

Márcio Dinis do Nascimento de Jesus

**POLINÓMIOS ORTOGONAIS,
TRANSFORMAÇÕES POLINOMIAIS
E OPERADORES DE JACOBI**

Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

2005

*Dissertação submetida para
satisfação parcial dos requisitos do
programa de Mestrado em Matemática
do Departamento de Matemática
da Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade de Coimbra
(2003–2005)*

Ao meu pai

Agradecimentos

. Agradeço, de uma forma muito especial, ao Professor José Carlos Petronilho pela motivação, pelo incentivo, pela inteira disponibilidade, pelas sugestões e por tudo o que me ensinou.

. Agradeço à minha mãe pelo apoio e coragem que me deu durante os momentos difíceis que passámos.

. Agradeço ao Professor José Augusto Ferreira pela força e incentivo que me transmitiu.

. E à minha família e aos meus amigos, o meu muito obrigado.

Conteúdo

Introdução	iii
1 Tópicos sobre a Teoria dos Polinômios Ortogonais	1
1.1 Funcionais de momentos e sucessões de polinômios ortogonais . . .	1
1.2 Relação de recorrência. Teorema de Favard	5
1.3 Zeros dos polinômios ortogonais	7
1.4 Teorema de representação	10
1.5 Polinômios associados. Teorema de Markov	17
1.6 Polinômios de Chebyshev	28
2 Transformações polinomiais	37
2.1 Introdução	37
2.2 Propriedades algébricas	40
2.3 Medida de ortogonalidade	45
2.4 Exemplo para $k = 3$. Caso periódico	51
3 Tópicos da teoria espectral	63
3.1 Preliminares de Análise Funcional	63
3.2 Espectro e resolvente de um operador	70
3.3 Teorema de transformação do espectro	73
3.4 Propriedades do espectro	74
3.5 Família espectral	79
3.6 Teorema espectral	84
3.7 Espectro essencial. Teorema de Weyl	95

4 Operadores de Jacobi assintoticamente periódicos	101
4.1 Operadores de Jacobi. Aspectos básicos	101
4.2 Operadores de Jacobi <i>versus</i> polinómios ortogonais	107
4.3 O operador $J_{0,k}$	111
4.4 Operadores de Jacobi periódicos	116
4.4.1 Descrição do espectro essencial de J_{per}	117
4.4.2 Descrição do espectro do operador J_{per}	121
4.4.3 O espectro de J_{per} via transformações polinomiais	126
4.5 Operadores de Jacobi assintoticamente periódicos	128
Bibliografia	130

Introdução

O trabalho que aqui se apresenta insere-se no âmbito da Teoria dos Polinómios Ortogonais, bem como das suas aplicações, nomeadamente ao estudo dos operadores de Jacobi. Deste modo, o estudo será centrado, essencialmente, nos aspectos analíticos daquela teoria, embora muitos dos aspectos algébricos sejam, necessariamente, abordados.

No Capítulo 1 introduzem-se conceitos e propriedades básicos da Teoria dos Polinómios Ortogonais. Começamos por introduzir as noções de funcional de momentos—i.e., uma funcional linear \mathcal{L} , definida no espaço de todos os polinómios e caracterizada por

$$\mathcal{L}[x^n] := \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

onde $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ é uma dada sucessão de números reais ou complexos (ditos os momentos da funcional \mathcal{L})—e de sucessão de polinómios ortogonais (SPO) a respeito de uma funcional de momentos. Uma sucessão de polinómios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma SPO a respeito da funcional de momentos \mathcal{L} se

$$\mathcal{L}[P_n P_m] = k_n \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

onde $\{k_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sucessão de números reais ou complexos não nulos (como habitualmente, $\delta_{n,m}$ é o símbolo de Kronecker). Se $k_n = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, a SPO diz-se ortonormada e, normalmente, escreve-se p_n em vez de P_n . Uma das características fundamentais de uma dada SPO (ortonormada), $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, traduz-se no facto de esta sucessão satisfazer uma relação de recorrência a três termos (equação de diferenças de segunda ordem) da forma

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

com condições iniciais $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = 1$, onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são duas sucessões de números reais ou complexos, com $a_n \neq 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$. O caso especial em que $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n (estas condições caracterizam as chamadas funcionais definidas-positivas) é a situação mais interessante do ponto de vista da teoria analítica da Teoria dos Polinómios Ortogonais. Nestas condições, existe uma função de distribuição (de uma medida de probabilidade), ψ , cujo suporte

$$\text{supp}(\psi) := \{x \in \mathbb{R} \mid \psi(x + \delta) - \psi(x - \delta) > 0, \forall \delta > 0\}$$

