A(T_j^{-1}(s))}{(z - T_j^{-1}(s)) B(T_j^{-1}(s)) T'(T_j^{-1}(s))} \\ &+ \sum_{j=1}^m \frac{A(b_j)}{B'(b_j)(s - T(b_j))(b_j - z)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $z \in \mathbb{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta])$, deduz-se

$$\begin{aligned} F(z; d\tau) &= \int_{\xi}^{\eta} \frac{A(z)}{B(z)} \frac{1}{T(z) - s} d\sigma(s) \\ &- \sum_{j=1}^m \frac{A(b_j)}{B'(b_j)(z - b_j)} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{T(b_j) - s} d\sigma(s) \\ &= F(z). \end{aligned}$$

□

O lema seguinte estabelece uma relação entre os polinómios numerador de primeira espécie (polinómios associados) correspondentes às sucessões $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$. F. Peherstorfer estabeleceu essencialmente a mesma relação algébrica [75, Teorema 3.4] com base em resultados seus publicados em [74], mas considerando à partida que são conhecidas as relações entre as medidas correspondentes a $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$, ou seja, trabalhando no quadro dos problemas directos. A prova que se apresenta a seguir não assume o conhecimento prévio das medidas de ortogonalidade (que é o ponto de vista dos problemas inversos).

Lema 4.6. *Nas condições do Teorema 4.1, tem-se*

$$P_{nk+m-1}^{(1)}(x) = \Delta_0(2, m-1; x) Q_n(\pi_k(x)) + \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) \eta_{k-1-m}(x) Q_{n-1}^{(1)}(\pi_k(x))$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.

Demonstração. O polinómio associado $P_{nk+m-1}^{(1)}$ admite uma representação da forma

$$P_{nk+m-1}^{(1)}(x) = \alpha(x) Q_n(\pi_k(x)) + \beta(x) Q_{n-1}^{(1)}(\pi_k(x)) \quad (4.30)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ podem depender de x mas não dependem de n . Para provar esta relação, considere-se a seguinte equação de diferenças de segunda ordem (onde x é parâmetro):

$$y_{n+1}(x) = (\pi_k(x) - r_n)y_n(x) - s_n y_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.31)$$

onde r_n e s_n são definidos como no Teorema 4.1. Ora, por um lado, de acordo com (4.10), a solução de (4.31) que satisfaz as condições iniciais $y_0(x) = 1$ e $y_1(x) = \pi_k(x) - r_0$ é dada por $y_n(x) = Q_n(\pi_k(x))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Por outro lado, como a sucessão dos polinómios associados $(Q_{n-1}^{(1)})_n$ satisfaz a mesma RRTT (4.10) satisfeita por $(Q_n)_n$, mas com condições iniciais $y_0(x) = 1$ e $y_1(x) = x - r_1$, então a solução de (4.31) que satisfaz as condições iniciais $y_0(x) = 1$ e $y_1(x) = \pi_k(x) - r_1$ é dada por $y_n(x) = Q_{n-1}^{(1)}(\pi_k(x))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Estas duas soluções de (4.31) são linearmente independentes pois o seu wronskiano nunca se anula. De facto, usando a relação (1.14), aplicada à sucessão $(Q_n)_n$, obtém-se

$$\begin{vmatrix} Q_n(\pi_k(x)) & Q_{n-1}^{(1)}(\pi_k(x)) \\ Q_{n+1}(\pi_k(x)) & Q_n^{(1)}(\pi_k(x)) \end{vmatrix} = s_1 s_2 \cdots s_n \neq 0$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Consequentemente, a solução geral da equação de diferenças (4.31) é

$$y_n(x) = C_1(x) Q_n(\pi_k(x)) + C_2(x) Q_{n-1}^{(1)}(\pi_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $C_1(x)$ e $C_2(x)$ podem depender de x mas não de n . Assim, para provar (4.30) basta mostrar que $y_n(x) = P_{nk+m-1}^{(1)}(x)$ também satisfaz (4.31). Para tal, designe \mathbf{u} a funcional de momentos a respeito da qual $(P_n)_n$ é ortogonal. Então, usando (4.8), tem-se

$$\begin{aligned} P_{nk+m-1}^{(1)}(x) &= \frac{1}{u_0} \left\langle \mathbf{u}_y, \frac{P_{nk+m}(x) - P_{nk+m}(y)}{x - y} \right\rangle \\ &= \frac{1}{u_0} \left\langle \mathbf{u}_y, \frac{\theta_m(x)Q_n(\pi_k(x)) - \theta_m(y)Q_n(\pi_k(y))}{x - y} \right\rangle \\ &= \frac{1}{u_0} \left\langle \mathbf{u}_y, \frac{\theta_m(x) - \theta_m(y)}{x - y} \right\rangle Q_n(\pi_k(x)) \\ &\quad + \frac{1}{u_0} \left\langle \mathbf{u}_y, \theta_m(y) \frac{Q_n(\pi_k(x)) - Q_n(\pi_k(y))}{x - y} \right\rangle \\ &= P_{m-1}^{(1)}(x)Q_n(\pi_k(x)) + R_n(x), \end{aligned}$$

onde

$$R_n(x) := \frac{1}{u_0} \left\langle \mathbf{u}_y, \theta_m(y) \frac{Q_n(\pi_k(x)) - Q_n(\pi_k(y))}{x - y} \right\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, para provar (4.30) é suficiente mostrar que $y_n(x) = R_n(x)$ é também solução da equação de diferenças (4.31). Com efeito, usando a RRTT (4.10) para $(Q_n)_n$, tem-se

$$\begin{aligned} &\pi_k(x)Q_n(\pi_k(x)) - \pi_k(y)Q_n(\pi_k(y)) \\ &= [Q_{n+1}(\pi_k(x)) - Q_{n+1}(\pi_k(y))] + r_n [Q_n(\pi_k(x)) - Q_n(\pi_k(y))] \\ &\quad + s_n [Q_{n-1}(\pi_k(x)) - Q_{n-1}(\pi_k(y))] - [\pi_k(x) - \pi_k(y)] Q_n(\pi_k(y)), \end{aligned}$$

logo, para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \pi_k(x)R_n(x) &= \frac{1}{u_0} \left\langle \mathbf{u}_y, \theta_m(y) \frac{\pi_k(x)Q_n(\pi_k(x)) - \pi_k(y)Q_n(\pi_k(y))}{x - y} \right\rangle \\ &= R_{n+1}(x) + r_n R_n(x) + s_n R_{n-1}(x) \\ &\quad - \frac{1}{u_0} \left\langle \mathbf{u}_y, \frac{\pi_k(x) - \pi_k(y)}{x - y} \theta_m(y) Q_n(\pi_k(y)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Mas, $\theta_m(y)Q_n(\pi_k(y)) = P_{nk+m}(y)$ e $\varrho_{k-1}(y; x) := \frac{\pi_k(x) - \pi_k(y)}{x - y}$ é um polinómio em y de grau $k - 1$ e, portanto, verifica-se

$$\left\langle \mathbf{u}_y, \frac{\pi_k(x) - \pi_k(y)}{x - y} \theta_m(y) Q_n(\pi_k(y)) \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}_y, \varrho_{k-1}(y; x) P_{nk+m}(y) \right\rangle = 0$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$, sendo a última igualdade justificada pela ortogonalidade de $(P_n)_n$ relativamente a \mathbf{u} . Conclui-se, assim, que $R_n(x)$ satisfaz (4.31),

o que implica que, de facto, $P_{nk+m-1}^{(1)}(x)$ é da forma indicada em (4.30). Agora, fazendo $n = 0$ em (4.30), obtém-se

$$\alpha(x) = P_{m-1}^{(1)}(x) = \Delta_0(2, m-1; x)$$

e, para $n = 1$, usando (4.9), deduz-se

$$\begin{aligned} \beta(x) &= P_{k+m-1}^{(1)}(x) - \alpha(x) (\pi_k(x) - r) \\ &= \Delta_0(2, k+m-1; x) - \Delta_0(2, m-1; x) \{P_{m+1}(x) \eta_{k-1-m}(x) \\ &\quad - a_0^{(m+1)} \Delta_0(m+3, m+k-1; x)\} \\ &= \Delta_0(2, m; x) \Delta_0(m+2, m+k-1; x) \\ &\quad - \Delta_0(2, m-1; x) P_{m+1}(x) \eta_{k-1-m}(x) \\ &= \left(\Delta_0(2, m; x) P_m(x) - \Delta_0(2, m-1; x) P_{m+1}(x) \right) \eta_{k-1-m}(x) \\ &= \left(P_m^{(1)}(x) P_m(x) - P_{m-1}^{(1)}(x) P_{m+1}(x) \right) \eta_{k-1-m}(x) \\ &= \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) \eta_{k-1-m}(x), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é justificada pela fórmula (1.14), fazendo $k = 0$ e $n = m - 1$. \square

Estamos agora em condições de analisar o Problema **(P2)** no caso definido-positivo, isto é, no caso em que a SPOM dada, $(P_n)_n$ é ortogonal a respeito de alguma medida de Borel positiva, com suporte infinito e momentos de todas as ordens finitos, ou, equivalentemente, no caso em que os coeficientes da RRTT (4.2) satisfeita pela SPOM $(P_n)_n$ verificam as seguintes condições:

$$b_n^{(j)} \in \mathbb{R}, \quad a_n^{(j)} > 0 \quad (j = 0, 1, \dots, k-1; n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por simplicidade, aqui e ao longo de todo o capítulo, escolhe-se o parâmetro r que figura no enunciado do Teorema 4.1 igual a zero, isto é,

$$r = 0.$$

Sob tais condições, uma vez que

$$P_m(x) = \theta_m(x), \quad P_{k+m}(x) = \theta_m(x) Q_1(\pi_k(x)) = \theta_m(x) \pi_k(x),$$

conclui-se que todos os zeros de cada um dos polinômios θ_m e π_k são reais e distintos (uma vez que os zeros dos polinômios P_m e P_{k+m} são reais e distintos). E, conseqüentemente, pelo teorema de Rolle, também todos os $k - 1$ zeros de π'_k são reais e distintos.

Teorema 4.7. *Nas condições do Teorema 4.1 (e com $r = 0$), suponha-se que $(P_n)_n$ é uma SPOM no sentido definido-positivo, ortogonal a respeito da medida $d\sigma$. Então $(Q_n)_n$ é também uma SPOM no sentido definido-positivo, ortogonal a respeito de uma medida $d\tau$. Suponha-se ainda que:*

(i) $\text{supp}(d\tau)$ é um conjunto compacto; logo, existem ξ e η tais que

$$-\infty < \xi := \min \text{supp}(d\tau) < \eta := \max \text{supp}(d\tau) < +\infty.$$

(ii) Se $m \geq 1$,

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{d\tau(x)}{|x - \pi_k(z_i)|} < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

onde $z_1 < z_2 < \dots < z_m$ são os zeros de θ_m .

(iii) $\pi_k(y_{2i-1}) \geq \eta$ e $\pi_k(y_{2i}) \leq \xi$ se k é ímpar, ou $\pi_k(y_{2i-1}) \leq \xi$ e $\pi_k(y_{2i}) \geq \eta$ se k é par, onde $y_1 < \dots < y_{k-1}$ designam os zeros de π'_k .

(iv) $(\theta_m \eta_{k-1-m})(x)$ e $\pi'_k(x)$ têm o mesmo sinal em cada ponto $x \in \pi_k^{-1}([\xi, \eta])$.

Nestas condições, a transformada de Stieltjes $F(\cdot; d\sigma)$ é dada em função da transformada de Stieltjes $F(\cdot; d\tau)$ pela fórmula

$$F(z; d\sigma) = \frac{-v_0 \Delta_0(2, m-1; z) + \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) \eta_{k-1-m}(z) F(\pi_k(z); d\tau)}{\theta_m(z)},$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus \left(\pi_k^{-1}([\xi, \eta]) \cup \{z_1, \dots, z_m\} \right),$$

onde se assume a condição de normalização

$$v_0 := \int_{\xi}^{\eta} d\tau = \int_{\text{supp}(d\sigma)} d\sigma =: u_0.$$

Além disso, a medida $d\sigma$ é dada explicitamente em função da medida $d\tau$ por

$$d\sigma(x) = \sum_{i=1}^m M_i \delta(x - z_i) dx + \chi_{\pi_k^{-1}([\xi, \eta])}(x) \left| \frac{\eta_{k-1-m}(x)}{\theta_m(x)} \right| \frac{d\tau(\pi_k(x))}{\pi'_k(x)} \quad (4.32)$$

(a menos de factores constantes) onde, se $m \geq 1$,

$$M_i := \frac{v_0 \Delta_0(2, m-1; z_i) / \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) - \eta_{k-1-m}(z_i) F(\pi_k(z_i); d\tau)}{\theta'_m(z_i)} \geq 0 \quad (4.33)$$

para todo o $i = 1, \dots, m$.

Demonstração. Pelos Teorema 1.11 (de Markov) e Lema 4.6, e atendendo ao Teorema 4.1, para $z \in \mathbb{C} \setminus \pi_k^{-1}([\xi, \eta]) \cup \{z_1, \dots, z_m\}$, deduz-se

$$\begin{aligned}
F(z; d\sigma) &= -u_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{nk+m-1}^{(1)}(z)}{P_{nk+m}(z)} \\
&= \frac{-v_0 \Delta_0(2, m-1; z) + \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) \eta_{k-1-m}(z) F(\pi_k(z); d\tau)}{\theta_m(z)} \\
&= \frac{-v_0 \Delta_0(2, m-1; z) + \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) L_{m-1}(z)}{\theta_m(z)} \\
&\quad + \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) \frac{\eta_{k-1-m}(z) F(\pi_k(z); d\tau) - L_{m-1}(z)}{\theta_m(z)} \\
&= \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) \left(\sum_{i=1}^m \frac{M_i}{z_i - z} + \frac{\eta_{k-1-m}(z) F(\pi_k(z); d\tau) - L_{m-1}(z)}{\theta_m(z)} \right),
\end{aligned}$$

onde L_{m-1} é o polinômio interpolador de Lagrange de grau $m-1$ que coincide com $\eta_{k-1-m} F(\pi_k(\cdot); d\tau)$ nos zeros de θ_m . Assim, obtém-se a representação (4.32) do Lema 4.5, com $A = \eta_{k-1-m}$ e $B = \theta_m$. Resta provar (4.33), i.e., que $M_i \geq 0$ para todo o $i = 1, \dots, m$. Seja $(p_n)_n$ a sucessão ortonormal correspondente à SPOM $(P_n)_n$, i.e.,

$$p_n(x) = \left(u_0 \prod_{i=1}^n \gamma_i \right)^{-\frac{1}{2}} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.34)$$

onde $\gamma_{nk+j} := a_n^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$; $n = 0, 1, 2, \dots$). Recorde-se que

$$P_{n+1}(x)P_{n+1}^{(1)}(x) - P_{n+2}(x)P_n^{(1)}(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \gamma_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.35)$$

Mudando n em $nk+m-1$ em (4.35) e fazendo $x = z_i$ na equação resultante, obtém-se

$$P_{nk+m+1}(z_i)P_{nk+m-1}^{(1)}(z_i) = - \prod_{j=1}^{nk+m} \gamma_j = - \prod_{j=1}^{nk} \gamma_j \prod_{j=1}^m a_n^{(j)} \quad (4.36)$$

para todos os números $n = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, m$. Além disso, tomando $j = m$ em (4.2) e fazendo $x = z_i$ na equação resultante, obtém-se

$$a_n^{(m)} = - \frac{P_{nk+m+1}(z_i)}{P_{nk+m-1}(z_i)} \quad (i = 1, \dots, m; n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.37)$$

(Note-se que $P_{nk+m-1}(z_i) \neq 0$, pois z_i é um zero de P_{nk+m} para cada n e os polinômios ortogonais P_{nk+m} e P_{nk+m-1} não têm zeros comuns.) Combinando

as relações (4.34), (4.36) e (4.37), conclui-se que

$$p_{kn}^2(z_i) = \frac{P_{kn}^2(z_i)}{u_0 \prod_{j=1}^{nk} \gamma_j} = \frac{P_{kn}^2(z_i) \prod_{j=1}^{m-1} a_n^{(j)}}{u_0 P_{nk+m-1}(z_i) P_{nk+m-1}^{(1)}(z_i)} \quad (4.38)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, m$. Agora, pelo Lema 4.6, para todo o x tal que $Q_n(\pi_k(x)) \neq 0$, pode-se escrever

$$u_0 P_{nk+m-1}^{(1)}(x) = \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) Q_n(\pi_k(x)) F_n(x), \quad (4.39)$$

onde

$$F_n(x) := u_0 \Delta_0(2, m-1; x) / \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) - \eta_{k-1-m}(x) \left(-u_0 \frac{Q_{n-1}^{(1)}(\pi_k(x))}{Q_n(\pi_k(x))} \right).$$

Como $P_{kn+m}(x) = \theta_m(x) Q_n(\pi_k(x))$ então $P'_{kn+m}(z_i) = \theta'_m(z_i) Q_n(\pi_k(z_i))$ para $i = 1, \dots, m$. Como $P'_{kn+m}(z_i) \neq 0$ (pois P_{kn+m} e P'_{nk+m} não têm zeros comuns) e $\theta'_m(z_i) \neq 0$, então também $Q_n(\pi_k(z_i)) \neq 0$ para todos os $n = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, m$. Além disso, de (4.39), obtém-se

$$u_0 P_{nk+m-1}^{(1)}(z_i) = \left(\prod_{j=1}^m a_0^{(j)} \right) P'_{kn+m}(z_i) F_n(z_i) / \theta'_m(z_i)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, m$. Substituindo em (4.38), deduz-se

$$p_{kn}^2(z_i) = \frac{P_{kn}^2(z_i)}{P_{nk+m-1}(z_i) P'_{kn+m}(z_i)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m-1} a_n^{(j)}}{\prod_{j=1}^m a_0^{(j)}} \cdot \frac{\theta'_m(z_i)}{F_n(z_i)} \quad (4.40)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, m$. Usando a desigualdade (cf. [19, pg. 24]) $P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), com $nk+m-1$ no lugar de n e $x = z_i$, obtém-se $P_{nk+m-1}(z_i)P'_{nk+m}(z_i) > 0$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, m$. Assim, de (4.40), obtém-se $\theta'_m(z_i)/F_n(z_i) > 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, m$ e, portanto,

$$M_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n(z_i)}{\theta'_m(z_i)} \geq 0$$

para todo o $i = 1, \dots, m$. □

Observação 4.8. *Em particular, nas condições do Teorema 4.7, se $d\tau$ é uma medida absolutamente contínua com densidade (função peso) w_τ , então a parte absolutamente contínua de $d\sigma$ tem densidade*

$$w_\sigma(x) := \left| \frac{\eta_{k-1-m}(x)}{\theta_m(x)} \right| w_\tau(\pi_k(x)),$$

a qual tem suporte contido na união de no máximo k intervalos fechados; e $d\sigma$ pode ainda ter “pontos de massa” localizados nos zeros de θ_m .

4.4 O caso $m = 0$

Nesta secção analisa-se detalhadamente o caso em que $m = 0$ (e $k \geq 2$, arbitrário). A aplicação dos resultados anteriores, nesta situação, permitirá obter resultados conhecidos na literatura. Por exemplo, o Teorema 4.1 pode ser usado para estabelecer condições para a existência de uma transformação polinomial no sentido descrito por J. Geronimo e W. Van Assche [28]. De facto, tais condições apareceram no trabalho [16] de J. Charris, M.E.H. Ismail e S.Monsalve, embora neste trabalho não tenham aparecido explicitamente no âmbito de uma proposição. Por outro lado, veremos adiante que estes resultados têm interesse no contexto da chamada ortogonalidade sobre a circunferência unitária.

Teorema 4.9. *Seja $(P_n)_n$ uma SPOM caracterizada pela RRTT (4.2), definida por blocos. Sejam $\Delta_0(x) := 0$ e*

$$\Delta_n(x) := a_n^{(0)} \Delta_{n-1}(2, k-2; x) + a_n^{(1)} \Delta_n(3, k-1; x) - a_0^{(1)} \Delta_0(3, k-1; x) \quad (4.41)$$

para todo o $n = 1, 2, 3, \dots$ e suponha-se que as duas condições seguintes se verificam para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$:

- (i) $b_n^{(0)}$ e $\Delta_n(2, k-1; x)$ são independentes de n para todo x ;
- (ii) $\Delta_n(x)$ é independente de x para todo o n .