é um conjunto infinito, para a qual \mathcal{L} admite a representação integral

$$\mathcal{L}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\psi(x)$$

(o integral é no sentido de Riemann-Stieltjes). Este resultado é conhecido por Teorema de representação, e será estabelecido com base em dois teoremas de Helly e na fórmula de quadratura de Gauss. Note-se que se \mathcal{L} é uma funcional de momentos caracterizada pela representação integral anterior, então pode determinar-se facilmente a SPO ortonormada via processo de ortonormalização de Gram-Schmidt (problema directo). O problema inverso é substancialmente mais difícil de tratar e consiste em, dada uma SPO caracterizada pela relação de recorrência (1), com as condições $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n , determinar a correspondente medida de ortogonalidade. Do ponto de vista teórico, este problema resolve-se recorrendo a um famoso Teorema de Markov, o qual estabelece que, sob certas condições,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = a_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{z-x} =: F(z; d\psi), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{co}(\text{supp}(\psi)) \quad (2)$$

($\text{co}(\text{supp}(\psi))$ designa o invólucro convexo de $\text{supp}(\psi)$), sendo a convergência uniforme em todos os subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{co}(\text{supp}(\psi))$. Na verdade, Markov provou a igualdade anterior supondo ψ absolutamente contínua (com densidade) e $\text{supp}(\psi) = [\xi, \eta]$ (compacto), mas isso apenas reflectia a época e não era essencial na demonstração, tendo ainda observado que a igualdade permanecia válida para funções de distribuição com suporte ilimitado (incluindo, e.g., a função de distribuição associada ao polinómios clássicos de Laguerre). Na igualdade (2), $\{p_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ é a SPO (dos chamados polinómios associados, ou

polinómios numerador) que se obtém de (1) fazendo uma translação nos índices das sucessões dos coeficientes de recorrência, i.e.,

$$xp_n^{(1)}(x) = a_{n+2}p_{n+1}^{(1)}(x) + b_{n+1}p_n^{(1)}(x) + a_{n+1}p_{n-1}^{(1)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

com condições iniciais $p_{-1}^{(1)}(x) = 0$ e $p_0^{(1)}(x) = 1$. À função $F(\cdot; d\psi)$ chama-se função (ou transformada) de Stieltjes da função de distribuição ψ , e o seu conhecimento permite determinar ψ (a menos de normalização) através da fórmula de inversão de Stieltjes:

$$\psi(b) - \psi(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(F(x + i\varepsilon; d\psi)) dx.$$

Estes resultados serão estabelecidos no Capítulo 1, o qual termina com uma análise detalhada das principais características (analíticas e algébricas) dos chamados polinómios de Chebyshev (de primeira e de segunda espécie), que serão essenciais no estudo a apresentar nos capítulos posteriores.

O Capítulo 2 contém os resultados principais desta dissertação. O problema central em análise é o seguinte:

(P) *Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos (SPOM). Determinar condições para que exista outra SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ tal que a sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ possa ser descrita por uma transformação polinomial do tipo*

$$P_{nk+m}(x) = \theta_m(x)Q_n(T(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde k e m são números inteiros fixos, com $k \geq 2$ e $0 \leq m \leq k - 1$, e T e θ_m são polinómios fixos de graus k e m , respectivamente. Sob tais condições, descrever as relações algébricas e analíticas associadas às sucessões $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$.

O problema correspondente a $m = 0$ foi estudado por J. Charris, M.E.H. Ismail e S. Monsalve em [4], e por J. Geronimo e W. Van-Assche em [8], quer do ponto de vista algébrico (determinação do polinómio T que induz a transformação polinomial e da nova sucessão $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$, bem como relações algébricas entre as sucessões $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$), quer do ponto de vista analítico (relações entre as funções de Stieltjes e as medidas de ortogonalidade associadas às sucessões $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$). Por outro lado, o problema algébrico no caso

correspondente a $m = k - 1$ foi resolvido por C.M. da Fonseca e J. Petronilho em [15], tendo ficado em aberto o problema analítico, o qual se reduz, essencialmente, à descrição (ou determinação) da medida de ortogonalidade da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ em termos da medida de ortogonalidade da SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$. O objectivo principal do Capítulo 2 é resolver este problema. Provaremos que, sob certas condições (que, essencialmente, determinam que o problema é “bem posto”, num sentido que aqui nos parece ser desnecessário especificar) $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal a respeito de uma medida cujo suporte é uma reunião de k intervalos—definidos pela transformação inversa polinomial $T^{-1}([\xi, \eta])$, onde $[\xi, \eta]$ é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade (menor intervalo que contém todos os zeros) da SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ —explicitamente definida, a menos de um factor constante, por

$$d\sigma_p(x) = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \delta_{z_j}(x) + \frac{\chi_{T^{-1}([\xi, \eta])}(x) d\sigma_q(T(x))}{|\theta_{k-1}(x)| T'(x)}, \quad (3)$$

onde M_1, \dots, M_{k-1} são constantes não negativas explicitamente determinadas em termos de valores da função de Stieltjes associada à medida $d\sigma_q$ nos zeros z_1, \dots, z_{k-1} do polinómio θ_{k-1} , $\delta_{z_j}(x)$ é a medida de Dirac no ponto z_j ($j = 1, 2, \dots, k-1$) e $\chi_{T^{-1}([\xi, \eta])}$ é a função característica do conjunto $T^{-1}([\xi, \eta])$. A expressão (3) será deduzida usando primeiramente o Teorema de Markov para determinar a relação entre as funções de Stieltjes correspondentes às medidas $d\sigma_p$ e $d\sigma_q$ (processo que envolve a determinação da relação entre os polinómios associados das SPOM's $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$) e, seguidamente, aplicando um resultado geral estabelecido por F. Marcellán e J. Petronilho [14], o qual permite deduzir a relação das medidas de ortogonalidade $d\sigma_p$ e $d\sigma_q$ através da relação entre as correspondentes funções de Stieltjes. O Capítulo 2 termina com o estudo pormenorizado de uma SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ caracterizada por as correspondentes sucessões de parâmetros que figuram na relação de recorrência a três termos serem periódicas de período $k = 3$, recuperando um resultado recentemente estabelecido por R. Álvarez-Nodarse, J. Petronilho e N.R. Quintero [2]. Mostraremos que esta sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ pode ser estudada no âmbito do problema (P), com $k = 3$ e $m = 2$, e sendo $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ definida por uma transformação afim da variável nos polinómios de Chebyshev de segunda espécie. Deduzem-se, neste caso, as expressões explícitas para as “massas” M_1 e M_2 em (3), com base numa escolha apropriada de um ramo da raíz quadrada complexa $\sqrt{z^2 - 1}$. Uma ilustração geométrica dos resultados obtidos é também apresentada.

O Capítulo 3 é, essencialmente, um resumo sobre tópicos de Análise Funcional necessários para os desenvolvimentos seguintes, sendo o objectivo principal do capítulo o de estabelecer o teorema espectral para operadores auto-adjuntos limitados, bem como um importante Teorema de Weyl envolvendo a descrição do espectro essencial de operadores auto-adjuntos limitados relacionados por perturbações compactas. Neste capítulo, assumiu-se como conhecido o programa da disciplina da Análise Funcional leccionada no Departamento de Matemática da FCTUC nos últimos anos (em que a disciplina existiu), incluindo os Teoremas de Hahn-Banach, da aplicação aberta e do gráfico fechado, de representação de Riesz em espaços de Hilbert, bem como conceitos e resultados básicos da teoria dos operadores lineares, entre outros. A ênfase é dada aos aspectos relacionados com a teoria espectral de operadores auto-adjuntos limitados, assunto que não foi abordado na licenciatura. Com a inclusão deste capítulo, julgamos que a leitura do Capítulo 4 será, eventualmente, facilitada, entre outras razões, por não ser necessário remeter para texto exterior quando haja necessidade de invocar certos resultados (do âmbito da Análise Funcional) tomados por conhecidos.

Como é usual, designamos por $\ell^2(\mathbf{C})$ o espaço de Hilbert das sucessões de números complexos $x = (\xi_n)_{n \geq 0}$ tais que $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$, munido com o produto interno

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x = (\xi_n) \in \ell^2(\mathbf{C}), \quad y = (\eta_n) \in \ell^2(\mathbf{C}),$$

o qual induz a norma $\|x\| := (\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2)^{1/2}$, para $x = (\xi_n) \in \ell^2(\mathbf{C})$. Existe uma classe de operadores em $\ell^2(\mathbf{C})$ que estão intimamente relacionados com sucessões de polinómios ortogonais. Tais operadores foram introduzidos por Jacobi no decurso das suas investigações sobre cálculo variacional—razão pela qual são actualmente designados por operadores de Jacobi—, e constituem o objecto de estudo do Capítulo 4. Neste trabalho adoptaremos a seguinte definição: um operador linear T em $\ell^2(\mathbf{C})$ diz-se um operador de Jacobi se existirem duas sucessões de números reais $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, com $a_{n+1} > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o $n \in \mathbf{N}_0$, tais que

$$Tx = (a_{n+1}\xi_{n+1} + b_n\xi_n + a_n\xi_{n-1})_{n \geq 0} \tag{4}$$

para todo o $x = (\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{D}(T)$, com a convenção $\xi_{-1} = 0$. O domínio de T é

definido de forma a ser um “domínio maximal”, i.e.,

$$\mathcal{D}(T) := \{ x \in \ell^2(\mathbf{C}) \mid Tx \in \ell^2(\mathbf{C}) \}. \quad (5)$$

Deduz-se imediatamente da definição precedente que a matriz de T relativamente à base canónica de $\ell^2(\mathbf{C})$ é

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & b_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6)$$

J diz-se a matriz de Jacobi (infinita) associada ao operador T . Decorre que, formalmente, para um dado $x \in \mathcal{D}(T)$, Tx é o vector de $\ell^2(\mathbf{C})$ que se obtém multiplicando a matriz J pelo vector x , i.e., calculando Jx segundo a regra usual do produto de matrizes. Normalmente, usaremos a mesma letra, J , para designar quer a matriz de Jacobi, quer o operador de Jacobi, T . É fácil de justificar que J é limitado se e só se ambas as sucessões $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são limitadas; nestas condições, J é auto-adjunto e $\mathcal{D}(J) = \ell^2(\mathbf{C})$.