Sejam $b, c \in \mathbb{C}$, com $c \neq 0$, e defina-se o polinómio T (de grau k) por

$$T(x) := c (\Delta_0(1, k-1; x) - b).$$

Seja $(\tilde{Q}_n)_n$ a SPOM caracterizada pela seguinte RRTT

$$\tilde{Q}_{n+1}(x) = (x - \tilde{r}_n) \tilde{Q}_n(x) - \tilde{s}_n \tilde{Q}_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

com condições iniciais $\tilde{Q}_{-1}(x) = 0$ e $\tilde{Q}_0(x) = 1$, onde

$$\tilde{r}_n := c(\Delta_n(0) - b), \quad \tilde{s}_n := c^2 a_n^{(0)} a_{n-1}^{(1)} \cdots a_{n-1}^{(k-1)}.$$

Então

$$P_{kn}(x) = c^{-n} \tilde{Q}_n(T(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso, para cada $j = 1, 2, \dots, k-1$, tem-se

$$P_{kn+j}(x) = \frac{c^{-n}}{\Delta_0(2, k-1; x)} \left\{ c^{-1} \Delta_n(2, j-1; x) \tilde{Q}_{n+1}(T(x)) + a_n^{(1)} a_n^{(2)} \cdots a_n^{(j)} \Delta_n(j+2, k-1; x) \tilde{Q}_n(T(x)) \right\}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.

Demonstração. Considerando $m = 0$ no Teorema 4.1, deduz-se

$$P_{kn+j}(x) = \frac{1}{\Delta_0(2, k-1; x)} \left\{ \Delta_n(2, j-1; x) Q_{n+1}(\pi_k(x)) \right. \\ \left. + a_n^{(1)} a_n^{(2)} \cdots a_n^{(j)} \Delta_n(j+2, k-1; x) Q_n(\pi_k(x)) \right\}$$

para todos os $j = 0, 1, \dots, k-1$ e $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\pi_k(x) = \Delta_0(1, k-1; x)$$

e $(Q_n)_n$ é a SPOM caracterizada pela RRTT (4.10), com

$$r_0 := 0, \quad r_n := \Delta_n(0), \quad s_n := a_n^{(0)} a_{n-1}^{(1)} a_{n-1}^{(2)} \cdots a_{n-1}^{(k-1)}$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Assim, a prova do Teorema 4.9 obtém-se notando que

$$\tilde{Q}_n(x) = c^n Q_n(c^{-1}x + b), \quad \tilde{r}_n = c(r_n - b), \quad \tilde{s}_n = c^2 s_n$$

para todo o n , e que $T(x) = c(\pi_k(x) - b)$. \square

Do Teorema 4.7 obtém-se a proposição seguinte. Trata-se, essencialmente, de um resultado estabelecido por J. Geronimo e W. Van Assche [28].

Teorema 4.10. *Nas condições do Teorema 4.9, se $(P_n)_n$ é uma SPOM no sentido definido positivo, ortogonal a respeito da medida $d\sigma$, então $(\tilde{Q}_n)_n$ é também uma SPOM no sentido definido positivo, ortogonal a respeito de uma medida $d\tau$. Além disso, suponha-se que se verifica a condição de normalização $\int_{\mathbb{R}} d\tau = \int_{\mathbb{R}} d\sigma$, bem como as três condições seguintes:*

(i) $\text{supp}(d\tau)$ é um conjunto compacto, de modo que se pode escrever

$$-\infty < \xi := \min \text{supp}(d\tau) < \eta := \max \text{supp}(d\tau) < +\infty;$$

(ii) $T(y_{2i-1}) \geq \eta$ e $T(y_{2i}) \leq \xi$ (para todo o i) se k é ímpar, ou $T(y_{2i-1}) \leq \xi$ e $T(y_{2i}) \geq \eta$ se k é par, onde $y_1 < \dots < y_{k-1}$ designam os zeros de T' ;

(iii) os polinómios $W(x) := \Delta_0(2, k-1; x)$ e $T'(x)$ têm o mesmo sinal em cada ponto $x \in T^{-1}([\xi, \eta])$.

Nestas condições, tem-se

$$F(z; d\sigma) = W(z) F(T(z); d\tau), \quad z \in \mathbb{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta]).$$

Além disso, a menos de um factor constante,

$$d\sigma(x) = |W(x)| \frac{d\tau(T(x))}{T'(x)}, \quad (4.42)$$

e o suporte de $d\sigma$ está contido em $T^{-1}([\xi, \eta])$ (uma união k intervalos).

Observação 4.11. A Figura 4.1 ilustra o Teorema 4.10 para $k = 5$ e $m = 0$.

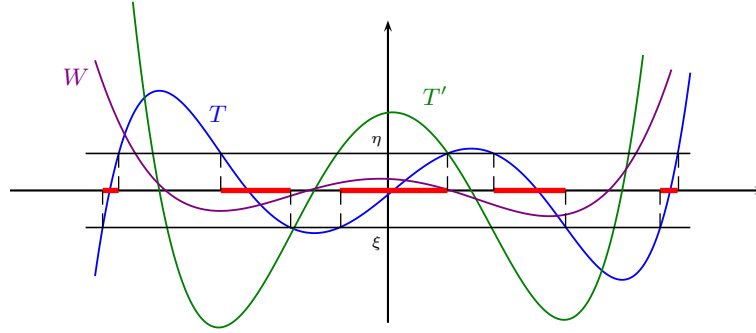


Figura 4.1

Polinômios crivados generalizados em $\partial\mathbb{D}$

De seguida aplicam-se os resultados anteriores para resolver um problema no âmbito da teoria dos polinômios ortogonais na circunferência unitária, recuperando resultados conhecidos contidos em trabalhos de M. E. H. Ismail e X. Li [33] e de J. Petronilho [80]. Antes, porém, é conveniente fazer uma incursão pela teoria dos PO's sobre a circunferência. Os aspectos principais desta teoria foram compilados por Barry Simon nas monografias [84, 85] e no artigo [86]. O círculo unitário será designado por \mathbb{D} e a circunferência unitária por $\partial\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Deste modo, a expressão “SPOM em $\partial\mathbb{D}$ ” será usada como abreviatura de “sucessão de polinômios ortogonais mónicos na circunferência unitária”. Seja $d\mu$ uma medida de Borel positiva no intervalo $[0, 2\pi]$, com momentos de todas as ordens finitos, e cujo suporte é um conjunto infinito. Designe $(\Phi_n)_n$ a SPOM em $\partial\mathbb{D}$ ortogonal a respeito de medida $d\mu$, isto é, cada Φ_n é um polinómio mónico de grau n e

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{i\theta}) \overline{\Phi_m(e^{i\theta})} d\mu(\theta) = \lambda_n \delta_{nm} \quad (\lambda_n > 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

É bem conhecido que $(\Phi_n)_n$ satisfaz a relação de recorrência de Szegő

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.43)$$

com $\Phi_0(z) = 1$ e $|\Phi_n(0)| < 1$ para todo o $n = 1, 2, \dots$, onde Φ_n^* é um polinómio de grau n , chamado polinómio recíproco de Φ_n , definido por

$$\Phi_n^*(z) := z^n \overline{\Phi_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Decorre de (4.43) que uma SPOM em $\partial\mathbb{D}$, $(\Phi_n)_n$, é determinada de modo único pela sucessão $(\Phi_n(0))_n$. Os parâmetros $\Phi_n(0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) são designados por *coeficientes de reflexão* (ou de Szegö, ou de Schur, ou de Verblunsky). Por outro lado, dada uma sucessão de números complexos $(\alpha_n)_n$, com $|\alpha_n| < 1$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, existe uma única medida de Borel $d\mu$ com suporte contido em $[0, 2\pi]$ tal que a correspondente SPOM em $\partial\mathbb{D}$ satisfaz $\Phi_n(0) = -\bar{\alpha}_n$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. A transformada de Herglotz de uma medida de Borel positiva $d\mu$ com suporte em $[0, 2\pi]$ é definida por

$$C(z; d\mu) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta), \quad |z| < 1.$$

$C(z; d\mu)$ é uma função analítica em \mathbb{D} com parte real positiva, i.e., é uma função de Carathéodory. Reciprocamente, dada uma função de Carathéodory, C , existe uma única medida de Borel $d\mu$ tal que C é a correspondente transformada de Herglotz. Este facto resulta da seguinte fórmula de inversão de Stieltjes:

$$\frac{\mu(\theta + 0) + \mu(\theta - 0)}{2} = \text{const.} + \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^\theta \text{Re}\{C(re^{i\varphi}, \mu)\} d\varphi.$$

Para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, define-se

$$\Omega_n(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} [\Phi_n(e^{i\theta}) - \Phi_n(z)] d\mu(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Os polinómios da sucessão $(\Omega_n)_n$ assim definida são chamados os *polinómios associados de segunda espécie* correspondentes à SPOM $(\Phi_n)_n$. Estes polinómios satisfazem a relação de recorrência

$$\Omega_{n+1}(z) = z\Omega_n(z) - \Phi_n(0)\Omega_n^*(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

logo constituem eles próprios uma SPOM em $\partial\mathbb{D}$. Existe uma ligação importante entre a ortogonalidade na recta real e a ortogonalidade na circunferência, usualmente designada por *transformação de Szegö*. Para descrever esta transformação, considere-se uma SPOM $(P_n)_n$ ortogonal no sentido definido positivo a respeito da função de distribuição $d\sigma$ cujo suporte seja um subconjunto do intervalo $[-1, 1]$. Nestas condições, pode-se definir uma função de distribuição em $[0, 2\pi]$ por

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \sigma(1) - \sigma(\cos \theta) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \sigma(1) + \sigma(\cos \theta) & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.44)$$

onde $\sigma(\theta) := d\sigma(\{t : 0 \leq t \leq \theta\})$ e $\mu(\theta) := d\mu(\{t : 0 \leq t < \theta\})$. É usual representar a medida $d\mu$ definida por (4.44) do modo seguinte:

$$d\mu(\theta) = |d\sigma(\cos \theta)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Em particular, se $d\mu$ é absolutamente contínua e w_μ é a correspondente função peso, então $d\sigma$ é também absolutamente contínua e, designando por w_σ a correspondente função peso, tem-se

$$w_\mu(\theta) = |\sin \theta| w_\sigma(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Seja $(\Phi_n)_n$ a SPOM em $\partial\mathbb{D}$ ortogonal a respeito da medida $d\mu$ definida acima. Então, pode-se mostrar que os coeficientes de cada polinômio Φ_n são reais e que a relação entre $(\Phi_n)_n$ e $(P_n)_n$ pode ser obtida a partir da igualdade

$$\begin{pmatrix} P_n(x) \\ (z - z^{-1})Q_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & \varepsilon_n \\ \omega_n & -\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-n}\Phi_{2n}(z) \\ z^n\Phi_{2n}(z^{-1}) \end{pmatrix},$$

onde

$$x = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \varepsilon_n := \frac{2^{-n}}{1 + \Phi_{2n}(0)}, \quad \omega_n := \frac{2^{1-n}}{1 - \Phi_{2n}(0)},$$

e $(Q_n)_n$ é a SPOM em \mathbb{R} a respeito da medida $(1-x^2)d\sigma$. Utilizando a igualdade anterior é possível mostrar que

$$\Phi_{2n}(z) = 2^{n-1}z^n \left\{ (1 + \Phi_{2n}(0))P_n(x) + \frac{z - z^{-1}}{2}(1 - \Phi_{2n}(0))Q_{n-1}(x) \right\}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, os coeficientes β_n e γ_n que figuram na RRTT (1.6) satisfeita pela SPOM $(P_n)_n$ estão relacionados com os coeficientes de Verblunsky através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} 2\beta_n &= \Phi_{2n-1}(0)(1 - \Phi_{2n}(0)) - \Phi_{2n+1}(0)(1 + \Phi_{2n}(0)), \\ 4\gamma_{n+1} &= (1 - \Phi_{2n+1}(0))(1 - \Phi_{2n+1}^2(0))(1 + \Phi_{2n}(0)) \end{aligned}$$

para todo o $n = 0, 1, \dots$. Usando estas fórmulas, pode-se mostrar que

$$Q_{n-1}(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \left\{ P_{n+1}(x) + (\beta_n - \Phi_{2n-1}(0))P_n(x) - \frac{1 + \Phi_{2n}(0)}{1 - \Phi_{2n}(0)}\gamma_n P_{n-1}(x) \right\}$$

para todo o $n = 0, 1, \dots$. Finalmente, refira-se que as funções de Stieltjes e de Caratheodory definidas por $d\sigma$ e $d\mu$ (resp.) estão relacionadas pela fórmula

$$F(z, d\sigma) = \frac{2z}{1 - z^2} C(z; d\mu), \quad x = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad (|x| \rightarrow +\infty).$$

Os resultados sobre transformações polinomiais atrás estabelecidos permitem estudar os chamados polinômios (ortogonais) crivados na circunferência unitária, bem como generalizações destes. Mais precisamente, a teoria desenvolvida sobre transformações polinomiais (na recta real) permite resolver o seguinte problema inverso da teoria dos polinômios ortogonais na circunferência unitária.

(P) Seja $(\Phi_n)_n$ uma SPOM em $\partial\mathbb{D}$ e seja $-1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ a correspondente sucessão de coeficientes de Verblunsky. Suponha-se ainda que $\alpha_n \in (-1, 1)$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Seja $k \geq 2$ um número inteiro e fixem-se arbitrariamente $k - 1$ números reais $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in (-1, 1)$. Designe $(\tilde{\Phi}_n)_n$ a SPOM em $\partial\mathbb{D}$ caracterizada pela sucessão de coeficientes de Verblunsky $-1, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots$, definida por

$$\tilde{\alpha}_{nk-1} := \alpha_{n-1}, \quad \tilde{\alpha}_{2nk+j-1} := -b_j, \quad \tilde{\alpha}_{(2n+1)k+j-1} = b_{k-j}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $j = 1, \dots, k - 1$. O problema consiste em descrever as propriedades da SPOM $(\tilde{\Phi}_n)_n$ em termos das propriedades da SPOM $(\Phi_n)_n$, bem como obter uma representação da medida de ortogonalidade para $(\tilde{\Phi}_n)_n$ em função da medida de ortogonalidade para $(\Phi_n)_n$.

Observe-se que, de um ponto de vista algébrico, este problema pode ser interpretado do seguinte modo: parte-se de uma sucessão de coeficientes de Verblunsky, $-1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, e perturba-se esta sucessão, inserindo entre cada dois coeficientes um bloco com $k - 1$ números reais, obtendo-se assim a nova sucessão de coeficientes de Verblunsky

$$\begin{aligned} & -1, -b_1, \dots, -b_{k-1}, \alpha_0, b_{k-1}, \dots, b_1, \\ & \alpha_1, -b_1, \dots, -b_{k-1}, \alpha_2, b_{k-1}, \dots, b_1, \alpha_3, \dots \end{aligned} \quad (4.45)$$

(Trata-se da sucessão $(\tilde{\alpha}_n)_n$ definida em (P)).

Se $b_1 = b_2 = \dots = b_{k-1} = 0$ então (4.45) coincide com a sucessão dos coeficientes de Verblunsky dos chamados polinómios crivados em $\partial\mathbb{D}$, estudados por vários autores, nomeadamente, V. M. Badkov [8], F. Marcellán e G. Sansigre [45, 46] e M. E. H. Ismail e Xin Li [33], os quais resolveram o problema nesta situação particular. Para b_1, b_2, \dots, b_{k-1} arbitrários, o problema (P) foi resolvido por J. Petronilho em [80] usando uma transformação polinomial adequada entre as SPOM's na recta real $(P_n)_n$ e $(\tilde{P}_n)_n$ correspondentes (pela transformação de Szegő) às SPOM's na circunferência $(\Phi_n)_n$ e $(\tilde{\Phi}_n)_n$ (resp.). Esta transformação polinomial pode ser descrita usando os resultados estabelecidos anteriormente. Com efeito, pondo

$$d := \left(\prod_{j=1}^{k-1} ((1 - b_j^2)/2) \right)^{1/k},$$

de acordo com os resultados de [80], tem-se

$$\tilde{P}_n(x) = d^n \hat{P}_n\left(\frac{x}{d}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $(\widehat{P}_n)_n$ é uma SPOM (na recta real) caracterizada pela RRTT

$$\widehat{P}_{n+1} = (x - \widehat{\beta}_n)\widehat{P}_n - \widehat{\gamma}_n\widehat{P}_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

sendo as sucessões $(\widehat{\beta}_n)_n$ e $(\widehat{\gamma}_n)_n$ definidas à custa dos números b_1, \dots, b_{k-1} e dos coeficientes de Verblunsky $(\alpha_n)_n$ de $(\Phi_n)_n$ —cf. (3.3) e (3.4) em [80]. Definindo $\widehat{\Delta}_n(i, j; \cdot)$ e $\widehat{\Delta}_n$ como em (4.4), (4.5) e (4.41), mas com $a_n^{(\nu)}$ e $b_n^{(\nu)}$ substituídos por $\widehat{\gamma}_{nk+\nu}$ e $\widehat{\beta}_{nk+\nu}$ (resp.), segue-se de [80, Lema 3.3 e fórmula (3.8)] que $(P_n)_n$ satisfaz a RRTT

$$P_{n+1}(x) = \left(x - \widehat{\Delta}_n(0) + \Phi_1(0)\right) P_n(x) - \left(\prod_{j=0}^{k-1} \widehat{\gamma}_{nk-j}\right) P_{n-1}(x)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Atendendo a [80, Lema 3.1], $\widehat{\beta}_{nk}$ e $\widehat{\Delta}_n(2, k-1; x)$ são independentes de n e $\widehat{\Delta}_n(x)$ é independente de x . Além disso, definindo

$$T(x) := \widehat{\Delta}_0(1, k-1; x) - \Phi_1(0), \quad W(x) := \widehat{\Delta}_0(2, k-1; x),$$

do Teorema 4.9 obtém-se

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{kn+j}(x) = & \frac{1}{W(x)} \left\{ \widehat{\Delta}_n(2, j-1; x) P_{n+1}(T(x)) \right. \\ & \left. + \left(\prod_{i=1}^j \widehat{\gamma}_{nk+i}\right) \widehat{\Delta}_n(j+2, k-1; x) P_n(T(x)) \right\} \end{aligned}$$

para quaisquer $n = 0, 1, 2, \dots$ e $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Em particular,

$$\widehat{P}_{nk}(x) = P_n(T(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Atendendo agora a [80, Lema 3.6] constata-se que todas as hipóteses do Teorema 4.10 são verificadas, logo

$$F(z, d\tilde{\sigma}) = \frac{1}{d} W\left(\frac{z}{d}\right) F\left(T\left(\frac{z}{d}\right), d\sigma\right), \quad \frac{z}{d} \in \mathbb{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta])$$

e (a menos de factores constantes)

$$d\tilde{\sigma}(x) = \left| W\left(\frac{x}{d}\right) \right| \frac{d\sigma\left(T\left(\frac{x}{d}\right)\right)}{T'\left(\frac{x}{d}\right)}, \quad \frac{x}{d} \in T^{-1}([\xi, \eta]),$$

onde o suporte de $d\tilde{\sigma}$ está contido numa união de k intervalos na recta real. Finalmente, pela transformação de Szegö, obtém-se [80]

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu}(\theta) &= |d\tilde{\sigma}(\cos \theta)| \\ &= -\operatorname{sgn}\{\sin \theta\} \left| W\left(\frac{\cos \theta}{d}\right) \right| \frac{d\sigma\left(T\left(\frac{\cos \theta}{d}\right)\right)}{T'\left(\frac{\cos \theta}{d}\right)}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Observe-se que o suporte da medida $d\tilde{\mu}$ está contido numa união de vários arcos da circunferência unitária, distribuídos dois a dois de forma simétrica

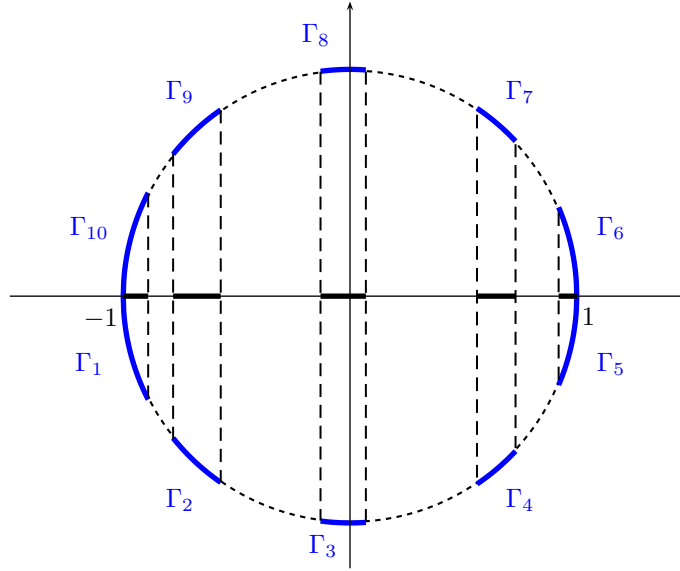


Figura 4.2

relativamente ao eixo real. Estes arcos são determinados projectando sobre $\partial\mathbb{D}$ os k intervalos determinados pelo conjunto $dT^{-1}([\xi, \eta])$ (cf. Figura 4.2). Todos estes conjuntos podem ser definidos explicitamente (veja-se [80]).