Dada uma matriz de Jacobi do tipo (6), com $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n , podemos definir uma sucessão de polinómios ortonormada pela relação de recorrência a três termos

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

com condições iniciais $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = 1$. Reciprocamente, dada uma sucessão de polinómios ortonormada, caracterizada pela relação de recorrência (7), com $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n , podemos sempre associar-lhe uma matriz de Jacobi como em (6). Nestas condições, se ambas as sucessões $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ em (7) forem limitadas, a correspondente matriz de Jacobi pode interpretar-se como um operador auto-adjunto limitado actuando no espaço $\ell^2(\mathbf{C})$, via multiplicação de matrizes, e o espectro deste operador J coincide com o suporte da função de distribuição (da medida de ortogonalidade), ψ , a respeito da qual $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal, i.e.,

$$\sigma(J) = \text{supp}(\psi). \quad (8)$$

Este importante facto será provado no Capítulo 4, com base no teorema espectral estabelecido no Capítulo 3. No Capítulo 4 será dada particular atenção ao estudo de operadores de Jacobi assintoticamente periódicos, em particular nos seus aspectos que envolvem a teoria espectral. Um operadores de Jacobi periódico é caracterizados por uma matriz de Jacobi do tipo (6), onde as sucessões $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são periódicas de período k ($k \geq 2$, número inteiro), i.e.,

$$a_{mk+j} = a_j \quad \text{e} \quad b_{mk+j} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

para todo o $m = 0, 1, 2, \dots$, assumindo

$$a_j > 0, \quad b_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Este operador será designado por J_{per} . O nosso objectivo é descrever o espectro, bem como o espectro essencial de J_{per} . Estas descrições foram realizadas por A. Matée, P. Nevai e W. Van-Assche [17], bem como por A. Almendral-Vásquez [1]. O procedimento adoptado será o seguinte. Primeiro apresentamos as duas descrições acabadas de referir, caracterizando o espectro essencial $\sigma_{\text{ess}}(J_{\text{per}})$ do operador J_{per} (cf. [1]) e descrevendo o espectro $\sigma(J_{\text{per}})$ a menos de um conjunto (de cardinalidade finita) excepcional de pontos (cf. [17]). Em seguida veremos como $\sigma(J_{\text{per}})$ e $\sigma_{\text{ess}}(J_{\text{per}})$ podem ser determinados usando (8) e os resultados do Capítulo 2 sobre transformações polinomiais. O estudo que vamos apresentar será realizado apenas para $k = 3$, mas parece-nos claro que o procedimento se aplica para um k arbitrário (que aqui não se levou a cabo, essencialmente, por limitações de tempo). Além disso, a técnica aqui utilizada permite identificar o conjunto excepcional de pontos do espectro referido em [17]. Finalmente, considerando uma perturbação compacta sobre o operador J_{per} , mostraremos como usar os resultados espectrais obtidos para J_{per} para descrever o espectro de um operador de Jacobi assintoticamente periódico, designado por J_{aper} , o qual é caracterizado por uma matriz de Jacobi do tipo (6), onde as sucessões $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são assintoticamente periódicas de período k , i.e.,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mk+j} = \alpha_j \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} b_{mk+j} = \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

com $a_{mk+j}, \alpha_j > 0$ e $b_{mk+j}, \beta_j \in \mathbb{R}$ para todos os valores de $m = 0, 1, 2, \dots$ e $j = 1, 2, \dots, k$. O espectro de J_{aper} foi essencialmente descrito por Ya. L. Geronimus [9] em termos de fracções contínuas. Aqui apresentaremos a descrição

do espectro de J_{aper} seguindo [17], usando o Teorema de Weyl e o facto de J_{aper} poder ser considerado uma perturbação compacta do operador J_{per} .

Concluimos esta introdução com alguns comentários acerca do problema geral (P) atrás descrito. Embora este problema não tenha ainda sido resolvido em toda a sua generalidade, parece-nos claro que as técnicas usadas e descritas nesta dissertação são aplicáveis ao caso geral, pelo que num futuro próximo contamos ter a solução para (P), em toda a sua generalidade. Por outro lado, consequências e aplicações de natureza diversa podem ser deduzidas do estudo de (P), como se põe em evidência, entre outros, nos trabalhos [8], [10], [13], [14], [7] e [2], nomeadamente, aplicações à Física, à Álgebra Linear (na determinação de valores e vectores próprios de matrizes tridiagonais k -Toeplitz, bem como na determinação explícita das inversas destas matrizes), Teoria das Probabilidades (em processos estocásticos) e Mecânica Quântica (na descrição do chamado hamiltoniano de certos sistemas físicos, designados por modelos em cadeia—“chain models”). A procura de aplicações envolvendo o problema (P), incluindo o âmbito da Teoria dos Polinómios Ortogonais (quer na recta real, quer na circunferência unitária) e da Teoria dos Operadores (e, em particular, dos operadores de Shrödinger discretos), será também um dos aspectos em que pretendemos centrar o nosso estudo futuro.