Observação 4.12. Se $b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$, então T e W são essencialmente polinómios de Chebyshev de primeira e de segunda espécie (resp.):

$$T(x) = T_k(dx), \quad W(x) = dU_{k-1}(dx), \quad d := 2^{(1-k)/k}.$$

Neste caso a fórmula precedente para a medida reduz-se a

$$d\tilde{\mu}(\theta) = \frac{1}{k} d\mu(k\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

que é a medida para os polinómios crivados em $\partial\mathbb{D}$ obtida em [8, 33]. A união dos arcos dá todo o círculo unitário e tem-se [8, 33]

$$\tilde{\Phi}_{nk+j}(z) = z^j \Phi_n(z^k), \quad j = 0, 1, \dots, k-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Observação 4.13. A determinação explícita dos polinómios da sucessão $(\tilde{\Phi}_n)_n$ para b_1, \dots, b_{k-1} arbitrários, em função dos polinómios da sucessão $(\Phi_n)_n$, pode obter-se usando o Teorema 4.1 e as relações entre as ortogonalidades na recta real e na circunferência unitária, descritas atrás (cf. [80]).

4.5 O caso $m = k - 1$

Nesta secção assume-se que $k \geq 3$ e $m = k - 1$. Fixem-se $2k$ números complexos $b_0, \dots, b_{k-1}, c_0, \dots, c_{k-1}$, com $c_j \neq 0$ para todo o $j = 0, 1, \dots, k - 1$. Seja $(P_n)_n$ uma SPOM caracterizada por (4.2) com as seguintes condições:

$$\begin{aligned} b_n^{(j)} &:= b_j \quad (0 \leq j \leq k - 1) \\ a_n^{(j)} &:= c_j \quad (1 \leq j \leq k - 2) \\ a_1^{(0)} &:= c_0, \quad a_0^{(k-1)} := c_{k-1} \\ a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(k-1)} &= c_0 + c_{k-1} \end{aligned} \tag{4.46}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Aqui, $a_{n+1}^{(0)}$ e $a_n^{(k-1)}$ são números complexos não nulos que *a priori* podem depender de n . De seguida mostra-se que esta SPOM $(P_n)_n$ pode ser descrita por uma transformação polinomial do tipo indicado no Teorema 4.1 (com $m = k - 1$). (A última condição em (4.46) foi imposta, justamente, para que $(P_n)_n$ possa ser descrita por uma transformação polinomial—de acordo com a Observação 4.4). Com efeito, seja φ_k o polinómio mónico de grau k definido por

$$\varphi_k(x) := \begin{vmatrix} x - b_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & x - b_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & x - b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - b_{k-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{k-2} & x - b_{k-2} & 1 \\ c_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{k-1} & x - b_{k-1} \end{vmatrix},$$

e $\Delta_{r,s}(x)$ o polinómio de grau $s - r + 1$ assim definido: se $0 \leq r < s \leq k - 1$,

$$\Delta_{r,s}(x) := \begin{vmatrix} x - b_r & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{r+1} & x - b_{r+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{r+2} & x - b_{r+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - b_{s-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_s & x - b_s \end{vmatrix}; \tag{4.47}$$

e, se $r \leq s$,

$$\Delta_{r,s}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } s < r - 1 \\ 1 & \text{se } s = r - 1 \\ x - b_r & \text{se } s = r. \end{cases}$$

Como $\Delta_n(1, k-2; x) = \Delta_{0, k-2}(x)$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ então as condições (i) e (ii) do Teorema 4.1 são verificadas. Além disso,

$$\theta_{k-1}(x) = \Delta_{0, k-2}(x).$$

Por outro lado, manipulando o determinante que define $\varphi_k(x)$, verifica-se facilmente que o polinômio π_k que figura no Teorema 4.1 é dado por

$$\pi_k(x) = \Delta_{0, k-1}(x) - c_0 \Delta_{1, k-2}(x) = \varphi_k(x) + (-1)^k \left(c_0 + \prod_{i=1}^{k-1} c_i \right). \quad (4.48)$$

Finalmente, tem-se $\Delta_n(2, k-2; x) = \Delta_{1, k-2}(x)$ e $\Delta_n(1, k-3; x) = \Delta_{0, k-3}(x)$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, logo, tendo em conta a última equação de (4.46), conclui-se que o polinômio $r_n(x)$ definido no Teorema 4.1 é dado por

$$r_n(x) = \left(a_{n+1}^{(0)} - c_0 \right) \left(\Delta_{1, k-2}(x) - \Delta_{0, k-3}(x) \right) \quad (4.49)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Esta igualdade permite encontrar condições que assegurem que a hipótese (iv) do Teorema 4.1 se verifica, i.e., tais que $r_n(x)$ seja independente de x para todo o n . Por exemplo, se $k = 3$ então

$$r_n(x) = \left(a_{n+1}^{(0)} - c_0 \right) (b_0 - b_1)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, i.e., $r_n(x)$ é sempre independente de x . Porém, se $k = 4$ tem-se

$$r_n(x) = \left(a_{n+1}^{(0)} - c_0 \right) \left((b_0 - b_2)(x - b_1) + c_1 - c_2 \right)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$; e, assim, $r_n(x)$ é independente de x se e só se $b_0 = b_2$ ou $a_{n+1}^{(0)} = c_0$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. De seguida analisam-se detalhadamente duas situações em que $r_n(x)$ é independente de x .

SPO's com coeficientes de recorrência periódicos

Escolhendo $a_{n+1}^{(0)}$ e $a_n^{(k-1)}$ em (4.46) independentes de n , i.e.,

$$a_{n+1}^{(0)} = c_0, \quad a_n^{(k-1)} = c_{k-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

decorre de (4.49) que $r_n(x) \equiv 0$ (independente de x) e, portanto, todas as hipóteses do Teorema 4.1 são verificadas. Além disso, uma vez que $r_0 = r_n = 0$ e $s_n = \text{const.} = c_0 c_1 \cdots c_{k-1}$ ($n = 1, 2, \dots$), então Q_n é, a menos de uma transformação afim da variável, um polinômio de Chebyshev de segunda espécie,

$$Q_n(x) = s_1^{n/2} U_n(x/(2\sqrt{s_1})), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Note-se que, nesta situação, os coeficientes que figuram na RRTT para $(P_n)_n$ são sucessões periódicas de período k , i.e., a SPOM $(P_n)_n$ é caracterizada por

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.50)$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$, onde

$$\beta_{nk+i} := b_i, \quad \gamma_{nk+i} := c_i \quad (0 \leq i \leq k-1; n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.51)$$

Sejam

$$c^2 := \prod_{i=0}^{k-1} c_i \quad \text{e} \quad d := (-1)^{k+1} \frac{c_0^2 + c^2}{c_0}$$

(escolhe-se c de modo a ser uma raiz quadrada de $\prod_{i=0}^{k-1} c_i$). Defina-se ainda

$$\tilde{U}_n(x) := c^n U_n\left(\frac{x-d}{2c}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.52)$$

A proposição seguinte é, essencialmente, um resultado estabelecido por Ya. L. Geronimus [30] com o recurso à teoria das fracções contínuas. A prova que se apresenta a seguir é baseada nos resultados das secções anteriores. As propriedades algébricas (4.53)–(4.54) aparecem também em [24], mas serão obtidas directamente do Teorema 4.1. As expressões explícitas (4.56) para as “massas” não foram estabelecidas anteriormente.

Teorema 4.14. *A SPOM $(P_n)_n$ caracterizada por (4.50)–(4.51), com $b_j \in \mathbb{C}$ e $c_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para todo o j , pode ser descrita por uma transformação polinomial definida pelos polinómios de Chebyshev de segunda espécie, do seguinte modo:*

$$P_{nk+j}(x) = \Delta_{0,j-1}(x) \tilde{U}_n(\varphi_k(x)) + \left(\prod_{i=0}^j c_i\right) \Delta_{j+1,k-2}(x) \tilde{U}_{n-1}(\varphi_k(x)) \quad (4.53)$$

para $0 \leq j \leq k-1$ e para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Em particular,

$$P_{nk+k-1}(x) = \Delta_{0,k-2}(x) \tilde{U}_n(\varphi_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.54)$$

Além disso, no caso definido-positivo (i.e., $b_j \in \mathbb{R}$ e $c_j > 0$ para todo o j) a medida de ortogonalidade para $(P_n)_n$ é dada por

$$d\sigma(x) = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \delta(x - z_j) dx + \frac{1}{2\pi c_0} \frac{\sqrt{4c^2 - (\varphi_k(x) - d)^2}}{|\Delta_{0,k-2}(x)|} \chi_{\varphi_k^{-1}([d-2c, d+2c])}(x) dx \quad (4.55)$$

(escolhendo $c = \prod_{j=0}^{k-1} \sqrt{c_j}$), onde $z_1 < \dots < z_{k-1}$ são os zeros de $\Delta_{0,k-2}(x)$ e

$$M_j := \frac{\Delta_{1,k-2}(z_j)}{\Delta'_{0,k-2}(z_j)} \left[1 - \min \left\{ 1, -\frac{\Delta_{0,k-1}(z_j)}{c_0 \Delta_{1,k-2}(z_j)} \right\} \right] \quad (4.56)$$

para todo o $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Demonstração. As relações (4.53)–(4.54) obtêm-se imediatamente de (4.12) e (4.8) no Teorema 4.1, atendendo ao exposto antes do enunciado do Teorema 4.14. Considere-se agora o caso definido-positivo. Como $Q_n(x) = c^n U_n\left(\frac{x}{2c}\right)$ então $(Q_n)_n$ é ortogonal a respeito da medida

$$d\tau(x) = \frac{1}{2\pi c^2} \chi_{]-2c, 2c[}(x) \sqrt{4c^2 - x^2} dx, \quad (4.57)$$

e a correspondente função de Stieltjes é dada por

$$F(z; d\tau) = \frac{1}{2c} F_U\left(\frac{z}{2c}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-2c, 2c],$$

onde F_U é a função de Stieltjes associada à sucessão $(U_n)_n$, definida por (1.25). Note-se também que o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da SPO $(Q_n)_n$ é

$$[\xi, \eta] = [-2c, 2c] = \text{supp}(d\tau).$$

Prove-se agora que todas as hipóteses (i)–(iv) do Teorema 4.7 se verificam. É óbvio que a hipótese (i) se verifica. Para provar (ii)–(iv), observe-se que

$$\pi_k^2(z_j) - 4c^2 = (2c_0\Delta_{1,k-2}(z_j) + \pi_k(z_j))^2, \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (4.58)$$

De facto, por (4.48), tem-se

$$\pi_k(x) = \Delta_{0,k-1}(x) - c_0\Delta_{1,k-2}(x) = P_k(x) - c_0P_{k-2}^{(1)}(x),$$

logo, usando o facto de z_j ser zero de $\theta_{k-1} \equiv P_{k-1}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} & (2c_0\Delta_{1,k-2}(z_j) + \pi_k(z_j))^2 \\ &= \pi_k^2(z_j) + 4c_0\Delta_{1,k-2}(z_j) (\pi_k(z_j) + c_0\Delta_{1,k-2}(z_j)) \\ &= \pi_k^2(z_j) + 4c_0\Delta_{1,k-2}(z_j)\Delta_{0,k-1}(z_j) \\ &= \pi_k^2(z_j) + 4c_0 \left(P_{k-2}^{(1)}(z_j)P_k(z_j) - P_{k-1}(z_j)P_{k-1}^{(1)}(z_j) \right) \\ &= \pi_k^2(z_j) - 4c_0 \prod_{i=1}^{k-1} c_i = \pi_k^2(z_j) - 4c^2, \end{aligned}$$

o que prova (4.58). Assim, temos

$$|\pi_k(z_j)| \geq 2c > 0, \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (4.59)$$

Para mostrar que a hipótese (ii) se cumpre, prove-se que

$$\int_{-2c}^{2c} \frac{d\tau(y)}{|y - \pi_k(z_j)|} < +\infty, \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (4.60)$$

Claramente, (4.60) verifica-se para cada z_j tal que $|\pi_k(z_j)| > 2c$, pelo que resta provar que (4.60) também se verifica para z_j tal que $\pi_k(z_j) = \pm 2c$. No caso $\pi_k(z_j) = 2c$, de acordo com (4.57), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-2c}^{2c} \frac{d\tau(y)}{|y-2c|} &= \frac{1}{2\pi c^2} \int_{-2c}^{2c} \frac{\sqrt{4c^2 - y^2}}{2c - y} dy = \frac{1}{\pi c} \int_{-1}^1 (1-t)^{-1/2}(1+t)^{1/2} dt \\ &= \frac{2}{\pi c} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{c} < +\infty \end{aligned}$$

($B(\cdot, \cdot)$ designa a função beta). A prova no caso $\pi_k(z_j) = -2c$ é análoga. Prove-se agora (iii). Tendo em conta as considerações que precedem o Teorema 4.7, π_k tem k zeros reais e distintos $x_1 < \dots < x_k$, e π'_k tem $k-1$ zeros reais e distintos $y_1 < \dots < y_{k-1}$, que satisfazem $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_{k-1} < x_k$ (propriedade de entrelaçamento). Além disso, observe-se que $\theta_{k-1}(x) = P_{k-1}(x)$ e $\pi_k(x) = P_k(x) - c_0 P_{k-2}^{(1)}(x)$ e, portanto,

$$\pi_k(z_j) = P_k(z_j) - c_0 P_{k-2}^{(1)}(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Agora, por um lado, usando [19, pg. 86, Teorema 4.1] tem-se

$$z_j < z_{k-2,j}^{(1)} < z_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-2 \quad (4.61)$$

onde $z_{k-2,1}^{(1)} < z_{k-2,2}^{(1)} < \dots < z_{k-2,k-2}^{(1)}$ designam os zeros de $P_{k-2}^{(1)}$. Por outro lado, atendendo a [19, pg. 28, Teorema 5.3], também se tem

$$z_{k,j} < z_j < z_{k,j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (4.62)$$

onde $z_{k,1} < z_{k,2} < \dots < z_{k,k}$ são os zeros de P_k . De (4.61) e (4.62) obtém-se

$$\operatorname{sgn}\{\pi_k(z_j)\} = (-1)^{k-j}, \quad j = 1, \dots, k-1 \quad (4.63)$$

e, assim, $x_1 < z_1 < x_2 < z_2 < \dots < z_{k-1} < x_k$. Deste modo, deduz-se

$$x_1 < y_1, \quad z_1 < x_2 < y_2, \quad z_2 < x_3 < \dots < x_{k-1} < y_{k-1}, \quad z_{k-1} < x_k. \quad (4.64)$$

Suponha-se que k é um número ímpar (o caso em que k é par trata-se de modo análogo). Então $\operatorname{sgn}\{\pi_k(x)\} = (-1)^{i-1}$ se $x \in (x_i, x_{i+1})$ para todo o $i = 1, \dots, k-1$. Assim, tem-se $\pi_k(y_{2j-1}) > 0$, $\pi_k(y_{2j}) < 0$ e, de (4.59) e (4.64), obtém-se $\pi_k(y_{2j-1}) \geq 2c$ e $\pi_k(y_{2j}) \leq -2c$ para todo o $j = 1, 2, \dots, (k-1)/2$. Por conseguinte, verifica-se a hipótese (iii) do Teorema 4.7. E é claro que a hipótese (iv) também se verifica, atendendo a (4.64).

Decorre imediatamente do Teorema 4.7, de (4.57) e de $\pi_k(x) = \varphi_k(x) - d$ que a medida $d\sigma$ é dada (a menos do factor c_0/c^2) por (4.55), onde

$$M_j := \frac{\Delta_{1,k-2}(z_j) - (c^2/c_0)F(\pi_k(z_j); d\tau)}{\Delta'_{0,k-2}(z_j)} \quad (4.65)$$

para cada $j = 1, \dots, k - 1$ (note-se que $v_0 = \int_{-2c}^{2c} d\tau = 1$). Para concluir a demonstração resta provar que esta expressão para M_j coincide com (4.56). Note-se primeiramente que, atendendo a (4.59) e (4.63), tem-se $\frac{\pi_k(z_j)}{2c} \geq 1$ se $k - j$ é par e $\frac{\pi_k(z_j)}{2c} \leq -1$ se $k - j$ é ímpar. Consequentemente, e atendendo à definição da função complexa $(z^2 - 1)^{1/2}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\pi_k(z_j)}{2c} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} &= (-1)^{k-j} \sqrt{\left(\frac{\pi_k(z_j)}{2c} \right)^2 - 1} \\ &= \frac{(-1)^{k-j}}{2c} |2c_0 \Delta_{1,k-2}(z_j) + \pi_k(z_j)|, \end{aligned}$$

onde $\sqrt{}$ designa a raiz quadrada real usual. A última igualdade é justificada por (4.58). Além disso,

$$\begin{aligned} &F(\pi_k(z_j); d\tau) \\ &= \frac{1}{2c} F_U \left(\frac{\pi_k(z_j)}{2c} \right) = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\pi_k(z_j)}{2c} - \left(\left(\frac{\pi_k(z_j)}{2c} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2c^2} \left\{ \Delta_{0,k-1}(z_j) - c_0 \Delta_{1,k-2}(z_j) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{k-j} | \Delta_{0,k-1}(z_j) + c_0 \Delta_{1,k-2}(z_j) | \right\}. \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (4.65) obtemos (4.56), tendo em conta que, para quaisquer $g, h \in \mathbb{R}$,

$$\min\{g, h\} = \frac{g + h - |g - h|}{2}, \quad \max\{g, h\} = \frac{g + h + |g - h|}{2}.$$

□

Observação 4.15. Para $j \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, os zeros de $P_{n_{k+j}}(x)$ satisfazem

$$\begin{cases} c \Delta_{0,j-1}(x) \sin(n+1)\theta + \left(\prod_{i=0}^j c_i \right) \Delta_{j+1,k-2}(x) \sin(n\theta) = 0, \\ \cos \theta = \frac{\pi_k(x)}{2c}. \end{cases}$$

Em particular, os zeros do polinómio $P_{n_{k+k-1}}(x)$ são os $k-1$ zeros do polinómio $\theta_{k-1}(x)$ juntamente com os nk pontos $\{x_{j,q}^{(n)}\}_{j=0, \dots, k-1, q=1, \dots, n}$ que satisfazem

$$\pi_k(x_{j,q}^{(n)}) = 2c \cos \left(\frac{q\pi}{n+1} \right).$$

Este resultado foi estabelecido por B. Simon [87, Teorema 2.1]—observa-se que o polinómio Δ que aparece em [87] está relacionado com o polinómio π_k pela igualdade $\Delta(x) = \pi_k(x)/c$.

Polinómios ultraesféricos crivados de segunda espécie

Em (4.46), tome-se

$$b_j := 0, \quad c_j := \frac{1}{4} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1).$$

A SPOM $(P_n)_n$ que se obtém com esta escolha é a chamada sucessão dos polinómios crivados de segunda espécie [16]. Nesta situação, tem-se

$$\Delta_{r,s}(x) = \widehat{U}_{s-r+1}(x)$$

para $r, s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. De (4.49) obtém-se $r_n(x) \equiv 0$, logo as hipóteses do Teorema 4.1 são verificadas, sendo a SPOM $(Q_n)_n$ caracterizada por

$$r_n = 0, \quad s_n = 4^{2-k} a_n^{(0)} a_n^{(k-1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso, tem-se

$$\theta_{k-1}(x) = \widehat{U}_{k-1}(x), \quad \pi_k(x) = \widehat{U}_k(x) - \frac{1}{4} \widehat{U}_{k-2}(x) = \widehat{T}_k(x),$$

e $\Delta_n(1, j-1; x) = \widehat{U}_j(x)$ e $\Delta_n(j+2, k-2; x) = \widehat{U}_{k-j-2}(x)$ para todos os $n = 0, 1, 2, \dots$ e $0 \leq j \leq k-1$. Decorre do Teorema 4.1 que

$$P_{nk+j}(x) = \widehat{U}_j(x) Q_n(\widehat{T}_k(x)) + 4^{-j} a_n^{(0)} \widehat{U}_{k-j-2}(x) Q_{n-1}(\widehat{T}_k(x)) \quad (4.66)$$

para todos os $n = 0, 1, 2, \dots$ e $0 \leq j \leq k-1$. Em particular,

$$P_{nk+k-1}(x) = \widehat{U}_{k-1}(x) Q_n(\widehat{T}_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O caso especial em que, para $\lambda > -1/2$ (fixo) se escolhe

$$a_{n+1}^{(0)} := \frac{n+1}{4(n+1+\lambda)}, \quad a_n^{(k-1)} := \frac{n+1+2\lambda}{4(n+1+\lambda)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

tem importância histórica, uma vez que Q_n é, a menos de uma mudança de variável, um polinómio ultrasférico de parâmetro λ ,

$$Q_n(x) = \frac{n!}{2^{kn}(\lambda+1)_n} C_n^{\lambda+1}(2^{k-1}x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e P_n coincide com o polinómio mónico ultrasférico crivado de segunda espécie de grau n , $B_n^\lambda(\cdot; k)$, introduzido por Al-Salam, Allaway e Askey [4]. De facto, por (4.66), para $j = 0, \dots, k - 1$ e $n = 0, 1, 2, \dots$, tem-se

$$\begin{aligned} P_{kn+j}(x) &= \widehat{U}_j(x) Q_n(\widehat{T}_k(x)) + \frac{n}{4^{j+1}(n+\lambda)} \widehat{U}_{k-2-j}(x) Q_{n-1}(\widehat{T}_k(x)) \\ &= \frac{n!}{2^{kn+j}(\lambda+1)_n} B_{kn+j}^\lambda(x; k), \end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada pela relação [15]

$$B_{kn+j}^\lambda(x; k) = U_j(x) C_n^{\lambda+1}(T_k(x)) + U_{k-j-2}(x) C_{n-1}^{\lambda+1}(T_k(x))$$

e por (1.27). Além disso, como a SPO $(Q_n)_n$ é ortogonal a respeito da medida

$$d\tau(x) := w_\tau(x) \chi_{[-2^{1-k}, 2^{1-k}]} dx, \quad w_\tau(x) := 2^{k-1} (1 - 4^{k-1} x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}},$$

então, pelo Teorema 4.7 (as hipóteses deste teorema são facilmente verificadas, usando as propriedades dos polinómios de Chebychev de primeira e segunda espécie) obtém-se, a menos de um factor constante, a medida de ortogonalidade para os polinómios ultrasféricos crivados de segunda espécie:

$$d\sigma(x) := (1 - x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} |U_{k-1}(x)|^{2\lambda} \chi_{(-1,1)}(x) dx.$$

Note-se que, neste caso, todas as massas M_i dadas por (4.32) são nulas. De facto, uma vez que os zeros de $\theta_{k-1} \equiv \widehat{U}_{k-1}$ são $z_j = -\cos(j\pi/k)$ para $j = 1, \dots, k-1$, então $\pi_k(z_j) = \widehat{T}_k(z_j) = 2^{1-k} \cos(k\pi - j\pi) = 2^{1-k} (-1)^{k-j}$; logo, usando as propriedades das funções Beta e Gamma (ver e.g. [7]), obtém-se

$$\begin{aligned} F(\pi_k(z_j); d\tau) &= F((-1)^{k-j} 2^{1-k}; d\tau) = 2^{k-1} \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^{\lambda+\frac{1}{2}} (1+x)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{x - (-1)^{k-j}} dx \\ &= (-1)^{k-1-j} 2^{k+2\lambda} B\left(\lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{3}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \int_{\mathbb{R}} d\tau = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda+1/2} dx = 2^{2\lambda+2} B\left(\lambda + \frac{3}{2}, \lambda + \frac{3}{2}\right) \\ &= 2^{2\lambda} B\left(\lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{3}{2}\right) \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}, \end{aligned}$$

$$\Delta_0(2, k-2; z_j) = \widehat{U}_{k-2}(z_j) = 2^{2-k} (-1)^{k-j-1}.$$

Consequentemente, como $\prod_{\nu=1}^{k-1} a_0^{(\nu)} = 4^{1-k} \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}$, obtém-se

$$v_0 \Delta_0(2, k-2; z_j) / \left(\prod_{\nu=1}^{k-1} a_0^{(\nu)} \right) = (-1)^{k-1-j} 2^{k+2\lambda} B\left(\lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{3}{2}\right).$$

Daqui e de (4.33) deduz-se imediatamente $M_j = 0$ para todo o $j = 1, \dots, k-1$.

Observação 4.16. *A ligação entre polinómios crivados e polinómios ortogonais definidos à custa de transformações polinomiais foi observada por J. Geronimo e W. Van Assche em [28].*

4.6 Um exemplo com $k = 5$ e $m = 1$

As situações consideradas nas secções anteriores correspondem a escolhas extremas de m (para um dado k), i.e., m assume o valor mínimo possível ($m = 0$) ou o valor máximo possível ($m = k - 1$). O exemplo que aqui se apresenta corresponde a uma situação intermédia, com $k = 5$ e $m = 1$. Seja $(P_n)_n$ a SPOM caracterizada pela RRTT

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.67)$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$, onde

$$\begin{aligned} \beta_0 = \beta_{5n+1} = \beta_{5n+3} = \beta_{5n+4} = 0, \quad \beta_{5n+2} = 1, \quad \beta_{5n+5} = \frac{1}{2} \quad (n \geq 0), \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{3}{2}, \quad \gamma_{5n+1} = \gamma_{5n+2} = 1 \quad (n \geq 1), \\ \gamma_{5n+3} = 1, \quad \gamma_{5n+4} = \frac{3}{2}, \quad \gamma_{5n+5} = \frac{3}{4} \quad (n \geq 0). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Comparando com (4.2), observa-se que $(a_n^{(j)})_{n \geq 0}$ e $(b_n^{(j)})_{n \geq 0}$ ($0 \leq j \leq 4$) são definidas por

$$\begin{aligned} b_n^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}, \quad b_n^{(1)} = b_n^{(3)} = b_n^{(4)} = 0, \quad b_n^{(2)} = 1, \\ a_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \frac{3}{4} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}, \quad a_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}, \\ a_n^{(2)} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}, \quad a_n^{(3)} = 1, \quad a_n^{(4)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. É fácil de verificar que se cumprem todas as hipóteses do Teorema 4.1 (com $k = 5$ e $m = 1$) e que

$$\begin{aligned} \Delta_n(3, 5; x) &= x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{7}{2}x \quad (\text{independente de } n), \\ r_n(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ -\frac{5}{8} & \text{se } n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{independente de } x), \\ \theta_1(x) &= x, \quad \eta_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{7}{2}, \\ \pi_5(x) &= x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{19}{4}x^3 + 5x^2 + \frac{19}{4}x - \frac{23}{8}. \end{aligned}$$

Além disso, a SPOM $(Q_n)_n$ definida pela RRTT (4.10) é caracterizada por

$$r_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ -\frac{5}{8} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}, \quad s_n = \begin{cases} \frac{27}{16} & \text{se } n = 1 \\ \frac{9}{8} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Assim, cada Q_n pode ser expresso em função dos polinómios de Chebychev de segunda espécie:

$$Q_n(x) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^n \left\{ U_n\left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right) - \frac{5\sqrt{2}}{12} U_{n-1}\left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} U_{n-2}\left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right) \right\} \quad (4.69)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Decorre do Teorema 4.1 que $(P_n)_n$ pode obter-se de $(Q_n)_n$ por meio de transformação polinomial, tendo-se

$$P_{5n+1}(x) = xQ_n(\pi_5(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

As expressões para os restantes polinómios, $P_{5n+j}(x)$ ($2 \leq j \leq 5$; $n = 0, 1, 2, \dots$), podem também obter-se pelo Teorema 4.1. A medida de ortogonalidade para a sucessão $(P_n)_n$ deduz-se do Teorema 4.7. Para determinar esta medida, note-se primeiro que $(Q_n)_n$ é ortogonal a respeito da medida (ver Anexo C)

$$d\tau(x) = \frac{1}{13} \delta\left(x - \frac{3}{2}\right) + w_\tau(x) \chi_{\left[-\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]}(x) dx,$$

onde

$$w_\tau(x) := -\frac{36\sqrt{2}}{\pi(2x-3)(8x+27)} \sqrt{1 - \left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Constata-se facilmente que as hipóteses (i)–(iv) do Teorema 4.7 são verificadas. De facto, tem-se

$$\text{supp}(d\tau) = \left[-\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\},$$

logo a hipótese (i) do Teorema 4.7 verifica-se trivialmente, com $\xi = \frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ e $\eta = \frac{3}{2}$. É óbvio que a hipótese (ii) também se verifica, pois, uma vez que o único zero de $\theta_1(x)$ é $z_1 = 0$ e $\pi_5(0) = -23/8$, então os pólos da função $w_\tau(x)/|(x - \pi_5(0))|$ são $-23/8 = -2.875$, $-27/8 = -3.375$ e $3/2 = \eta$, os quais não pertencem ao intervalo

$$\left[-\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right] \approx [-2.74632, 1.49632]$$

(este intervalo é o suporte da parte absolutamente contínua da medida $d\tau$). As hipóteses (iii) e (iv) podem confirmar-se geometricamente (ver Figura 4.3).

Por outro lado, uma vez que

$$v_0 = \int_{\mathbb{R}} d\tau(x) = \frac{1}{13} - \frac{36\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}}^{-\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right)^2}}{(2x-3)(8x+27)} dx = 1$$

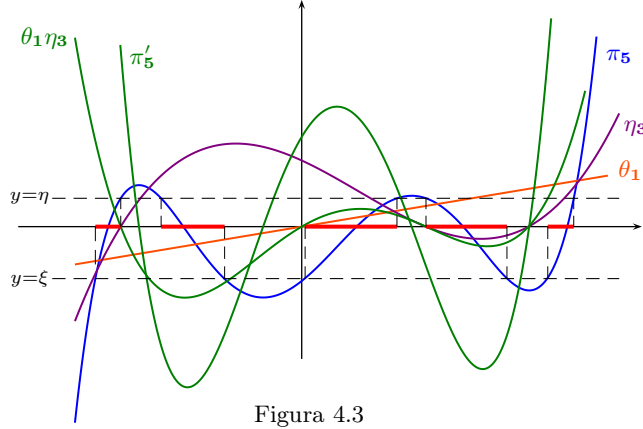


Figura 4.3

e

$$\begin{aligned}
 F(\pi_5(0); d\tau) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau(x)}{x + \frac{23}{8}} \\
 &= \frac{8}{455} - \frac{288\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}}^{-\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right)^2}}{(8x+23)(2x-3)(8x+27)} dx = \frac{4}{7},
 \end{aligned}$$

conclui-se que a “massa” M_1 dada por (4.33) é

$$M_1 = v_0/a_0^{(1)} - \eta_3(0)F(\pi_5(0); d\tau) = 0.$$

Assim, a SPOM $(P_n)_n$ é ortogonal a respeito da medida

$$d\sigma(x) = \sum_{i=1}^5 N_i \delta(x - a_i) dx + w_\sigma(x) \chi_{\pi_5^{-1}\left(1 - \frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}(x) dx,$$

onde a_1, \dots, a_5 são as soluções da equação $\pi_5(x) = \frac{3}{2}$, N_1, \dots, N_5 são números reais não negativos (“massas”) e (cf. Observação 4.8)

$$w_\sigma(x) := \frac{|4x^3 - 6x^2 - 11x + 14|}{4|x|} w_\tau(\pi_5(x)).$$

Note-se que $w_\sigma(x)$ pode escrever-se explicitamente na forma

$$w_\sigma(x) = \frac{-3\sqrt{2} \operatorname{sgn}\{4x^3 - 6x^2 - 11x + 14\} \sqrt{-18 - 2x(x-1)(4x^4 - 2x^3 - 21x^2 - x + 18)(4x^4 - 6x^3 - 19x^2 + 20x + 19)}}{2\pi|x|(2x^3 - 4x^2 - 4x + 5)(4x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 10x - 1)}.$$

Além disso, como $\pi_5(x) - \frac{3}{2} = \left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{7}{4}\right) \left(x^3 - 2x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right)$, deduz-se que os a_i 's são dados (por ordem crescente) por

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{-1 - \sqrt{29}}{4} \approx -1.5963, \\
 a_2 &= \frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{10} \cos \frac{\zeta}{3}\right) \approx -1.2398, \quad a_3 = \frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{10} \cos \frac{\pi + \zeta}{3}\right) \approx 0.8405, \\
 a_4 &= \frac{-1 + \sqrt{29}}{4} \approx 1.0963, \quad a_5 = \frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{10} \cos \frac{\pi - \zeta}{3}\right) \approx 2.3993,
 \end{aligned}$$

onde $\zeta := \arccos \frac{31}{40\sqrt{10}}$. As correspondentes massas N_i 's são dadas por

$$N_i = \frac{(a_i - 2)^2}{27a_i^4 - 108a_i^3 + 160a_i^2 - 130a_i + 130}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (4.70)$$

donde

$$N_1 \approx 0.0095, \quad N_2 \approx 0.0130, \quad N_3 \approx 0.0162, \quad N_4 \approx 0.0107, \quad N_5 \approx 0.0011.$$

Antes de demonstrar (4.70), recorde-se que

$$\text{supp}(d\sigma) = E \cup \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

onde $E := \pi_5^{-1} \left(\left[-\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right] \right)$ é uma união de 5 intervalos disjuntos:

$$E \approx [-1.8199, -1.5967] \cup [-1.2392, -0.6834] \cup [0.0264, 0.8387] \cup [1.0980, 1.8118] \cup [2.1651, 2.3992].$$

Para provar (4.70), considere-se a sucessão ortonormal $(p_n)_n$ correspondente à SPOM $(P_n)_n$. De acordo com (1.9), é $p_n(x) = (u_0 \prod_{i=1}^n \gamma_i)^{-1/2} P_n(x)$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Recorde-se ainda (da teoria geral dos PO's) que

$$N_i = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n^2(a_i)} \quad (i = 1, \dots, 5).$$

Uma vez que $u_0 = 1$ e tendo em conta (4.68), obtém-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n^2(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^5 p_{5n+j}^2(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{8}{9}\right)^n V_n(x), \quad (4.71)$$

onde

$$V_n(x) := P_{5n+1}^2(x) + P_{5n+2}^2(x) + P_{5n+3}^2(x) + \frac{2}{3} P_{5n+4}^2(x) + \frac{8}{9} P_{5n+5}^2(x).$$

Mas, pelo Teorema 4.1, para cada $j \in \{1, \dots, 5\}$ tem-se

$$P_{5n+j}(x) = \frac{\Delta_n(3, j-1; x) Q_{n+1}(\pi_5(x)) + \left(\prod_{s=1}^{j-1} a_n^{(s+1)} \right) \Delta_n(j+2, 5; x) Q_n(\pi_5(x))}{\eta_3(x)}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, tomando $x = a_i$ ($i = 1, \dots, 5$) conclui-se que $Q_n(\pi_5(a_i)) = Q_n\left(\frac{3}{2}\right)$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Por (4.69) obtém-se

$$Q_n\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^n \left\{ U_n\left(\frac{17}{12\sqrt{2}}\right) - \frac{5\sqrt{2}}{12} U_{n-1}\left(\frac{17}{12\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} U_{n-2}\left(\frac{17}{12\sqrt{2}}\right) \right\}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Agora, recorde-se que

$$U_n(x) = \frac{\sinh((n+1)\text{argcosh } x)}{\sinh(\text{argcosh } x)} \quad \text{se } x > 1.$$

Assim, para $x = \frac{17}{12\sqrt{2}}$, obtém-se

$$U_n\left(\frac{17}{12\sqrt{2}}\right) = \frac{\sinh((n+1)z)}{\sinh(z)} = \frac{e^{(n+1)z} - e^{-(n+1)z}}{e^z - e^{-z}}, \quad \cosh z = \frac{17}{12\sqrt{2}}.$$

A solução positiva da última equação é $z = \ln(3\sqrt{2}/4)$, o que permite deduzir (recorrendo ao MAPLE) que

$$V_n(a_i) = \frac{9a_i^4 - 36a_i^3 + 53a_i^2 - 42a_i + 42}{4(a_i - 2)^2}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Note-se que esta expressão é independente de n . Finalmente, fazendo $x = a_i$ em (4.71), obtém-se (4.70).

Capítulo 5

Operadores de Jacobi e transformações polinomiais

Neste capítulo, aplicam-se os resultados estabelecidos no capítulo anterior para analisar propriedades espectrais de certos operadores de Jacobi que podem ser descritos usando transformações polinomiais do tipo estudado. Estaremos particularmente interessados na descrição dos espectros essenciais de tais operadores. Recorde-se que sendo H um espaço de Hilbert e \mathbf{T} um operador linear limitado auto-adjunto em H , então o espectro de \mathbf{T} admite a decomposição

$$\sigma(\mathbf{T}) = \sigma_c(\mathbf{T}) \cup \sigma_p(\mathbf{T}) ,$$

onde $\sigma_c(\mathbf{T})$ designa o espectro contínuo e $\sigma_p(\mathbf{T})$ o espectro pontual de \mathbf{T} . Um ponto limite do espectro de \mathbf{T} é todo o ponto de $\sigma_c(\mathbf{T})$, ou todo o ponto de acumulação de $\sigma_p(\mathbf{T})$, ou um valor próprio de \mathbf{T} com multiplicidade infinita. O conjunto dos pontos limite do espectro de \mathbf{T} é chamado o espectro essencial de \mathbf{T} e designa-se por $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{T})$. Assim, $\sigma(\mathbf{T})$ também admite a decomposição

$$\sigma(\mathbf{T}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{T}) \cup \sigma_p^f(\mathbf{T})$$

(uma união disjunta), onde $\sigma_p^f(\mathbf{T}) := \sigma(\mathbf{T}) \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{T})$ é um conjunto de números reais, que contém apenas pontos isolados do espectro que são os valores próprios de multiplicidade finita. Por vezes, a $\sigma_p^f(\mathbf{T})$ também se chama espectro discreto. É bem conhecido que o espectro essencial de um operador linear auto adjunto limitado pode ser caracterizado pela família espectral associada. Este facto pode ser usado para provar a seguinte caracterização do espectro essencial.

Teorema 5.1 (Critério de Weyl). *Seja \mathbf{T} um operador linear auto-adjunto limitado no espaço de Hilbert H e λ um número real. Então $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{T})$ se e só se existe uma sucessão $(f_n)_n$ contida no domínio de \mathbf{T} tal que $\|f_n\| = 1$ para todo o n e as seguintes condições se verificarem quando $n \rightarrow +\infty$:*

$$f_n \rightharpoonup 0 \text{ [fracamente em } H], \quad (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) f_n \rightarrow 0 \text{ [fortemente em } H],$$

onde \mathbf{I} designa o operador identidade em H .

O critério de Weyl permite provar as duas proposições seguintes.

Teorema 5.2 (Teorema Weyl). *Seja H um espaço de Hilbert, \mathbf{T} um operador linear limitado auto-adjunto e \mathbf{K} um operador compacto em H . Então*

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{T} + \mathbf{K}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{T}).$$

Teorema 5.3. *Seja \mathbf{T} um operador linear auto-adjunto limitado num espaço de Hilbert, então*

$$q(\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{T})) = \sigma_{\text{ess}}(q(\mathbf{T}))$$

para todo o polinómio não nulo q .

Os resultados anteriores (bem como algumas generalizações para operadores não auto-adjuntos) podem ser vistos, e.g., nos livros de Riesz e Nagy [83, Sec. 133] e de Reed e Simon [81, Sec. VII.3], [82, Sec. XIII.4].

5.1 Espectro de um operador de Jacobi periódico

O objectivo nesta secção é determinar o espectro de um operador de Jacobi periódico, dando uma prova alternativa a um resultado estabelecido por A. Maté, P. Nevai e W. Van Assche em [66]. Tal operador actua no espaço de sucessões (de números complexos) $\ell^2(\mathbb{C})$ e pode ser representado por uma matriz tridiagonal infinita do tipo

$$\mathbf{J}_k := \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & c_2 & \cdots \\ 0 & c_2 & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

onde $(b_n)_{n \geq 0}$ e $(c_n)_{n \geq 1}$ são sucessões periódicas de período k , i.e., satisfazem

$$b_0 = b_k, \quad b_{nk+j} = b_j, \quad c_{nk+j} = c_j \quad (j = 1, \dots, k) \quad (5.2)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Com a operação usual de multiplicação de uma matriz por um vector, \mathbf{J}_k define um operador linear limitado em $\ell^2(\mathbb{C})$. A proposição seguinte caracteriza o espectro de \mathbf{J}_k no caso de este ser um operador auto-adjunto, e é essencialmente o Teorema 13 em [66]. A prova apresentada em [66] baseou-se num isomorfismo adequado estabelecido entre $\ell^2(\mathbb{C})$ e a classe de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. A prova que se apresenta a seguir é baseada nos resultados obtidos no capítulo anterior.