Capítulo 1

Tópicos sobre a Teoria dos Polinómios Ortogonais

Neste capítulo recordamos alguns conceitos básicos da Teoria dos Polinómios Ortogonais, necessários para os desenvolvimentos posteriores. Os conceitos e resultados expostos no capítulo são baseados, essencialmente, nas monografias [6], [11] e [3], bem como nos artigos [22] e [?].

1.1 Funcionais de momentos e sucessões de polinómios ortogonais

Definição 1.1. *Seja $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão de números complexos e \mathcal{L} uma funcional linear definida no espaço vectorial de todos os polinómios com coeficientes sobre o corpo \mathbb{C} , caracterizada por*

$$\mathcal{L}[x^n] := \mu_n \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Nestas condições, diz-se que \mathcal{L} é a funcional de momentos determinada pela sucessão $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ (ou a respeito desta sucessão). Para cada n , o número complexo μ_n será designado por momento de ordem n de \mathcal{L} .

Definição 1.2. *Uma sucessão de polinómios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \equiv \{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é dita uma*

sucessão de polinómios ortogonais (SPO) relativamente à funcional de momentos \mathcal{L} se se verificarem as três condições seguintes:

- (i) P_n é um polinómio de grau n para cada $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (ii) $\mathcal{L}[P_m P_n] = 0$ para $m \neq n$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$)
- (iii) $\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$.

Se cada P_n for um polinómio mónico, i.e., cujo coeficiente do termo de mais elevado grau (designado por coeficiente principal) é igual a 1, a sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ será chamada *sucessão de polinómios ortogonais mónicos* (SPOM). Se se verificar $\mathcal{L}[P_n^2] = 1$ para todo o n , $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ será denominada *sucessão de polinómios ortonormada*; neste caso, geralmente escreveremos $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ em vez de $\{P_n\}_{n=0}^\infty$.

Na proposição seguinte apresentam-se algumas caracterizações de ortogonalidade para uma dada SPO. A prova baseia-se, essencialmente, no facto de o subconjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) de uma SPO constituir uma base para o subespaço dos polinómios de grau menor ou igual a m .

Teorema 1.3. *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos e seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sucessão de polinómios. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (a) $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a \mathcal{L} .
- (b) Para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, $\mathcal{L}[\pi P_n] = 0$ para qualquer polinómio π de grau inferior a n , enquanto que $\mathcal{L}[\pi P_n] \neq 0$ se o grau de π for igual a n .
- (c) $\mathcal{L}[x^m P_n] = k_n \delta_{nm}$ para $m = 0, 1, \dots, n$ e $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\{k_n\}_{n \geq 0}$ é uma sucessão de números complexos não nulos.

Observação 1.4. *Nem toda a sucessões de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ (a respeito de alguma funcional de momentos) dá origem a uma SPO. Com efeito, considerando*

$$\mu_n = \mathcal{L}[x^n] := 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

não existe nenhuma SPO a respeito da funcional linear \mathcal{L} assim caracterizada. Para justificar esta afirmação, ponha-se

$$P_0(x) = a \neq 0 \quad e \quad P_1(x) = bx + c, \quad b \neq 0.$$

Pelo Teorema 1.3-(b) temos que $0 = \mathcal{L}[P_0P_1] = ab\mu_1 + ac\mu_0 = a(b+c)$, logo $b = -c$, o que permite concluir que $\mathcal{L}[P_1^2] = b^2\mu_2 - 2b^2\mu_1 + b^2\mu_0 = 0$, o que viola a definição de SPO.

De seguida analisam-se condições para garantir a existência de uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma dada funcional de momentos \mathcal{L} . Suponhamos que existe uma SPO, $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, relativamente a \mathcal{L} . Então existem constantes c_{nk} tais que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk}x^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Em consequência, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 0, 1, \dots, n$, é

$$\mathcal{L}[x^m P_n] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^n c_{nk}x^{k+m}\right] = \sum_{k=0}^n c_{nk}\mathcal{L}[x^{k+m}] = \begin{cases} 0 & \text{se } m < n \\ k_n & \text{se } m = n, \end{cases}$$

onde $k_n \neq 0$. Por conseguinte, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} c_{n0}\mu_0 + c_{n1}\mu_1 + \dots + c_{nn}\mu_n = 0 \\ c_{n0}\mu_1 + c_{n1}\mu_2 + \dots + c_{nn}\mu_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ c_{n0}\mu_n + c_{n1}\mu_{n+1} + \dots + c_{nn}\mu_{2n} = k_n \end{cases}$$

nas incógnitas c_{n0}, \dots, c_{nn} . Se denotarmos por Δ_n o determinante da matriz do sistema anterior,

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix},$$

concluimos que este sistema é possível e determinado se e só se $\Delta_n \neq 0$. Nestas condições,

$$c_{nn} = \frac{k_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

o que é ainda válido para $n = 0$ se definirmos $\Delta_{-1} := 1$. Podemos, pois, enunciar o seguinte resultado:

Teorema 1.5. *Seja $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão de momentos e \mathcal{L} a correspondente funcional de momentos. É condição necessária e suficiente para a existência de uma SPO relativamente a \mathcal{L} que $\Delta_n \neq 0$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.*

Definição 1.6. *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos. Dizemos que*

- (i) \mathcal{L} é quasi-definida (ou regular) se $\Delta_n \neq 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$;
- (ii) \mathcal{L} é definida-positiva num subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ se $\mathcal{L}[\pi] > 0$ para todo o polinómio π que não é identicamente nulo e é não negativo para todo o $x \in E$. Se $E = \mathbb{R}$, diz-se apenas que \mathcal{L} é definida-positiva.

Os determinantes Δ_n permitem calcular de forma explícita a acção da funcional de momentos regular sobre o produto de um polinómio da SPO associada por um qualquer outro polinómio do mesmo grau:

Teorema 1.7. *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos regular e $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO associada. Então para qualquer polinómio π_n de grau n ,*

$$\mathcal{L}[\pi_n P_n] = a_n \mathcal{L}[x^n P_n] = \frac{a_n K_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \Delta_{-1} = 1, \quad (1.2)$$

onde a_n denota o coeficiente principal de π_n e K_n o coeficiente principal de P_n .

Demonstração. Basta observar que $\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x)$, onde π_{n-1} é um polinómio de grau $n-1$, e utilizar (1.1), notando que $c_{nn} = K_n$. \square

Observação 1.8. *Sendo \mathcal{L} definida-positiva é imediato que $\mu_{2n} = \mathcal{L}[x^{2n}] > 0$ para cada n . Além disso, tendo em conta que*

$$0 < \mathcal{L}[(x+1)^{2n}] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_k,$$

verifica-se facilmente por indução que μ_{2n-1} é real. Assim podemos concluir que se \mathcal{L} é definida-positiva então os seus momentos são números reais e, em particular, os momentos de ordem par são números reais estritamente positivos.

Pode ainda provar-se o seguinte [6, pg.15]

Teorema 1.9. *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos. É condição necessária e suficiente para que \mathcal{L} seja definida-positiva que os momentos de \mathcal{L} sejam reais e $\Delta_n > 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$.*

1.2 Relação de recorrência. Teorema de Favard

Uma das características mais importantes de uma dada sucessão de polinômios ortogonais é que quaisquer três polinômios consecutivos desta sucessão satisfazem uma relação de recorrência a três termos (equação de diferenças de segunda ordem).

Teorema 1.10. *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos regular e seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ a correspondente SPOM. Então, existem duas sucessões de números complexos $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$, com $\gamma_n \neq 0$ para todo o n , tais que*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$.

Além disso, se \mathcal{L} é definida-positiva, então $\beta_n \in \mathbb{R}$ para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\gamma_n > 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$.

Observação 1.11. *Nas condições do teorema precedente, de (1.3) podemos concluir que, para todo o $n = 1, 2, \dots$ são válidas as relações*

$$(a) \quad \gamma_n = \frac{\mathcal{L}[P_n^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2]} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2};$$

$$(b) \quad \mathcal{L}[P_n^2] = \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_n, \text{ definindo } \gamma_0 := \mu_0 = \Delta_0;$$

$$(c) \quad \beta_n = \frac{\mathcal{L}[xP_n^2]}{\mathcal{L}[P_n^2]}.$$

De seguida estabelecemos o resultado recíproco do Teorema 1.10, que garante que qualquer sucessão de polinômios que satisfaça uma relação de recorrência do tipo (1.3) é necessariamente uma SPO. Este resultado é normalmente atribuído a J. Favard—que o apresentou em 1935 no caso definido-positivo.

Teorema 1.12 (Teorema de Favard). *Sejam $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ sucessões de números complexos e $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sucessão de polinômios definidos pela relação de recorrência*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

com $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$ (escolhe-se γ_0 arbitrariamente, desde que $\gamma_0 \neq 0$). Então, existe uma única funcional de momentos \mathcal{L} tal que:

- (i) $\mathcal{L}[1] = \gamma_0$ e $\mathcal{L}[P_m P_n] = 0$ para $m \neq n$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$);
- (ii) \mathcal{L} é regular e $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é a correspondente SPOM se e só se $\gamma_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) \mathcal{L} é definida-positiva e $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é a correspondente SPOM se e só se β_n é real e $\gamma_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Defina-se indutivamente a funcional de momentos \mathcal{L} por

$$\mathcal{L}[1] \equiv \mu_0 = \gamma_0, \quad \mathcal{L}[P_n] = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Deste modo, μ_1 é definido pela condição $0 = \mathcal{L}[P_1] = \mu_1 - \beta_0 \mu_0$, i.e., $\mu_1 = \beta_0 \mu_0$. Do mesmo modo, μ_2 é definido a partir das relações $0 = \mathcal{L}[P_2] = \mu_2 - (\beta_0 + \beta_1) \mu_1 + (\beta_0 \beta_1 - \gamma_1) \mu_0$, etc.. De (1.4) e (1.5) deduz-se