Teorema 5.4. *Considere-se o operador de Jacobi \mathbf{J}_k definido por (5.1)–(5.2), com $b_j \in \mathbb{R}$ e $c_j > 0$ para todo o $j = 1, \dots, k$ (logo, \mathbf{J}_k define um operador limitado auto-adjunto em $\ell^2(\mathbb{C})$). Defina-se $D_{i,j}(x) = 1$ se $i > j$ e, para $i \leq j$,*

$$D_{i,j}(x) := \begin{vmatrix} x - b_i & c_{i+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{i+1} & x - b_{i+1} & c_{i+2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{i+2} & x - b_{i+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - b_{j-1} & c_j \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_j & x - b_j \end{vmatrix}.$$

Sejam $\pi_k(x) := D_{0,k-1}(x) - c_k^2 D_{1,k-2}(x)$, $\theta_{k-1}(x) := D_{0,k-2}(x)$,

$$\Sigma := \pi_k^{-1}([-2c, 2c]) \quad , \quad c := \prod_{j=1}^k c_j.$$

Então:

- (i) π_k tem k zeros reais e distintos, $x_1 < \dots < x_k$, e θ_{k-1} tem $k-1$ zeros reais e distintos, $z_1 < \dots < z_{k-1}$, que satisfazem $x_j < z_j < x_{j+1}$ e $|\pi_k(z_j)| \geq 2c$ para cada $j = 1, \dots, k-1$.
- (ii) Σ é uma união de k intervalos fechados, tais que entre dois destes intervalos (vizinhos) existe um zero de θ_{k-1} ; quaisquer dois intervalos vizinhos têm em comum, no máximo, um único ponto, que deverá ser um zero comum dos polinómios θ_{k-1} e π_k .
- (iii) O espectro de \mathbf{J}_k é

$$\sigma(\mathbf{J}_k) = \Sigma \cup Z \quad ,$$

onde Z é um subconjunto de $\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$, tendo-se

$$z_j \in Z \quad \text{se e só se} \quad D_{0,k-1}(z_j)/D_{1,k-2}(z_j) > -c_k^2$$

para cada $j = 1, 2, \dots, k-1$. Além disso Z é o conjunto dos valores próprios de \mathbf{J}_k , isto é, Z é o espectro pontual de \mathbf{J}_k .

Demonstração. Observe-se que o determinante $D_{i,j}(x)$ resulta do determinante $\Delta_{i,j}(x)$, definido em (4.47), substituindo cada c_s por c_s^2 na definição de $\Delta_{i,j}(x)$. Assim, o Teorema 5.4 é uma consequência do Teorema 4.14 e da sua demonstração, uma vez que, sob as hipóteses em consideração, o espectro do operador \mathbf{J}_k coincide com o suporte da medida de ortogonalidade para a SPO $(p_n)_n$. Note-se que a condição $D_{0,k-1}(z_j)/D_{1,k-2}(z_j) > -c_k^2$ é equivalente à condição $M_j > 0$, onde M_j é definido como no Teorema 4.14. \square

Na verdade, o teorema precedente fornece informação para além da que está contida em [66, Teorema 13]. De facto, em [66, Teorema 13] os autores descrevem o espectro $\sigma(\mathbf{J}_k)$ estabelecendo que $\sigma(\mathbf{J}_k)$ coincide com o conjunto $\pi_k^{-1}([-2c, 2c])$ a menos de um número finito de pontos, que não identificam. Note-se que (como decorre do Teorema 5.4) este conjunto adicional de pontos é precisamente o conjunto Z descrito em (iii), juntamente com os números reais λ tais que $\pi_k(\lambda) = \pm 2c$. Por outro lado, em [66, pg. 520] os autores colocaram a possibilidade de existirem números reais λ que satisfaçam $|\pi_k(\lambda)| = 2c$ e que não pertençam ao conjunto $\sigma(\mathbf{J}_k)$, e foi por esta razão que consideraram o conjunto $\pi_k^{-1}([-2c, 2c])$ em vez de $\Sigma := \pi_k^{-1}([-2c, 2c])$ para a descrição do espectro de \mathbf{J}_k (a menos de um conjunto finito de pontos). Além disso, considerando aquela possibilidade, fizeram a seguinte afirmação (aqui reproduzida e traduzida com o devido acerto de notação): “Não encontramos um exemplo que mostre que existem reais λ satisfazendo $|\pi_k(\lambda)| \leq 2c$ mas não $|\pi_k(\lambda)| < 2c$ e que não pertençam ao espectro”. O Teorema 5.4 permite concluir que um tal exemplo não existe! (A principal razão é a afirmação (i) no teorema, a qual implica que o conjunto Σ não tem pontos isolados.)

Em [66, pg. 520] foi apresentado um exemplo onde mostra que, de facto, o espectro de \mathbf{J}_k pode ter pontos fora do conjunto Σ . (De acordo com o Teorema 5.4 estes pontos devem, necessariamente, pertencer ao conjunto Z .) Nesse exemplo, considera-se uma certa matriz de Jacobi, \mathbf{D} , para a qual 0 é um valor próprio, e indica-se um vector próprio associado, nomeadamente,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \left\langle 1, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0, \dots \right\rangle^*$$

onde o asterisco indica que se trata da matriz transposta. (Em [66] existe uma gralha na definição da matrix \mathbf{D} , bem como na expressão indicada para o vector próprio, que devem ser definidos como atrás.) De facto, mais geralmente, quando $k = 2$, a matriz \mathbf{J}_k é a matriz de Jacobi 2-periódica

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & b_0 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_1 & b_1 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

($b_0, b_1 \in \mathbb{R}$; $c_1, c_2 > 0$). Neste caso, tem-se $\theta_1(x) = x - b_0$ e, portanto, pelo Teorema 5.4, conclui-se que só b_0 poderá ser valor proprio de \mathbf{J}_2 e, além disso, b_0 é um valor próprio de \mathbf{J}_2 se e só se $c_1 < c_2$ (cf. [92, 57, 6]).

Do mesmo modo, quando $k = 3$, deduz-se que os possíveis valores próprios do operador de Jacobi 3-periódico

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & b_2 & c_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_3 & b_0 & c_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

($b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$; $c_1, c_2, c_3 > 0$) são

$$\lambda_{\pm} := \frac{1}{2} \left(b_0 + b_1 \pm \sqrt{(b_0 - b_1)^2 + 4c_1^2} \right),$$

sendo λ_{\pm} valor próprio de \mathbf{J}_3 se e só se a seguinte condição se verifica:

$$\frac{c_3^2}{c_2^2} > \frac{b_1 - b_0 \pm \sqrt{(b_0 - b_1)^2 + 4c_1^2}}{b_0 - b_1 \pm \sqrt{(b_0 - b_1)^2 + 4c_1^2}}$$

(veja-se também [6]). Em particular, se $b_1 = b_0$, conclui-se que $b_0 \pm c_1$ são os possíveis valores próprios de \mathbf{J}_3 , e $b_0 + c_1$ é um valor próprio de \mathbf{J}_3 se e só se $b_0 - c_1$ é um valor próprio de \mathbf{J}_3 se e só se $c_2 < c_3$.

Observação 5.5. *A. Almendral Vázquez [3] deu uma descrição do espectro e do espectro essencial de um operador de Jacobi periódico cujas entradas são números complexos.*

5.2 Espectro essencial obtido via uma transformação polinomial

Considere-se um operador de Jacobi, \mathbf{J} , que actua no espaço de Hilbert complexo $\ell^2 \equiv \ell^2(\mathbb{C})$, representado na base canónica de ℓ^2 por uma matriz tridiagonal infinita simétrica (também designada por \mathbf{J})

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} b_0^{(0)} & c_0^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_0^{(1)} & b_0^{(1)} & c_0^{(2)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_0^{(2)} & b_0^{(2)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0^{(k-2)} & c_0^{(k-1)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_0^{(k-1)} & b_0^{(k-1)} & c_1^{(0)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1^{(0)} & b_1^{(0)} & c_1^{(1)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_1^{(1)} & b_1^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

onde $b_n^{(i)}$ e $c_n^{(i)}$ ($0 \leq i \leq k-1$; $n = 0, 1, 2, \dots$) são números complexos tais que

$$B_i := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |b_n^{(i)}| < \infty, \quad C_i := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |c_n^{(i)}| < \infty, \quad 0 \leq i \leq k-1. \quad (5.4)$$

Nestas condições, \mathbf{J} é um operador linear simétrico e limitado em $\ell^2(\mathbb{C})$, com

$$\|\mathbf{J}\| \leq \sup_{0 \leq i \leq k-1} \{B_i + 2C_i\}.$$

Designe $(p_n)_n$ a sucessão ortonormada definida por \mathbf{J} , que é caracterizada por

$$(x - b_n^{(j)})p_{nk+j}(x) = c_n^{(j+1)}p_{nk+j+1}(x) + c_n^{(j)}p_{nk+j-1}(x), \\ j = 0, 1, \dots, k-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.5)$$

com a convenção $c_n^{(k)} = c_{n+1}^{(0)}$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ e com as condições iniciais $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = 1$. A SPOM correspondente à sucessão $(p_n)_n$ é a sucessão $(P_n)_n$ caracterizada por (4.2) com $b_n^{(j)}$ definido como em (5.5) e

$$a_n^{(j)} := [c_n^{(j)}]^2 \quad (j = 0, 1, \dots, k-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.6)$$

Com estes números $b_n^{(j)}$ e $a_n^{(j)}$ podem-se construir os determinantes $\Delta_n(i, j; x)$ definidos por (4.4)–(4.5). Assim, sob as hipóteses do Teorema 4.1 é possível estudar as propriedades espectrais de \mathbf{J} usando a teoria desenvolvida no capítulo anterior envolvendo transformações polinomiais. É este o objectivo deste capítulo. Começamos por estabelecer um lema preliminar.

Lema 5.6. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $(r_n)_{n \geq 0}$ e $(s_n)_{n \geq 1}$ duas sucessões de números reais limitadas, com $s_n > 0$ para todo o $n \geq 1$. Designem \mathbf{J}_Q e $\mathbf{J}_{0,k}$ os operadores definidos em $\ell^2(\mathbb{C})$ por*

$$\mathbf{J}_Q = \begin{pmatrix} r_0 & \sqrt{s_1} & & & & \\ \sqrt{s_1} & r_1 & \sqrt{s_2} & & & \\ & \sqrt{s_2} & r_2 & \sqrt{s_3} & & \\ & & \sqrt{s_3} & r_3 & \sqrt{s_4} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}_{0,k} = \begin{pmatrix} r_0 I_k & \sqrt{s_1} I_k & & & & \\ \sqrt{s_1} I_k & r_1 I_k & \sqrt{s_2} I_k & & & \\ & \sqrt{s_2} I_k & r_2 I_k & \sqrt{s_3} I_k & & \\ & & \sqrt{s_3} I_k & r_3 I_k & \sqrt{s_4} I_k & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde I_k é a matriz identidade de ordem k . Então \mathbf{J}_Q e $\mathbf{J}_{0,k}$ são operadores lineares auto-adjuntos limitados cujos espectros, espectros pontuais, espectros essenciais e espectros discretos coincidem, respectivamente:

- (i) $\sigma(\mathbf{J}_{0,k}) = \sigma(J_Q)$
- (ii) $\sigma_p(\mathbf{J}_{0,k}) = \sigma_p(J_Q)$
- (iii) $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)$
- (iv) $\sigma_p^f(\mathbf{J}_{0,k}) = \sigma_p^f(\mathbf{J}_Q)$.

Demonstração. Provaremos as igualdades (ii) e (iii). A igualdade (i) decorre da prova de (iii), atendendo à Proposição VII.12 em [81, p.237]; e (iv) é uma consequência das igualdades precedentes. Prove-se em primeiro lugar a inclusão $\sigma_p(\mathbf{J}_{0,k}) \subseteq \sigma_p(\mathbf{J}_Q)$. Seja $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{J}_{0,k})$. Então existe $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_j)_{j \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tal que $(\mathbf{J}_{0,k} - \lambda \mathbf{I})\tilde{x} = 0$, i.e.,

$$\sqrt{s_n} \tilde{\xi}_{(n-1)k+j} + (r_n - \lambda) \tilde{\xi}_{nk+j} + \sqrt{s_{n+1}} \tilde{\xi}_{(n+1)k+j} = 0, \quad (5.7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Sejam $j_0 \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ e $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tais que $\tilde{\xi}_{n_0 k + j_0} \neq 0$ e defina-se

$$\xi_n := \tilde{\xi}_{nk+j_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Como $\xi_{n_0} \neq 0$ então $x := (\xi_n)_n \in \ell^2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, logo de (5.7) para $j = j_0$, obtém-se

$$\sqrt{s_n} \xi_{n-1} + (r_n - \lambda) \xi_n + \sqrt{s_{n+1}} \xi_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

i.e., $(\mathbf{J}_Q - \lambda \mathbf{I})x = 0$. Conclui-se que $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{J}_Q)$ e, portanto, $\sigma_p(\mathbf{J}_{0,k}) \subseteq \sigma_p(\mathbf{J}_Q)$. Reciprocamente, seja $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{J}_Q)$. Então existe $x = (\xi_n)_n \in \ell^2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tal que $(\mathbf{J}_Q - \lambda \mathbf{I})x = 0$, i.e.,

$$\sqrt{s_n} \xi_{n-1} + (r_n - \lambda) \xi_n + \sqrt{s_{n+1}} \xi_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

Defina-se $\tilde{x} := (\tilde{\xi}_n)_n$ por

$$\tilde{\xi}_{nk+j} := \begin{cases} 0 & \text{se } j \in \{1, \dots, k-1\} \\ \xi_n & \text{se } j = 0 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Então $\tilde{x} \in \ell^2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ e, de (5.8), obtém-se

$$\begin{aligned} \sqrt{s_n} \tilde{\xi}_{(n-1)k+j} + (r_n - \lambda) \tilde{\xi}_{nk+j} + \sqrt{s_{n+1}} \tilde{\xi}_{(n+1)k+j} &= 0, \\ n = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

i.e., $(\mathbf{J}_{0,k} - \lambda \mathbf{I})\tilde{x} = 0$, ou seja, $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{J}_{0,k})$. Logo $\sigma_p(\mathbf{J}_Q) \subseteq \sigma_p(\mathbf{J}_{0,k})$ e, portanto, verifica-se a igualdade (ii).

Prove-se (iii). Para mostrar que $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k}) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)$, tome-se $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k})$. Pelo critério de Weyl, existe $\tilde{f}_n \equiv (\tilde{f}_j^{(n)})_{j \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{C})$ tal que $\|\tilde{f}_n\| = 1$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ e

$$\tilde{f}_n \rightarrow 0, \quad \|(\mathbf{J}_{0,k} - \lambda \mathbf{I})\tilde{f}_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Como $1 = \|\tilde{f}_n\|^2 = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{f}_{jk+i}^{(n)}|^2 \right)$, existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{f}_{jk+i_0}^{(n)}|^2 \geq \frac{1}{k}$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Defina-se $\hat{f}_n \equiv (\hat{f}_j^{(n)})_j \in \ell^2(\mathbb{C})$ por $\hat{f}_j^{(n)} := \tilde{f}_{jk+i_0}^{(n)}$. Note-se que $\|\hat{f}_n\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{f}_j^{(n)}|^2 \geq \frac{1}{k}$ para todo n . Seja

$$f_n := \frac{\hat{f}_n}{\|\hat{f}_n\|} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

É evidente que $f_n \in \ell^2(\mathbb{C})$ e $\|f_n\| = 1$ para todo n . Para provar que $f_n \rightarrow 0$ em $\ell^2(\mathbb{C})$ basta mostrar que

$$\langle f_n, h \rangle \rightarrow 0 \quad (\text{com } n \rightarrow +\infty) \quad (5.9)$$

para todo $h \in \ell^2(\mathbb{C})$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\ell^2(\mathbb{C})$. De facto, tome-se arbitrariamente $h \equiv (h_n)_n \in \ell^2(\mathbb{C})$. Defina-se $g \equiv (g_n)_n$ por

$$g_{jk+i} := \begin{cases} h_j & \text{se } i = i_0 \\ 0 & \text{se } i \in \{0, 1, \dots, k-1\} \setminus \{i_0\} \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Então $g \in \ell^2(\mathbb{C})$ e

$$\langle f_n, h \rangle = \frac{1}{\|\widehat{f}_n\|} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{f}_{jk+i_0}^{(n)} g_{jk+i_0} = \frac{1}{\|\widehat{f}_n\|} \sum_{\nu=0}^{\infty} \widetilde{f}_{\nu}^{(n)} g_{\nu} = \frac{1}{\|\widehat{f}_n\|} \langle \widetilde{f}_n, g \rangle,$$

donde resulta

$$|\langle f_n, h \rangle| \leq \sqrt{k} |\langle \widetilde{f}_n, g \rangle|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Isto prova (5.9), uma vez que $\widetilde{f}_n \rightarrow 0$, facto que implica $\langle \widetilde{f}_n, g \rangle \rightarrow 0$. Para provar que $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)$, resta mostrar que $\|(\mathbf{J}_Q - \lambda \mathbf{I})f_n\| \rightarrow 0$. De facto,

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_n\|^2 \|(\mathbf{J}_Q - \lambda \mathbf{I})f_n\|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} |\sqrt{s_j} \widehat{f}_{j-1}^{(n)} + (r_j - \lambda) \widehat{f}_j^{(n)} + \sqrt{s_{j+1}} \widehat{f}_{j+1}^{(n)}|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} |\sqrt{s_j} \widetilde{f}_{(j-1)k+i_0}^{(n)} + (r_j - \lambda) \widetilde{f}_{jk+i_0}^{(n)} + \sqrt{s_{j+1}} \widetilde{f}_{(j+1)k+i_0}^{(n)}|^2 \\ &\leq \|(\mathbf{J}_{0,k} - \lambda \mathbf{I})\widetilde{f}_n\|^2, \end{aligned}$$

donde $\|(\mathbf{J}_Q - \lambda \mathbf{I})f_n\| \leq \sqrt{k} \|(\mathbf{J}_{0,k} - \lambda \mathbf{I})\widetilde{f}_n\| \rightarrow 0$, logo $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)$. Conclui-se, assim, que $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k}) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)$.

Resta mostrar que $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k})$. Seja $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)$. Então, existe $f_n \equiv (f_j^{(n)})_j \in \ell^2(\mathbb{C})$ tal que $\|f_n\| = 1$ para todo o n e

$$f_n \rightarrow 0, \quad \|(\mathbf{J}_Q - \lambda \mathbf{I})f_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Defina-se $\widetilde{f}_n \equiv (\widetilde{f}_j^{(n)})_j \in \ell^2(\mathbb{C})$ por

$$\widetilde{f}_{jk+i}^{(n)} := \begin{cases} f_j^{(n)} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \in \{1, \dots, k-1\} \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Tem-se $\|\widetilde{f}_n\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\widetilde{f}_j^{(n)}|^2 = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} |\widetilde{f}_{jk+i}^{(n)}|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |f_j^{(n)}|^2 = \|f_n\|^2$, logo $\|\widetilde{f}_n\| = \|f_n\| = 1$ para todo o n . Sejam $f \equiv (f_j)_j \in \ell^2(\mathbb{C})$ e $\widehat{f} \equiv (\widehat{f}_j)_j$, com $\widehat{f}_j := f_{jk}$ para todo o $j = 0, 1, 2, \dots$. Então, tem-se $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{C})$ e

$$\langle \widetilde{f}_n, f \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{f}_j^{(n)} f_j = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{f}_{jk+i}^{(n)} f_{jk+i} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(n)} f_{jk} = \langle f_n, \widehat{f} \rangle \rightarrow 0,$$

logo $\widetilde{f}_n \rightarrow 0$ em $\ell^2(\mathbb{C})$. Finalmente, prove-se que $\|(\mathbf{J}_{0,k} - \lambda \mathbf{I})\widetilde{f}_n\| \rightarrow 0$. De facto,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{J}_{0,k} - \lambda \mathbf{I})\widetilde{f}_n\|^2 &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} |\sqrt{s_j} \widetilde{f}_{(j-1)k+i}^{(n)} + (r_j - \lambda) \widetilde{f}_{jk+i}^{(n)} + \sqrt{s_{j+1}} \widetilde{f}_{(j+1)k+i}^{(n)}|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} |\sqrt{s_j} f_{j-1}^{(n)} + (r_j - \lambda) f_j^{(n)} + \sqrt{s_{j+1}} f_{j+1}^{(n)}|^2 \\ &= \|(\mathbf{J}_Q - \lambda \mathbf{I})f_n\|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Conclui-se que $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k})$ e, portanto, $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k})$. □

Regressando ao operador de Jacobi \mathbf{J} dado por (5.3), observe-se que se pode escrever

$$\pi_k(\mathbf{J}) = \mathbf{J}_{0,k} + \begin{pmatrix} A_0 & B_1 & & & \\ B_1^t & A_1 & B_2 & & \\ & B_2^t & A_2 & B_3 & \\ & & B_3^t & A_3 & B_4 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

onde a última matriz é tridiagonal infinita por blocos, com $(A_n)_n$ e $(B_n)_n$ sucessões de matrizes de ordem k , sendo cada B_n uma matriz triangular inferior. (As expressões explícitas para as entradas das matrizes A_n e B_n podem obter-se calculando a diferença $\pi_k(\mathbf{J}) - \mathbf{J}_{0,k}$.)