$$\mathcal{L}[x P_n] = 0, \quad n \geq 2.$$

Multiplicando ambos os membros de (1.4) por x e usando o resultado precedente, temos também

$$\mathcal{L}[x^2 P_n] = 0, \quad n \geq 3.$$

Continuando o processo obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^k P_n] &= 0, \quad 0 \leq k < n, \\ \mathcal{L}[x^n P_n] &= \gamma_n \mathcal{L}[x^{n-1} P_{n-1}], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Vem então que para $m \neq n$ é $\mathcal{L}[P_m P_n] = 0$. Do Teorema 1.7 e da Observação 1.11, concluímos que

$$\mathcal{L}[P_n^2] = \mathcal{L}[x^n P_n] = \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso, \mathcal{L} é regular e $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é a correspondente SPOM se e só se $\gamma_n \neq 0$ para $n \geq 1$. Se β_n e γ_n são reais para todo o n então, claramente, os momentos são números reais. Finalmente, usando a Observação 1.8 justifica-se facilmente que \mathcal{L} é definida-positiva se e só se $\gamma_n > 0$ e β_n é real para todo o n . \square

1.3 Zeros dos polinômios ortogonais

Uma consequência imediata da relação de recorrência a três termos para uma dada SPO $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é que dois polinômios consecutivos P_n e P_{n+1} não podem ter zeros comuns. Por outro lado, se a funcional de momentos \mathcal{L} a respeito da qual $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal for definida-positiva, muito mais se pode afirmar acerca dos zeros das correspondentes SPO's. Para obter informação sobre estes zeros começamos por observar que a relação de recorrência (1.4) se pode reescrever em termos matriciais como

$$x \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} = J_n \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} + P_n(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

onde J_n é a matriz (tridiagonal) de ordem n

$$J_n := \begin{pmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Assim, os zeros de P_n são os valores próprios de J_n , e como, se a funcional \mathcal{L} for definida-positiva, é $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $\gamma_n > 0$, pondo $a_n := \sqrt{\gamma_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) e $b_n = \beta_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) deduz-se que o conjunto dos valores próprios de J_n coincide com o conjunto dos valores próprios da matriz

$$\tilde{J}_n := \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ora, esta é uma matriz simétrica, logo os valores próprios (zeros de P_n) são reais. Observe-se que, tal como J_n se obteve a partir da relação de recorrência para a SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, também \tilde{J}_n se pode obter (por processo análogo) da relação de recorrência a três termos que caracteriza a SPO ortonormada $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, correspondente à sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, i.e.,

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

com condições iniciais

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1. \quad (1.7)$$

Além disso, os polinômios mónicos e os ortonormados estão relacionados por

$$p_n(x) = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (1.8)$$

Teorema 1.13 (Identidades de Christoffel-Darboux). *Seja $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ uma SPO ortonormada caracterizada pela relação de recorrência (1.6) e condições iniciais (1.7), com $a_n \neq 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$. Então*

$$\sum_{k=0}^n p_k(u)p_k(x) = a_{n+1} \frac{p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x)}{x - u} \quad (1.9)$$

e

$$\sum_{k=0}^n [p_k(x)]^2 = a_{n+1} [p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)] \quad (1.10)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$.

Demonstração. Atendendo a (1.6) tem-se

$$xp_k(x)p_k(u) = a_{k+1}p_{k+1}(x)p_k(u) + b_kp_k(x)p_k(u) + a_kp_{k-1}(x)p_k(u)$$

e

$$up_k(u)p_k(x) = a_{k+1}p_{k+1}(u)p_k(x) + b_kp_k(x)p_k(u) + a_kp_{k-1}(u)p_k(x)$$

para todo o $k = 0, 1, 2, \dots$, e subtraindo ordenadamente ambos os membros destas duas equações, obtém-se

$$p_k(x)p_k(u) = a_{k+1}F_k(x, u) - a_kF_{k-1}(x, u), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $F_k(x, u) := (p_{k+1}(x)p_k(u) - p_{k+1}(u)p_k(x))/(x - u)$, donde (somando para k desde 0 até n , e aplicando a propriedade telescópica à soma no segundo membro)

$$\sum_{k=0}^n p_k(u)p_k(x) = a_{n+1} \frac{p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x)}{x - u}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

o que prova (1.9). Por outro lado, o numerador da fracção que figura no membro direito de (1.9) é igual a

$$\begin{aligned} & p_{n+1}(x)p_n(u) - p_{n+1}(u)p_n(x) \\ &= [p_{n+1}(x) - p_{n+1}(u)]p_n(x) - [p_n(x) - p_n(u)]p_{n+1}(x), \end{aligned}$$

e fazendo então $u \rightarrow x$ em (1.9) obtém-se (1.10). \square

Teorema 1.14. *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos e $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ a correspondente SPOM. Se \mathcal{L} é definida-positiva então cada P_n tem n zeros reais e simples, que designaremos por ordem crescente*

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.11)$$

Além disso, os zeros de dois polinômios consecutivos P_n e P_{n+1} estão entrelaçados (propriedade de separação), i.e.,

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < \dots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1} \quad (1.12)$$

para todo o $n = 1, 2, 3, \dots$.