Teorema 5.7. *Seja \mathbf{J} o operador de Jacobi representado por (5.3) e suponha-se que as entradas de \mathbf{J} satisfazem as condições (5.4) e*

$$b_n^{(j)} \in \mathbb{R}, \quad c_n^{(j)} > 0 \quad (0 \leq j \leq k-1; n = 0, 1, 2, \dots).$$

(Nestas condições, \mathbf{J} é um operador limitado e auto-adjunto em $\ell^2(\mathbb{C})$). Seja $(P_n)_n$ a SPOM caracterizada por (4.2), sendo as sucessões $(a_n^{(j)})_n$ e $(b_n^{(j)})_n$ que figuram em (4.2) construídas à custa das sucessões $(b_n^{(j)})_n$ e $(c_n^{(j)})_n$ que aparecem na definição de \mathbf{J} , com $(a_n^{(j)})_n$ definida por (5.6). Considerando a SPOM $(P_n)_n$ assim definida, suponha-se que se verificam as condições (i)–(iv) que figuram no Teorema 4.1, com $r = 0$, e suponha-se ainda que

$$A_n \rightarrow 0, \quad B_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (5.11)$$

onde A_n e B_n são as matrizes de ordem k definidas por (5.10). Então

$$\pi_k(\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J})) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q), \quad (5.12)$$

onde \mathbf{J}_Q é o operador de Jacobi definido como no Lema 5.6 e cujas entradas, r_n e s_n , são definidas por (4.11). Consequentemente, tem-se

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}) \subseteq \pi_k^{-1}(\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)). \quad (5.13)$$

Demonstração. Atendendo à hipótese (5.11), deduz-se do Teorema 5.3, do Lema 5.6 e do Teorema 5.2 (de Weyl) que as igualdades

$$\pi_k(\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J})) = \sigma_{\text{ess}}(\pi_k(\mathbf{J})) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_{0,k}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q)$$

se verificam. □

Observação 5.8. *Fica em aberto a questão de saber se em (5.13) a relação de inclusão pode ser substituída por uma igualdade.*

Nas secções seguintes analisam-se algumas situações especiais, envolvendo transformações quadráticas e cúbicas. É conveniente introduzir as matrizes

$$\tilde{A}_n := r_n I_k + A_n \quad e \quad \tilde{B}_n := \sqrt{s_n} I_k + B_n . \tag{5.14}$$

Assim, (5.10) pode reescrever-se na forma

$$\pi_k(\mathbf{J}) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_0 & \tilde{B}_1 & & & & \\ \tilde{B}_1^t & \tilde{A}_1 & \tilde{B}_2 & & & \\ & \tilde{B}_2^t & \tilde{A}_2 & \tilde{B}_3 & & \\ & & \tilde{B}_3^t & \tilde{A}_3 & \tilde{B}_4 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} . \tag{5.15}$$

O resultado seguinte, estabelecido por T. S. Chihara [18] (e provado de forma alternativa por Y. Last e B. Simon [43, Teorema 7.2]) será também usado.

Teorema 5.9. [18, 43] *Sob as condições do Lema 5.6, se $s_n \rightarrow 0$ e R é o conjunto de pontos limite de $(r_n)_n$, então*

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}_Q) = R .$$

Observação 5.10. *Recorde-se que um número real x é um ponto limite de uma sucessão de números reais $(x_n)_n$ se existir uma subsucessão de $(x_n)_n$ que converge para x .*

5.3 Espectro essencial obtido via uma transformação quadrática

Seja \mathbf{J} um operador de Jacobi em $\ell^2(\mathbb{C})$ definido por

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & b_0 & c_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_3 & b_1 & c_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & b_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} , \tag{5.16}$$

onde

$$b_0, b_1 \in \mathbb{R}, \quad c_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} c_n < \infty. \quad (5.17)$$

Sob tais condições, \mathbf{J} é um operador limitado e auto-adjunto em $\ell^2(\mathbb{C})$. Este operador pode ser estudado usando uma transformação polinomial, com $k = 2$ e $m = 1$. De facto, comparando com (5.3) e (5.6), tem-se

$$b_n^{(0)} = b_0, \quad b_n^{(1)} = b_1, \quad a_n^{(0)} = c_{2n}^2, \quad a_n^{(1)} = c_{2n+1}^2$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Constata-se de imediato que a condições (i)–(iv) do Teorema 4.1 são verificadas (com $k = 2$ e $m = 1$, e tomando $r = 0$), tendo-se

$$\begin{aligned} r_n &:= c_{2n+2}^2 + c_{2n+1}^2 - c_2^2 - c_1^2, & s_n &:= c_{2n}^2 c_{2n+1}^2 \\ \theta_1(x) &:= x - b_0, & \pi_2(x) &:= x^2 - (b_0 + b_1)x + b_0 b_1 - c_1^2 - c_2^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Convencionando que $c_0 := 0$ e calculando $\pi_2(\mathbf{J})$, após alguns cálculos, determinam-se as matrizes \tilde{A}_n e \tilde{B}_n em (5.15), obtendo-se

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} c_{2n}^2 - c_2^2 + c_{2n+1}^2 - c_1^2 & 0 \\ 0 & c_{2n+2}^2 - c_2^2 + c_{2n+1}^2 - c_1^2 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e

$$\tilde{B}_n = \begin{pmatrix} c_{2n-1} c_{2n} & 0 \\ 0 & c_{2n} c_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Consequentemente, de acordo com (5.14), deduz-se

$$A_n = \begin{pmatrix} c_{2n}^2 - c_{2n+2}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = c_{2n} \begin{pmatrix} c_{2n-1} - c_{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

para todo o n . Assim, do Teorema 5.7, obtém-se imediatamente o seguinte

Teorema 5.11. *Seja \mathbf{J} o operador de Jacobi definido por (5.16)–(5.17). Designe π_2 o polinómio definido em (5.18) e Y o conjunto dos pontos limite de $(c_{2n-1})_n$. Se $c_{2n} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow +\infty$, então*

$$\pi_2(\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J})) = \{x = y^2 - (c_1^2 + c_2^2) \mid y \in Y\}.$$

Exemplo. seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ o conjunto dos números racionais do intervalo $]0, 1[$ e considere-se que em (5.16) as entradas de \mathbf{J} são definidas por

$$b_0 = b_1 = 0, \quad c_{2n} = 1/n, \quad c_{2n-1} = \alpha_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Então, é $\pi_2(x) = x^2 - 1 - \alpha_1^2$, $Y = [0, 1]$ e $S = [-1 - \alpha_1^2, -\alpha_1^2]$, logo

$$\sigma_{\text{ess}}(J) \subseteq \pi_2^{-1}(S) = [-1, 1].$$

5.4 Espectro essencial obtido via uma transformação cúbica

Seja \mathbf{J} um operador de Jacobi em $\ell^2(\mathbb{C})$ definido por

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & b_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & b_2 & c_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_3 & b_3 & c_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & b_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

onde

$$b_n \in \mathbb{R}, \quad c_n > 0, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \{c_n + |b_n|\} < \infty. \quad (5.21)$$

Suponha-se que as condições

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad b_{3n+2} &= b_2 & \text{(iii)} \quad c_{3n+1}^2 - b_{3n}b_{3n+1} &= c_1^2 - b_0b_1 \\ \text{(ii)} \quad b_{3n} + b_{3n+1} &= b_0 + b_1 & \text{(iv)} \quad c_{3n}^2 + c_{3n-1}^2 &= c_3^2 + c_2^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

se verificam para todo o $n = 1, 2, \dots$. Nestas condições, vamos mostrar que \mathbf{J} está relacionado com uma transformação cúbica. De facto, tem-se

$$b_n^{(j)} = b_{3n+j}, \quad a_n^{(j)} = c_{3n+j}^2 \quad (j = 0, 1, 2)$$

para todo o n . As hipótese (5.22) garantem que as condições (i)–(iv) do Teorema 4.1 são verificadas (com $k = 3$ e $m = 2$, e tomando $r = 0$), tendo-se

$$\begin{aligned} r_n &:= c_3^2 b_4 + c_2^2 b_0 - c_{3n+3}^2 b_{3n+4} - c_{3n+2}^2 b_{3n}, \\ s_n &:= c_{3n}^2 c_{3n+1}^2 c_{3n+2}^2, \\ \theta_2(x) &:= x^2 - (b_0 + b_1)x + b_0 b_1 - c_1^2, \\ \pi_3(x) &:= x^3 - (b_0 + b_1 + b_2)x^2 + (b_0 b_1 + b_0 b_2 + b_1 b_2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)x \\ &\quad + c_2^2 b_0 + c_1^2 b_2 + c_3^2 b_4 - b_0 b_1 b_2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Assim, calculando $\pi_3(\mathbf{J})$, após alguns cálculos é possível determinar as matrizes \tilde{A}_n e \tilde{B}_n que figuram em (5.15), logo, de (5.14), obtém-se

$$A_n = \begin{pmatrix} c_{3n}^2(b_{3n} - b_{3n+1}) + c_{3n+3}^2(b_{3n+4} - b_{3n}) & c_{3n+1}(c_{3n}^2 - c_{3n+3}^2) & 0 \\ c_{3n+1}(c_{3n}^2 - c_{3n+3}^2) & c_{3n+3}^2(b_{3n+4} - b_{3n+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ (com a convenção $c_0 = 0$) e

$$B_n = c_{3n} \begin{pmatrix} c_{3n-2}c_{3n-1} - c_{3n+1}c_{3n+2} & 0 & 0 \\ c_{3n-1}(b_{3n} - b_{3n-3}) & c_{3n+1}(c_{3n-1} - c_{3n+2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Deste modo, do Teorema 5.7, deduz-se:

Teorema 5.12. *Seja \mathbf{J} o operador de Jacobi definido por (5.20)–(5.22). Sejam π_3 o polinómio dado por (5.23) e Y o conjunto dos pontos limite de $(b_{3n})_n$. Se $c_{3n} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow +\infty$, então*

$$\pi_3(\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J})) = S := \{x = c_2^2 b_0 + c_3^2 b_4 - (c_2^2 + c_3^2)y \mid y \in Y\}.$$

Exemplo 1. Escolhendo

$$b_n = 0, \quad c_{3n+1} = 1, \quad c_{3n} = 1/\sqrt{n+1}, \quad c_{3n-1} = \sqrt{n/(n+1)},$$

obtém-se $\pi_3(x) = x(x^2 - 2)$ e $S = \{0\}$, logo deduz-se

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}) \subseteq \pi_3^{-1}(\{0\}) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}.$$

Exemplo 2. Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$. Escolhendo

$$\begin{aligned} b_{3n} &= c \sin^2(n+1), & b_{3n+1} &= c \cos^2(n+1), & b_{3n+2} &= b, \\ c_{3n+1} &= \frac{c}{2} |\sin(2n+2)|, & c_{3n} &= 1/\sqrt{n+1}, & c_{3n-1} &= \sqrt{n/(n+1)}, \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \theta_2(x) &= x(x-c), \\ \pi_3(x) &= x^3 - (b+c)x^2 + (bc-1)x + \frac{c}{2}(\sin^2 1 + \cos^2 2) \end{aligned}$$

e $Y = [0, c]$ (porque o conjunto $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é denso no intervalo $[-1, 1]$), logo

$$S = \left[\frac{c}{2}(\sin^2 1 + \cos^2 2) - c, \frac{c}{2}(\sin^2 1 + \cos^2 2) \right].$$

Assim, deduz-se

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J}) \subseteq \pi_3^{-1}(S) = I_1 \cup I_2 \cup I_3,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left[\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}, \min \left\{ 0, \frac{c+b-\sqrt{(c-b)^2+4}}{2} \right\} \right], \\ I_2 &:= \left[\max \left\{ 0, \frac{c+b-\sqrt{(c-b)^2+4}}{2} \right\}, \min \left\{ c, \frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2} \right\} \right], \\ I_3 &:= \left[\max \left\{ c, \frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2} \right\}, \frac{c+b+\sqrt{(c-b)^2+4}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que o conjunto $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{J})$ está contido

- (i) numa união de três intervalos disjuntos se $bc \neq 1$ e $c(b - c) \neq 1$;
- (ii) numa união de dois intervalos disjuntos se $bc \neq 1$ e $c(c - b) = 1$, ou se $bc = 1$ e $c(c - b) \neq 1$;
- (iii) no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$ se $bc = c(c - b) = 1$ (i.e., $b = 1/\sqrt{2}$ e $c = \sqrt{2}$).

As figuras 5.1–5.4 ilustram o conjunto $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ (a vermelho) para algumas escolhas dos parâmetros b e c .

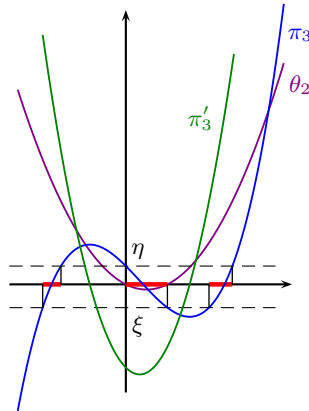


Figura 5.1: $b = 0, c = \frac{1}{2}$

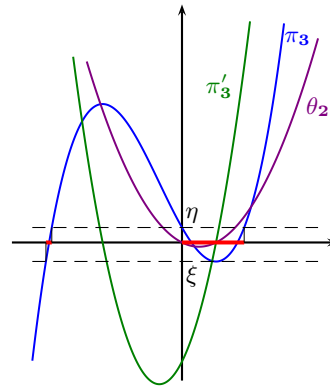


Figura 5.2: $b = -\frac{3}{2}, c = \frac{1}{2}$

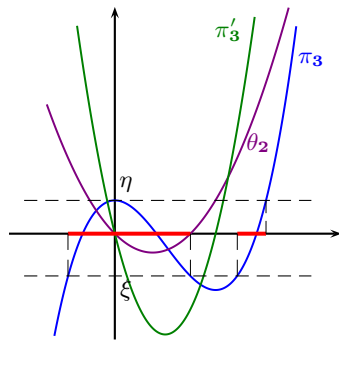


Figura 5.3: $b = 1, c = 1$

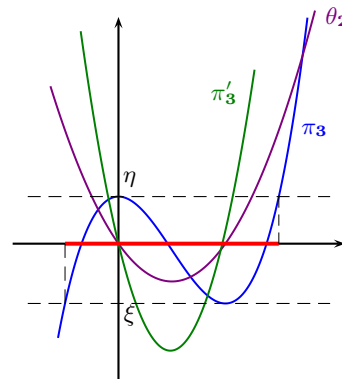


Figura 5.4: $b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = \sqrt{2}$

Apêndice A

Modificações racionais de medidas

Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} duas funcionais regulares e suponha-se que cada uma destas funcionais é uma modificação racional da outra, i.e., existem polinómios Λ e ϕ tais que, no sentido distribucional,

$$\Lambda(x)\mathbf{u} = \phi(x)\mathbf{v} . \quad (\text{A.1})$$

Designem M e N os graus de Λ e ϕ (resp.) e ponha-se

$$\Lambda(x) = \prod_{i=1}^M (x - x_i) , \quad \phi(x) = \prod_{j=1}^N (x - y_j) .$$

Nestas condições, constata-se facilmente que \mathbf{u} se pode exprimir em função de \mathbf{v} pela fórmula

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M u_{0,i} \prod_{j=1}^{M-i} (x - x_{M-j+1})^{-1} \delta(x - x_i) + \prod_{i=1}^M (x - x_{M-i+1})^{-1} \phi(x)\mathbf{v} , \quad (\text{A.2})$$

onde

$$u_{0,i} := \left(\prod_{j=1}^{M-i} (x - x_{M-j+1}) \mathbf{u} \right)_0 , \quad i = 1, 2, \dots, M .$$

Admita-se ainda que as funcionais regulares \mathbf{u} e \mathbf{v} são definidas positivas, de modo que existem duas medidas de Borel positivas, $d\mu_1$ e $d\mu_2$, com momentos finitos de todas as ordens e suportes infinitos, que representam \mathbf{u} e \mathbf{v} no sentido usual (estabelecido pelo teorema de representação) e que todos os zeros do polinómio Λ são reais e distintos, digamos, $x_1 < x_2 < \dots < x_M$, e que estão

todos fora do invólucro convexo do suporte de $d\mu_1$. Nestas condições, vamos provar que as medidas $d\mu_1$ e $d\mu_2$ estão relacionadas por

$$d\mu_1(x) = \left| \frac{\phi(x)}{\Lambda(x)} \right| d\mu_2(x) + \sum_{i=1}^M M_i \delta_{x_i}, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$M_i := \frac{1}{\Lambda'(x_i)} \left\{ \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^{j-1} (x_i - x_k) u_{0,j} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{v_j}{j!} (\theta_{x_i} \phi)^{(j)}(0) - \phi(x_i) F(x_i, d\mu_2) \right\}$$

para todo o $i = 1, 2, \dots, M$. Para provar (A.3), começamos por mostrar que

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{i=1}^M (x - x_{M-i+1})^{-1} \phi(x) \mathbf{v}, f \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{v}, \phi(x) \left[\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^M (x - x_i)} - \sum_{i=1}^M \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^M (x_i - x_j)} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

e

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{j=1}^{M-i} (x - x_{M-j+1})^{-1} \delta_{x_i}, f \right\rangle \\ &= \left\langle \delta_{x_i}, \frac{f(x)}{\prod_{k=i+1}^M (x - x_k)} - \sum_{j=i+1}^M \frac{f(x_j)}{(x - x_j) \prod_{k=i+1, k \neq j}^M (x_j - x_k)} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

para todo o $i = 1, 2, \dots, M$. A prova destas igualdades faz-se por indução sobre M . Prove-se primeiro (A.4). É evidente que (A.4) se verifica para $M = 1$, pois

$$\left\langle (x - x_1)^{-1} \phi(x) \mathbf{v}, f \right\rangle = \left\langle \phi(x) \mathbf{v}, \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}, \phi(x) \left[\frac{f(x)}{x - x_1} - \frac{f(x_1)}{x - x_1} \right] \right\rangle.$$

Suponha-se agora que (A.4) se verifica para o inteiro M e prove-se que, então, também se verifica para o sucessor, $M + 1$. De facto, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{i=1}^{M+1} (x - x_{M-i+2})^{-1} \phi(x) \mathbf{v}, f \right\rangle \\ &= \left\langle (x - x_{M+1})^{-1} \prod_{i=1}^M (x - x_{M-i+1})^{-1} \phi(x) \mathbf{v}, f \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^M (x - x_{M-i+1})^{-1} \phi(x) \mathbf{v}, \frac{f(x) - f(x_{M+1})}{x - x_{M+1}} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{v}, \phi(x) \left[\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{M+1} (x - x_i)} - \frac{f(x_{M+1})}{\prod_{i=1}^{M+1} (x - x_i)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{i=1}^M \left(\frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{M+1} (x_i - x_j)} - \frac{f(x_{M+1})}{(x - x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{M+1} (x_i - x_j)} \right) \right] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \mathbf{v}, \phi(x) \left[\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{M+1} (x - x_i)} - \frac{f(x_{M+1})}{(x - x_{M+1}) \prod_{j=1}^M (x_{M+1} - x_j)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^M \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{M+1} (x_i - x_j)} \right] \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{v}, \phi(x) \left[\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{M+1} (x - x_i)} - \sum_{i=1}^{M+1} \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{M+1} (x_i - x_j)} \right] \right\rangle,
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é justificada pela hipótese de indução e a quarta igualdade é justificada pelo facto de ser (efectuando uma decomposição do primeiro membro em funções racionais)

$$\frac{f(x_{M+1})}{\prod_{i=1}^{M+1} (x - x_i)} = \sum_{i=1}^{M+1} \frac{f(x_{M+1})}{(x - x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{M+1} (x_i - x_j)}.$$

A prova de (A.5) faz-se seguindo um raciocínio análogo ao anterior. De seguida, recorde-se que, por definição do operador θ_{x_i} , é $\theta_{x_i}(\phi(x)) = \frac{\phi(x) - \phi(x_i)}{x - x_i}$, logo pode-se escrever $\theta_{x_i}(\phi(x)) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\theta_{x_i} \phi)^{(j)}(0)}{j!} x^j$ e, conseqüentemente,

$$\phi(x) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\theta_{x_i} \phi)^{(j)}(0)}{j!} x^j \right) (x - x_i) + \phi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (\text{A.6})$$

De (A.2), (A.4), (A.5) e (A.6) deduz-se

$$d\mu_1(x) = \left| \frac{\phi(x)}{\Lambda(x)} \right| d\mu_2(x) + \sum_{i=1}^M \left(m_i \delta_{x_i} + \sum_{j=i+1}^M \frac{u_{0,i}}{\prod_{k=i, k \neq j}^M (x_j - x_k)} \delta_{x_j} \right),$$

onde

$$m_i := \frac{u_{0,i}}{\prod_{k=i+1}^M (x_i - x_k)} - \frac{1}{\Lambda'(x_i)} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{v_j}{j!} (\theta_{x_i} \phi)^{(j)}(0) + \phi(x_i) F(x_i, d\mu_2) \right\},$$

o que prova (A.3).

Apêndice B

Complemento à secção 2.4

Neste Apêndice apresentam-se justificações detalhadas para duas afirmações feitas na secção 2.4. As notações aqui consideradas são as da secção 2.4.

B.1 Determinação de Φ_1, Φ_2, Ψ_2 e Ψ_3

Nesta secção determinam-se os polinómios Φ_1, Φ_2, Ψ_2 e Ψ_3 indicados em (2.31). Uma vez que são conhecidos os primeiros cinco polinómios da família $(Q_n)_n$, pode-se concluir, de (2.30), que

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{15}, \\ P_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{14}x + \frac{3}{28}.$$

Além disso, como $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ satisfazem as RRTT's

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1}, \quad Q_{n+1}(x) = (x - \tilde{\beta}_n)Q_n - \tilde{\gamma}_n Q_{n-1}$$

($n = 0, 1, 2, \dots$), deduz-se $\gamma_1 = \frac{3}{20}$, $\gamma_2 = \frac{64}{315}$, $\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{3}$, $\tilde{\gamma}_2 = \frac{4}{15}$ e $\tilde{\gamma}_3 = \frac{9}{35}$. Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} as funcionais regulares a respeito das quais $(P_n)_n$ e $(Q_n)_n$ são SPOM's (resp.), normalizadas de modo que $u_0 = v_0 = 1$. Uma vez que $\langle \mathbf{u}, P_0 \rangle = u_0$, $0 = \langle \mathbf{u}, P_1 \rangle = u_1 - \frac{1}{2}u_0$, $0 = \langle \mathbf{u}, P_2 \rangle = u_2 - \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{15}u_0$ e $0 = \langle \mathbf{u}, P_3 \rangle = u_3 - \frac{3}{4}u_2 - \frac{3}{14}u_1 + \frac{3}{28}u_0$, deduz-se $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{5}$ e $u_3 = \frac{3}{10}$. Analogamente tem-se $\langle \mathbf{v}, Q_0 \rangle = v_0$, $0 = \langle \mathbf{v}, Q_1 \rangle = v_1$, $0 = \langle \mathbf{v}, Q_2 \rangle = v_2 - \frac{1}{3}v_0$, $0 = \langle \mathbf{v}, Q_3 \rangle = v_3 - \frac{3}{5}v_1$ e $0 = \langle \mathbf{v}, Q_4 \rangle = v_4 - \frac{6}{7}v_2 + \frac{3}{35}v_0$, donde $v_1 = 0$, $v_2 = \frac{1}{3}$, $v_3 = 0$ e $v_4 = \frac{1}{5}$. Por outro lado, nas condições deste exemplo, (2.9) reduz-se a

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{c}_0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{d}_0 = \frac{s_1}{s_1 - r_1} \mathbf{e}_0 - \frac{r_1}{s_1 - r_1} \mathbf{c}_0, \quad \mathbf{d}_1 = \frac{1}{s_1 - r_1} \mathbf{c}_0 - \frac{1}{s_1 - r_1} \mathbf{e}_0. \quad (\text{B.1})$$

Considere-se o sistema constituído pelas duas equações que se obtêm de (2.7) e de (2.8) para $n = 1$. Multiplicando a primeira destas equações por s_2 e a segunda por r_2 , e subtraindo as equações resultantes, membro a membro, obtém-se

$$s_2 \mathbf{e}_1 - r_2 \mathbf{c}_1 = (s_2 - r_2) \mathbf{d}_1,$$

donde, atendendo à segunda igualdade em (B.1),

$$\frac{s_2 - r_2}{s_1 - r_1} \mathbf{e}_0 + s_2 \mathbf{e}_1 = \frac{s_2 - r_2}{s_1 - r_1} \mathbf{c}_0 + r_2 \mathbf{c}_1. \quad (\text{B.2})$$

Como, neste exemplo, é $k = 1$ e $m = 0$, (2.13) e (2.14) reduzem-se a

$$D\mathbf{c}_n = -(n+1)\mathbf{b}_{n+1}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{B.3})$$

logo, tomando a derivada (distribucional) em ambos os membros de (B.2) e atendendo às relações (2.4), obtém-se

$$D(\Phi_1 \mathbf{u}) = \Psi_2 \mathbf{v},$$

onde (atenda-se a que se assume que $u_0 = v_0 = 1$)

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &:= \frac{s_2 - r_2}{s_1 - r_1} P_0(x) + \frac{s_2}{\langle \mathbf{u}, P_1^2 \rangle} P_1(x) = \frac{s_2 - r_2}{s_1 - r_1} P_0(x) + \frac{s_2}{\gamma_1} P_1(x) \\ &= -\frac{8}{3}x + \frac{8}{3}, \\ \Psi_2(x) &:= \frac{r_2 - s_2}{(s_1 - r_1)\langle \mathbf{v}, Q_1^2 \rangle} Q_1(x) - \frac{2r_2}{\langle \mathbf{v}, Q_2^2 \rangle} Q_2(x) \\ &= \frac{r_2 - s_2}{(s_1 - r_1)\tilde{\gamma}_1} Q_1(x) - \frac{2r_2}{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2} Q_2(x) \\ &= -6x^2 - 4x + 2. \end{aligned}$$

De seguida, considere-se o sistema constituído pelas duas equações que se obtêm de (2.7) e de (2.8) para $n = 2$. Multiplicando a primeira destas equações por s_3 e a segunda por r_3 , e subtraindo as equações resultantes, obtém-se

$$s_3 \mathbf{e}_2 - r_3 \mathbf{c}_2 = (s_3 - r_3) \mathbf{d}_2 = \frac{s_3 - r_3}{r_2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1), \quad (\text{B.4})$$

sendo a última igualdade justificada por (2.7) para $n = 1$. Assim, substituindo a expressão de \mathbf{d}_1 dada por (B.1) em (B.4), deduz-se

$$\frac{r_3 - s_3}{r_2(s_1 - r_1)} \mathbf{e}_0 + \frac{r_3 - s_3}{r_2} \mathbf{e}_1 + s_3 \mathbf{e}_2 = \frac{r_3 - s_3}{r_2(s_1 - r_1)} \mathbf{c}_0 + r_3 \mathbf{c}_2,$$

donde, derivando e tendo em conta (B.3),

$$D(\Phi_2 \mathbf{u}) = \Psi_3 \mathbf{v} ,$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \frac{r_3 - s_3}{r_2(s_1 - r_1)} P_0(x) + \frac{r_3 - s_3}{r_2 \gamma_1} P_1(x) + \frac{s_3}{\gamma_1 \gamma_2} P_2(x) \\ &= -\frac{225}{16} x^2 + \frac{225}{8} x - \frac{225}{16} , \\ \Psi_3(x) &= \frac{s_3 - r_3}{r_2(s_1 - r_1) \tilde{\gamma}_1} Q_1(x) - \frac{3r_3}{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3} Q_3(x) \\ &= -\frac{675}{16} x^3 + \frac{675}{16} x , \end{aligned}$$

o que conclui a prova de (2.31).

B.2 Determinação das classes de \mathbf{u} e \mathbf{v}

Nesta secção aplica-se o algoritmo de redução da classe de uma funcional semi-clássica descrito na secção 1.5 e mostra-se que as funcionais \mathbf{u} e \mathbf{v} que aparecem no exemplo da secção 2.4 satisfazem as equações diferenciais distribucionais (2.33). Partimos das equações (2.32), as quais estabelecem que \mathbf{u} e \mathbf{v} são funcionais semiclássicas de classes quando muito 2 e 4 (resp.). Há que mostrar que é possível “reduzir” estas classes, provando que, de facto, \mathbf{u} e \mathbf{v} satisfazem (2.33), i.e., são de classe 0.

Redução da classe de \mathbf{u}

Considerando as notações adoptadas no algoritmo de redução da classe, sejam $\Phi(x) := (x^2 - 1)^2$ e $\Psi(x) := 6(x^2 - 1)(x - \frac{1}{3})$. Então $\Psi(-1) - \Phi'(-1) = 0$ e $\theta_{-1}\Psi(x) - \theta_{-1}^2\Phi(x) = 5x^2 - 6x + 1 = (5x - 1)(x - 1)$, o que implica que $\langle \mathbf{u}, \theta_{-1}\Psi(x) - \theta_{-1}^2\Phi(x) \rangle = 5u_2 - 6u_1 + u_0 = 0$, logo a primeira equação de (2.32) reduz-se a

$$D(\tilde{\Phi}_0(x) \mathbf{u}) = \tilde{\Psi}_0(x) \mathbf{u} , \tag{B.5}$$

onde $\tilde{\Phi}_0(x) := \theta_{-1}\Phi(x) = (x - 1)^2(x + 1)$ e $\tilde{\Psi}_0(x) := \theta_{-1}\Psi(x) - \theta_{-1}^2\Phi(x) = (5x - 1)(x - 1)$. Como $\tilde{\Psi}_0(1) - \tilde{\Phi}'_0(1) = 0$ e $\theta_1\tilde{\Psi}_0(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_0(x) = 4x - 2$, tem-se $\langle \mathbf{u}, \theta_1\tilde{\Psi}_0(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_0(x) \rangle = 4u_1 - 2u_0 = 0$, o que implica que (B.5) se reduz a

$$D(\tilde{\Phi}_1(x) \mathbf{u}) = \tilde{\Psi}_1(x) \mathbf{u} , \tag{B.6}$$

com $\tilde{\Phi}_1(x) := \theta_1\tilde{\Phi}_0(x) = x^2 - 1$ e $\tilde{\Psi}_1(x) := \theta_1\tilde{\Psi}_0(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_0(x) = 2(2x - 1)$, o que prova a primeira equação em (2.33).

Redução da classe de \mathbf{v}

Sejam $\Phi(x) := (x+1)^2(x-1)^4$ e $\Psi(x) := 6(x+1)(x-1)^3(x+\frac{1}{3})$. Então $\Psi(-1) - \Phi'(-1) = 0$ e $\theta_{-1}\Psi(x) - \theta_{-1}^2\Phi(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4x - 3 = (5x+3)(x-1)^3$, o que implica que $\langle \mathbf{v}, \theta_{-1}\Psi(x) - \theta_{-1}^2\Phi(x) \rangle = 5v_4 - 12v_3 + 6v_2 + 4v_1 - 3v_0 = 0$, logo a segunda equação que figura em (2.32) reduz-se a

$$D\left(\tilde{\Phi}_0(x)\mathbf{v}\right) = \tilde{\Psi}_0(x)\mathbf{v}, \quad (\text{B.7})$$

onde $\tilde{\Phi}_0(x) := \theta_{-1}\Phi(x) = (x-1)^4(x+1)$ e $\tilde{\Psi}_0(x) := \theta_{-1}\Psi(x) - \theta_{-1}^2\Phi(x) = (5x+3)(x-1)^3$. Como $\tilde{\Psi}_0(1) - \tilde{\Phi}'_0(1) = 0$ e $\theta_1\tilde{\Psi}_0(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_0(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 2(2x+1)(x-1)^2$, tem-se $\langle \mathbf{v}, \theta_1\tilde{\Psi}_0(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_0(x) \rangle = 4v_3 - 6v_2 + 2v_0 = 0$, logo (B.7) reduz-se a

$$D\left(\tilde{\Phi}_1(x)\mathbf{v}\right) = \tilde{\Psi}_1(x)\mathbf{v}, \quad (\text{B.8})$$

com $\tilde{\Phi}_1(x) := \theta_1\tilde{\Phi}_0(x) = (x+1)(x-1)^3$ e $\tilde{\Psi}_1(x) := \theta_1\tilde{\Psi}_0(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_0(x) = 2(2x+1)(x-1)^2$. Uma vez que $\tilde{\Psi}_1(1) - \tilde{\Phi}'_1(1) = 0$ e $\theta_1\tilde{\Psi}_1(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_1(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$, obtém-se $\langle \mathbf{v}, \theta_1\tilde{\Psi}_1(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_1(x) \rangle = 3v_2 - 2v_1 - v_0 = 0$, o que implica que (B.8) se reduz a

$$D\left(\tilde{\Phi}_2(x)\mathbf{v}\right) = \tilde{\Psi}_2(x)\mathbf{v}, \quad (\text{B.9})$$

com $\tilde{\Phi}_2(x) := \theta_1\tilde{\Phi}_1(x) = (x+1)(x-1)^2$ e $\tilde{\Psi}_2(x) := \theta_1\tilde{\Psi}_1(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_1(x) = (3x+1)(x-1)$. Como $\tilde{\Psi}_2(1) - \tilde{\Phi}'_2(1) = 0$ e $\theta_1\tilde{\Psi}_2(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_2(x) = 2x$ tem-se $\langle \mathbf{v}, \theta_1\tilde{\Psi}_2(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_2(x) \rangle = 2v_1 = 0$, logo (B.9) reduz-se a

$$D\left(\tilde{\Phi}_3(x)\mathbf{v}\right) = \tilde{\Psi}_3(x)\mathbf{v}, \quad (\text{B.10})$$

com $\tilde{\Phi}_3(x) := \theta_1\tilde{\Phi}_2(x) = x^2 - 1$ e $\tilde{\Psi}_3(x) := \theta_1\tilde{\Psi}_2(x) - \theta_1^2\tilde{\Phi}_2(x) = 2x$, o que prova a segunda equação em (2.33).

Apêndice C

Complemento à secção 4.6

O objectivo neste Apêndice é determinar a medida a respeito da qual a SPOM $(Q_n)_n$ que figura no exemplo da secção 4.6 é ortogonal. Considere-se a SPOM $(\tilde{q}_n)_n$ que satisfaz a RRTT

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{n+1}(x) &= \left(x + \frac{5}{8}\right) \tilde{q}_n(x) - \frac{9}{8} \tilde{q}_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \\ \tilde{q}_{-1}(x) &= 0 \quad \tilde{q}_0(x) = 1.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Verifica-se facilmente que

$$\tilde{q}_n(x) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^n U_n\left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right) = \tilde{q}_n^{(1)}(x), \quad n \geq 0\tag{C.2}$$

e, portanto, $(\tilde{q}_n)_n$ é uma SPOM a respeito da medida

$$d\sigma_{\tilde{q}}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right)^2} \chi_{\left[-\frac{5}{8}-\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right]}(x) dx\tag{C.3}$$

(cf. secção 1.4). Uma vez que $(Q_n)_n$ satisfaz

$$\begin{aligned}Q_{n+1}(x) &= \left(x + \frac{5}{8}\right) Q_n(x) - \frac{9}{8} Q_{n-1}(x), \quad n \geq 2 \\ Q_0(x) &= 1, \quad Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{27}{16},\end{aligned}$$

obtém-se, por (1.28),

$$Q_n(x) = \frac{3}{2} \tilde{q}_n(x) - \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{8}\right) + \frac{5}{8}\right) \tilde{q}_{n-1}^{(1)}(x), \quad n \geq 1.$$

Assim, atendendo a (C.1), tem-se, para todo o $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}Q_n(x) &= \frac{3}{2} \tilde{q}_n(x) - \frac{1}{2} \left(\tilde{q}_n(x) + \frac{9}{8} \tilde{q}_{n-2}(x)\right) - \frac{5}{8} \tilde{q}_{n-1}(x) \\ &= \tilde{q}_n(x) - \frac{5}{8} \tilde{q}_{n-1}(x) - \frac{9}{16} \tilde{q}_{n-2}(x) \\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^n \left\{ U_n\left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right) - \frac{5\sqrt{2}}{12} U_{n-1}\left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} U_{n-2}\left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}}\right) \right\},\end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada por (C.2). Designem \mathbf{u} e \mathbf{v} as funcionais regulares associadas às SPOM's $(Q_n)_n$ e $(\tilde{q}_n)_n$, respectivamente. Uma vez que

$$Q_n(x) = \tilde{q}_n(x) - \frac{5}{8}\tilde{q}_{n-1}(x) - \frac{9}{16}\tilde{q}_{n-2}(x), \quad n \geq 0,$$

então existem constantes a , b e λ tais que

$$(x-a)(x-b)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}. \quad (\text{C.4})$$

Daqui,

$$\begin{cases} \langle (x-a)(x-b)\mathbf{u}, 1 \rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, 1 \rangle \\ \langle (x-a)(x-b)\mathbf{u}, Q_1(x) \rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, Q_1(x) \rangle \\ \langle (x-a)(x-b)\mathbf{u}, Q_2(x) \rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, Q_2(x) \rangle. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Agora, observe-se que:

$$\langle \mathbf{v}, 1 \rangle = v_0;$$

$$\langle \mathbf{v}, Q_1(x) \rangle = \langle \mathbf{v}, \tilde{q}_1(x) - \frac{5}{8} \rangle = -\frac{5}{8}v_0;$$

$$\langle \mathbf{v}, Q_2(x) \rangle = \langle \mathbf{v}, \tilde{q}_2(x) - \frac{5}{8}\tilde{q}_1(x) - \frac{9}{16} \rangle = -\frac{9}{16}v_0;$$

$$\begin{aligned} \langle (x-a)(x-b)\mathbf{u}, 1 \rangle &= \langle \mathbf{u}, (x-a)(x-b) \rangle = \langle \mathbf{u}, x^2 - (a+b)Q_1(x) + ab \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, x^2 + ab \rangle = \langle \mathbf{u}, Q_2(x) - \frac{5}{8}Q_1(x) + \frac{27}{16} + ab \rangle = \left(\frac{27}{16} + ab\right)u_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (x-a)(x-b)\mathbf{u}, Q_1(x) \rangle &= \langle \mathbf{u}, (x-a)(x-b)Q_1(x) \rangle = \langle \mathbf{u}, x^3 - (a+b)x^2 + abx \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, Q_3(x) - (a+b + \frac{5}{4})x^2 + \frac{135}{128} \rangle = -(a+b + \frac{5}{4})\langle \mathbf{u}, Q_2(x) + \frac{27}{16} \rangle + \frac{135}{128}u_0 \\ &= \left[-\frac{27}{16}(a+b + \frac{5}{4}) + \frac{135}{128}\right]u_0 = \left[-\frac{27}{16}(a+b) - \frac{135}{128}\right]u_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (x-a)(x-b)\mathbf{u}, Q_2(x) \rangle &= \langle \mathbf{u}, x^4 + (\frac{5}{8} - a - b)x^3 - (\frac{5}{8}(a+b) - ab + \frac{27}{16})x^2 - \frac{27}{16}ab \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, Q_4(x) - (\frac{5}{4} + a + b)x^3 + (ab - \frac{5}{8}(a+b) + \frac{69}{64})x^2 - \frac{27}{16}ab - \frac{1269}{1024} \rangle \\ &= -(\frac{5}{4} + a + b)\langle \mathbf{u}, x^3 \rangle + (ab - \frac{5}{8}(a+b) + \frac{69}{64})\langle \mathbf{u}, x^2 \rangle - (\frac{27}{16}ab + \frac{1269}{1024})u_0 \\ &= \frac{243}{128}u_0, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, se teve em conta que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, x^3 \rangle &= \langle \mathbf{u}, Q_3(x) - \frac{5}{4}x^2 + \frac{135}{128} \rangle = -\frac{5}{4}\langle \mathbf{u}, x^2 \rangle + \frac{135}{128}u_0 \\ &= -\frac{5}{4}\langle \mathbf{u}, Q_2(x) + \frac{27}{16} \rangle + \frac{135}{128}u_0 = -\frac{135}{64}u_0 + \frac{135}{128}u_0 = -\frac{135}{128}u_0. \end{aligned}$$

Assim, e admitindo que $u_0 = v_0 = 1$, (C.5) dá lugar a

$$\begin{cases} \lambda - \frac{27}{16} - ab = 0 \\ \frac{5}{8}\lambda - \frac{27}{16}(a+b) - \frac{135}{128} = 0 \\ \frac{9}{16}\lambda + \frac{243}{128} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{27}{8} \\ a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{27}{8} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -\frac{27}{8} \\ a = -\frac{27}{8} \\ b = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, considere-se

$$\lambda = -\frac{27}{8}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{27}{8}. \quad (\text{C.6})$$

Como \mathbf{u} é uma funcional regular definida-positiva, então é representada por uma medida de Borel positiva (no sentido do teorema de representação), digamos, $d\sigma_q$. Além disso, recorde-se que \mathbf{v} é representada pela medida $d\sigma_{\bar{q}}$. Assim, como se verifica (C.4), atendendo aos resultados estabelecidos no Apêndice A (cf. (A.1) e (A.3)), tem-se

$$d\sigma_q(x) = M_1\delta(x-a) + M_2\delta(x-b) + \left| \frac{\lambda}{(x-a)(x-b)} \right| d\sigma_{\bar{q}}(x), \quad (\text{C.7})$$

onde

$$M_1 := \frac{u_1 - bu_0 - \lambda F(a, d\sigma_{\bar{q}})}{a-b}, \quad M_2 := u_0 - \frac{u_1 - bu_0 - \lambda F(b, d\sigma_{\bar{q}})}{a-b}.$$

Atendendo a (C.6) e a que $u_0 = 1$, $u_1 = \langle \mathbf{u}, x \rangle = \langle \mathbf{u}, q_1 \rangle = 0$ e (cf. secção 1.4)

$$F(z, d\sigma_{\bar{q}}) = -\frac{4}{9} \left(z + \frac{5}{8} \right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2}{9} \left(z + \frac{5}{8} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

conclui-se que $M_1 = \frac{1}{13}$ e $M_2 = 0$. Finalmente, de (C.3), (C.6) e (C.7), obtém-se

$$d\sigma_q(x) = \frac{1}{13} \delta \left(x - \frac{3}{2} \right) + w_{\sigma_q}(x) \chi_{\left] -\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right[} (x) dx,$$

onde

$$w_{\sigma_q}(x) := -\frac{36\sqrt{2}}{\pi(2x-3)(8x+27)} \sqrt{1 - \left(\frac{8x+5}{12\sqrt{2}} \right)^2}.$$

Bibliografía

- [1] M. ALFARO, F. MARCELLÁN, A. PEÑA, M.L. REZOLA: *On linearly related orthogonal polynomials and their functionals*, J. Math. Anal. Appl. **287** (2003) 307-319.
- [2] M. ALFARO, F. MARCELLÁN, A. PEÑA, M.L. REZOLA: *On rational transformations of linear functionals: Direct problem*, J. Math. Anal. Appl. **298** (2004) 171-183.
- [3] A. ALMENDRAL VÁZQUEZ: *The spectrum of a periodic complex Jacobi matrix revisited*, J. Approx. Theory **105** (2000) 344-351.
- [4] W. AL-SALAM, W. R. ALLAWAY AND R. ASKEY: *Sieved ultraspherical polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984) 39-55.
- [5] P. ALTHAMMER: *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bey Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math. **211** (1962) 192-204.
- [6] R. ÁLVAREZ-NODARSE, J. PETRONILHO, AND N. R. QUINTERO: *On some tridiagonal k -Toeplitz matrices: Algebraic and analytical aspects. Applications*, J. Comput. Appl. Math. **184** (2005) 518-537.
- [7] G. E. ANDREWS, R. ASKEY, AND R. ROY: *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **71**, Cambridge University Press, 1999.
- [8] V. M. BADKOV: *Systems of orthogonal polynomials explicitly represented by the Jacobi polynomials*, Math. Notes **42** (1987) 858-863.
- [9] P. BARRUCAND AND D. DICKINSON: *On Cubic Transformations of Orthogonal Polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966) 810-814.
- [10] D. BESSIS AND P. MOUSSA: *Orthogonality properties of iterated polynomial mappings*, Commun. Math. Phys. **88** (1983) 503-529.

- [11] S. BONAN AND P. NEVAI: *Orthogonal polynomials and their derivatives, I*, J. Approx. Theory, **40** (1984) 134–147.
- [12] S. BONAN, D. S. LUBINSKY, AND P. NEVAI: *Orthogonal polynomials and their derivatives, II*, SIAM J. Math. Anal., **18**(4) (1987) 1163–1176.
- [13] A. BRANQUINHO, A. FOULQUIÉ MORENO, F. MARCELLÁN, AND M. N. REBOCHO: *Coherent pairs of linear functionals on the unit circle*, J. Approx. Theory **153** (2008) 122-137.
- [14] M. G. DE BRUIN AND H. G. MEIJER: *Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev space*, Ann. Numer. Math., **2** (1995) 233-246.
- [15] J. CHARRIS AND M. E. H. ISMAIL: *On sieved orthogonal polynomials VII: generalized polynomial mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 71-93.
- [16] J. CHARRIS, M. E. H. ISMAIL, AND S. MONSALVE: *On sieved orthogonal polynomials X: general blocks of recurrence relations*, Pac. J. Math. **163** (1994) no. 2, 237-267.
- [17] T. S. CHIHARA: *On co-recursive orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 899-905.
- [18] T. S. CHIHARA: *The derived set of the spectrum of a distribution function*, Pacific J. Math. **35** (1970) 571-574.
- [19] T. S. CHIHARA: *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [20] E. A. COHEN: *Zero distribution and behaviour of orthogonal polynomials in the Sobolev space $W^{1,2}[-1, 1]$* , SIAM J. Math. Anal., **6** (1975) 105–116.
- [21] A. M. DELGADO AND F. MARCELLÁN: *Companion linear functionals and Sobolev inner products: a case study*, Meth. Appl. of Anal. **11**(2) (2004) 237-266.
- [22] P. DEYFT: *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics **3**, NY: Courant Institute of Mathematical Sciences. Providence, RI, AMS, ix, 2000.
- [23] J. DINI, P. MARONI AND A. RONVEAUX: *Sur une perturbation de la récurrence vérifiée par une suite de polynomes orthogonaux*, Port. Math. **46** (1989) 269-281.
- [24] C. M. DA FONSECA AND J. PETRONILHO: *Explicit inverse of a tridiagonal k -Toeplitz matrix*, Numer. Math. **100** (2005) 457-482.

- [25] W. GAUTSCHI AND M. ZHANG: *Computing orthogonal polynomials in Sobolev spaces*, Numer. Math. **71** (1995) 159-183.
- [26] M. J. C. GOVER, *The Eigenproblem of a Tridiagonal 2-Toeplitz Matrix*, Linear Algebra Appl. **197-198** (1994) 63-78.
- [27] J. GERONIMO AND W. VAN ASSCHE: *Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **46** (1986) 251-283.
- [28] J. GERONIMO AND W. VAN ASSCHE: *Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1986), 559-581.
- [29] W. HAHN: *Über die Jacobischen Polynome und Zwei Verwandte Polynomklassen*, Math. Zeit. **39** (1935) 634-638.
- [30] YA.L. GERONIMUS: *Sur quelques équations aux différences finies et les systèmes correspondants des polynômes orthogonaux*, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academ. Sci. l'URSS **29** (1940) 536-538.
- [31] M. E. H. ISMAIL: *On sieved orthogonal polynomials III: orthogonality on several intervals*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1986) 89-111.
- [32] M. E. H. ISMAIL: *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **98**, Cambridge University Press, 2005.
- [33] M. E. H. ISMAIL, X. LI: *On sieved orthogonal polynomials IX: orthogonality on the unit circle*, Pacif. J. Math. **153** (1992), 289-297.
- [34] A. ISERLES, P. E. KOCH, S. P. NØRSETT, J. M. SANZ-SERNA: *Orthogonality and approximation in a Sobolev space. Algorithms for approximation*, II (Shrivenham, 1988), 117-124, Chapman and Hall, London, 1990.
- [35] A. ISERLES, P. E. KOCH, S. P. NØRSETT, J. M. SANZ-SERNA: *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, J. Approx. Theory, **65**(2) (1991) 151-175.
- [36] M.N DE JESUS: *Polinômios ortogonais, transformações polinomiais e operadores de Jacobi*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, 2005.
- [37] M.N. DE JESUS AND J. PETRONILHO: *On linearly related sequences of derivatives of orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **347** (2008) 482-492.
- [38] M.N. DE JESUS AND J. PETRONILHO: *On orthogonal polynomials obtained via polynomial mappings*, J. Approx. Theory (2010), doi:10.1016/j.jat.2010.07.012.

- [39] M.N. DE JESUS AND J. PETRONILHO: *Sobolev orthogonal polynomials and (M, N) -coherent pairs of measures*. (Submetido.)
- [40] R. KILLIP, B. SIMON: *Sum rules for Jacobi matrices and their applications to spectral theory*, *Annales of Mathematics* **158** (2003) no. 1, 253–321.
- [41] E. KOELINK: *Spectral theory and special functions*, *Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions*, 45-84, *Adv. Theory Spec. Funct. Orthogonal Polynomials*, Nova Sci. Publ., Hauppauge, New York, 2004.
- [42] K. H. KWON, J. H. LEE, AND F. MARCELLÁN: *Generalized coherent pairs*, *J. Math. Anal. Appl.* **253** (2001) 482-514.
- [43] Y. LAST AND B. SIMON: *The essential spectrum of Schrodinger, Jacobi, and CMV operators*, *J. Anal. Math.* **98** (2006) 183-220.
- [44] D. C. LEWIS: *Polynomial least square approximations*, *Amer. J. Math.* **69** (1947) 273-278.
- [45] F. MARCELLÁN AND G. SANSIGRE, *Orthogonal polynomials on the unit circle: symmetrization and quadratic decomposition*, *J. Approx. Theory* **65** (1991), 109-119.
- [46] F. MARCELLÁN, G. SANSIGRE: *Symmetrization, quadratic decomposition and cubic transformations of orthogonal polynomials on the unit circle*. In *Orthogonal Polynomials and Their Applications*, C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux Eds, Proc., Erice, 1990, IMACS, *Ann. Comp. Appl. Math.* **9** (1991) 341-345.
- [47] F. MARCELLÁN, A. BRANQUINHO, AND J. PETRONILHO: *On inverse problems for orthogonal polynomials, I*, *J. Comput. Appl. Math.*, **49** (1993) 153-160.
- [48] F. MARCELLÁN, A. BRANQUINHO, AND J. PETRONILHO: *Classical orthogonal polynomials: a functional approach*, *Acta Appl. Math.* **34**(3) (1994) 283-303.
- [49] F. MARCELLÁN AND J. PETRONILHO: *Orthogonal polynomials and coherent pairs: the classical case*, *Indag. Mathem. (N.S.)*, **6**(3) (1995) 287-307.
- [50] F. MARCELLÁN, J. PETRONILHO, T. PÉREZ, AND M. PIÑAR: *What is beyond coherent pairs of orthogonal polynomials?*, *J. Comput. Appl. Math.*, **65** (1995) 267-277.
- [51] F. MARCELLÁN, A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, AND J. MORENO-BALCÁZAR: *k-coherence of measures with non-classical weights*, *Margarita Mathematica en memoria de José Xavier Guadalupe Hernández, Luis Español and Juan L. Varona Eds.*, Servicio de Publicaciones, Universidad de la Rioja, Logroño, Spain, 2001.

- [52] F. MARCELLÁN, J. S. DEHESA, AND A. RONVEAUX: *On orthogonal polynomials with perturbed recurrence relations*, J. Comput. Appl. Math. **30** (1990) 203-212.
- [53] F. MARCELLÁN AND J. PETRONILHO: *Orthogonal polynomials and cubic polynomial mappings I*, Commun. Analytic Theory of Continued Fractions **8** (2000) 88-116.
- [54] F. MARCELLÁN AND J. PETRONILHO: *Orthogonal polynomials and cubic polynomial mappings II: the positive-definite case*, Commun. Analytic Theory of Continued Fractions **9** (2001) 11-20.
- [55] F. MARCELLÁN AND J. PETRONILHO: *On the solution of some distributional differential equations: existence and characterizations of the classical moment functionals*, Integral Transform. Spec. Funct., **2**(3) (1994) 185-218.
- [56] F. MARCELLÁN AND J. PETRONILHO: *Eigenproblems for tridiagonal 2-Toeplitz matrices and quadratic polynomial mappings*, Linear Algebra Appl. **260** (1997) 169-208.
- [57] F. MARCELLÁN AND J. PETRONILHO: *Orthogonal polynomials and quadratic transformations*, Port. Math. **56**(1) (1999) 81-113.
- [58] F. MARCELLÁN AND A. RONVEAUX: *A bibliography of Sobolev orthogonal polynomials*, internal report, Universidad Carlos III de Madrid, Spain, 2005.
- [59] P. MARONI: *Sur quelques espaces de distributions qui sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel des polynômes*, In C. Brezinski et al. Eds., *Symposium Laguerre*, Bar-le-Duc, Lecture Notes in Math., **1171**, Springer-Verlag, Berlin (1985) 184-194.
- [60] P. MARONI: *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, In *Orthogonal Polynomials and Their Applications*, M. Alfaro et al. Eds., Lecture Notes in Math., **1329**, Springer-Verlag, Berlin (1988) 279-290.
- [61] P. MARONI: *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Applications aux polynômes orthogonaux semiclassicals*, In *Orthogonal Polynomials and Their Applications*, C. Brezinski et al. Eds., Proc. Erice, 1990, IMACS, Ann. Comp. App. Math. **9** (1991) 95-130.
- [62] P. MARONI: *Variations around classical orthogonal polynomials. Connected problems*, J. Comput. Appl. Math., **48** (1993) 133-155.
- [63] P. MARONI: *Semi-classical character and finite-type relations between polynomial sequences*, J. Appl. Num. Math., **31** (1999) 295-330.

- [64] P. MARONI AND R. SFAXI: *Diagonal orthogonal polynomial sequences*, Methods Appl. Anal., **7**(4) (2000) 769-791.
- [65] A. MARTÍNEZ-FINKELSHEIN, J. MORENO-BALCÁZAR, T. PÉREZ, AND M. PIÑAR: *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of measures*, J. Approx. Theory, **92** (1998) 280-293.
- [66] A. MÁTÉ, P. NEVAI, AND W. VAN ASSCHE: *The supports of measures associated with orthogonal polynomials and the spectra of the related self-adjoint operators*, Rocky Mountain J. Math. **21** (1991) 501-527.
- [67] J. N. McDONALD, N. A. WEISS: *A course in real analysis*, Wiley, N.Y., 1999.
- [68] H. G. MEIJER: *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space. I. The non-discrete case*, 31st Dutch Mathematical Conference (Groningen, 1995). Nieuw Arch. Wisk. (4) **14**(1) (1996), 93-112.
- [69] H. G. MEIJER, *Determination of all coherent pairs*, J. Approx. Theory, **89** (1997) 321-343.
- [70] J. MORENO-BALCÁZAR: *Propiedades analíticas de los polinomios ortogonales de Sobolev*, doctoral dissertation, Universidad de Almería, Spain, 1997.
- [71] J. C. MEDEM: *A family of singular semi-classical functionals*, Indag. Mathem. (N.S.) **13**(3) (2002) 351-362.
- [72] P. NEVAI, J.S.DEHESA: *On Asymptotic Average Properties of Zeros of Orthogonal Polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979) 1184-1192.
- [73] E.M. NIKISHIN, V.N. SOROKIN: *Rational approximations and orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs **92**, AMS, Rhode Island, 1991.
- [74] F. PEHERSTORFER: *On Bernstein-Szegő orthogonal polynomials on several intervals. II. Orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **64** (1991) 123-161.
- [75] F. PEHERSTORFER: *Inverse images of polynomial mappings and polynomials orthogonal on them*, J. Comput. Appl. Math. **153** (2003) 371-385.
- [76] J. PETRONILHO: *Polinómios Ortogonais e Funcionais Semiclássicas*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, 1993.
- [77] J. PETRONILHO: *Polinómios Ortogonais e Transformações Polinomiais. Problemas Inversos*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1997.

- [78] J. PETRONILHO: *Topological aspects in the theory of orthogonal polynomials and an inverse problem*, *Proceeding of the Workshop on Analysis, The J. A. Sampaio Martins Anniversary Volume*, A. Bento et al. Eds., *Textos de Matemática*, Ser. B **34**, Univ. Coimbra, Coimbra (2004) 91-107.
- [79] J. PETRONILHO: *On the linear functionals associated to linearly related sequences of orthogonal polynomials*, *J. Math. Anal. Appl.*, **315** (2006) 379-393.
- [80] J. PETRONILHO: *Orthogonal polynomials on the unit circle via a polynomial mapping on the real line*, *J. Comput. Appl. Math.* **216** (2008) 98-127.
- [81] M. REED AND B. SIMON: *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1: Functional Analysis*, Academic Press, N. Y., 1980.
- [82] M. REED AND B. SIMON: *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators*, Academic Press, N. Y., 1980.
- [83] F. RIESZ AND SZ.-NAGY: *Functional Analysis*, Dover, N. Y., 1990.
- [84] B. SIMON: *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1: Classical theory*, *AMS Colloq. Publ. Series* **54**, Providence, R.I.: AMS, 2005.
- [85] B. SIMON: *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 2: Spectral theory.*, *AMS Colloq. Publ. Series* **54**, Providence, R.I.: AMS, 2005.
- [86] B. SIMON: *OPUC on one foot*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (2005) 431-460.
- [87] B. SIMON: *Fine structure of the zeros of orthogonal polynomials III. Periodic recursion coefficients*, *Comm. Pure. Appl. Math.* **59** (2006), no. 7, 1042-1062.
- [88] R. SFAXI AND J. ALAYA: *On orthogonal polynomials with respect to the form $-(x-c)^{-1}S'$* , *Periodica Math. Hung.* **52**(1) (2006) 67-99.
- [89] G. SZEGÖ: *Orthogonal Polynomials*, *AMS Colloq. Publ. Series* **23**, Providence, R.I.: AMS, 1975. (4^a Ed.)
- [90] V. TOTIK: *Polynomial inverse images and polynomial inequalities*, *Acta Math.* **187** (2001) 139-160.
- [91] F. TRÉVES: *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.
- [92] W. VAN ASSCHE: *Asymptotics properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula, I*, *J. Approx. Theory* **44** (1985) 258-276.
- [93] W. VAN ASSCHE: *Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind*, *J. Comput. Appl. Math.* **37** (1991) 237-249.

Índice

- base dual, 12
- classe, 17
- coeficientes de Fourier-Sobolev, 40
- coeficientes de Verblunsky, 77
- conjunto suporte, 8
- convergência forte, 96
- convergência fraca, 96
- Crítério de Weyl, 96
- determinante de Hankel, 4
- dual algébrico, 2
- dual topológico, 1
- espectro, 95
- espectro contínuo, 95
- espectro discreto, 95
- espectro essencial, 95
- espectro pontual, 95
- fórmula de inversão de Stieltjes, 10
- função de Carathéodory, 77
- função de distribuição, 8
- função de Stieltjes, 8
- funcional $(x - c)^{-1}\mathbf{u}$, 3
- funcional $D\mathbf{u}$, 2
- funcional $p\mathbf{u}$, 2
- funcional clássica, 17
- funcional definida positiva, 7
- funcional regular, 4
- funcional semiclássica, 16
- integral Riemann-Stieltjes, 8
- invólucro convexo, 9
- matriz de Jacobi, 11
- medida de ortogonalidade, viii
- momento de ordem n , 2
- ortonormalização de Gram-Schmidt, 7
- par (M, N) -coerente, 35
- polinómio $\mathbf{u}f(x)$, 3
- polinómio Chebyshev 1ª espécie, 14
- polinómio Chebyshev 2ª espécie, 14
- polinómio numerador, 6
- polinómio recíproco, 76
- polinómio ultraesférico crivado de segunda espécie, 89
- polinómio ultrasférico de parâmetro λ , 88
- polinómios associados de ordem k , 6
- polinómios associados de segunda espécie, 77
- polinómios de Bessel, 17
- polinómios de Hermite, 17
- polinómios de Jacobi, 17
- polinómios de Laguerre, 17
- polinómios de Sobolev, 37
- ponto limite do espectro, 95
- problema directo, ix
- problema inverso, ix

-
- produto interno de Sobolev, 37
- relação de recorrência, 5
- relação de recorrência de Szegő, 76
- série de Fourier-Sobolev, 39
- série formal de Stieltjes, 4
- SPO, 4
- SPO clássica, 17
- SPO ortonormados, 4
- SPO periódica, 83
- SPO semiclássica, 17
- SPOM, 4
- SPOM em $\partial\mathbb{D}$, 76
- sucessão co-recursiva, 15
- Teorema de Favard, 5
- Teorema de Markov, 9
- Teorema Weyl, 96
- transformação de Szegő, 77
- transformação polinomial, 55
- transformada de Herglotz, 77
- verdadeiro intervalo de ortogonalidade,
12
- zeros de SPO, 10