Demonstração. Defina-se, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} x/|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(função sinal). De (1.10) conclui-se que, para $x \in \mathbb{R}$,

$$p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Como já vimos que os zeros de P_n (que são também os zeros de p_n) são reais, decorre imediatamente que estes são simples, o que justifica (1.11). Por outro lado, usando novamente (1.13), vem

$$p'_{n+1}(x_{n+1,i})p_n(x_{n+1,i}) > 0, \quad p'_{n+1}(x_{n+1,i+1})p_n(x_{n+1,i+1}) > 0,$$

e como $x_{n+1,i}$ e $x_{n+1,i+1}$ são dois zeros consecutivos de p_{n+1} , então

$$\operatorname{sgn}(p'_{n+1}(x_{n+1,i})) = -\operatorname{sgn}(p'_{n+1}(x_{n+1,i+1})) \neq 0,$$

e conclui-se que

$$\operatorname{sgn}(p_n(x_{n+1,i})) = -\operatorname{sgn}(p_n(x_{n+1,i+1})) \neq 0,$$

logo p_n muda de sinal entre $x_{n+1,i}$ e $x_{n+1,i+1}$, pelo que entre $x_{n+1,i}$ e $x_{n+1,i+1}$ (zeros consecutivos de p_{n+1}) deverá existir um zero de p_n , o que conclui a prova de (1.12). \square

Corolário 1.15. *Nas condições do Teorema 1.14, para todo o $k \in \mathbb{N}$, $\{x_{nk}\}_{n=k}^{\infty}$ é uma sucessão decrescente e $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ é uma sucessão crescente. Em particular, existem todos os limites*

$$\xi_i := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,i} \quad \text{e} \quad \eta_j := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,n-j+1}, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

(podendo, eventualmente, ser infinitos).

Definição 1.16. *Se \mathcal{L} é uma funcional de momentos definida-positiva e $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ a correspondente SPOM, o intervalo fechado $[\xi_1, \eta_1]$, com ξ_1 e η_1 definidos por (1.14), é chamado o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da sucessão $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Observação 1.17. *O verdadeiro intervalo de ortogonalidade é o menor intervalo fechado (no sentido da inclusão) que contém todos os zeros de todos os polinómios P_n ($n = 1, 2, \dots$).*

1.4 Teorema de representação

Seja ψ uma função de variação limitada em \mathbb{R} , isto é, ψ é de variação limitada em qualquer intervalo $[a, b]$. Pondo

$$\mathcal{L}[x^n] := \int_{\mathbb{R}} x^n d\psi(x) \equiv \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.15)$$

supondo que este integral impróprio é convergente para todo o n (os integrais são no sentido de Riemann-Stieltjes) então \mathcal{L} é uma funcional de momentos. Além

disso, se ψ é uma função de distribuição (i.e., ψ é não decrescente, contínua à direita, não negativa e limitada, com $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0$) então \mathcal{L} será definida-positiva só se o conjunto

$$\text{supp}(\psi) := \{x \in \mathbb{R} \mid \psi(x + \delta) - \psi(x - \delta) > 0, \forall \delta > 0\} \quad (1.16)$$

(dito o suporte de ψ , ou conjunto dos pontos de crescimento de ψ) for infinito. Esta afirmação é justificada pela proposição seguinte.

Teorema 1.18. *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos definida-positiva caracterizada por uma função de distribuição ψ , no sentido da representação integral (1.15). Então $\text{supp}(\psi)$ é um conjunto infinito.*

Demonstração. Sob as hipóteses consideradas, podemos escrever

$$\mathcal{L}[f] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi(x)$$

para todo o polinómio f . Suponhamos que $\text{supp}(\psi) = \{a_1, \dots, a_N\}$ (finito). Então, das propriedades do integral de Riemann-Stieltjes, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k f(a_k)$$

para todo o polinómio f , onde $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ são números reais positivos (os saltos de ψ nos pontos do suporte). Em particular, para $f(x) \equiv p(x) := \prod_{i=1}^N (x - a_i)^2$, vem

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) d\psi(x) = 0,$$

o que não pode acontecer, pois \mathcal{L} é definida-positiva e p é um polinómio não negativo e não identicamente nulo. \square

O nosso objectivo seguinte é mostrar que o recíproco da afirmação anterior é também verdadeiro, i.e., toda a funcional de momentos definida-positiva admite uma representação integral do tipo (1.15), onde ψ é uma função de distribuição com suporte infinito. Começamos por enunciar alguns resultados preliminares (cf. [6, pgs. 52-53]).

Teorema 1.19 (Princípio da seleção de Helly). *Seja $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ uma sucessão uniformemente limitada de funções não decrescentes definidas em \mathbb{R} . Então $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ contém uma subsucessão que converge em \mathbb{R} para uma função limitada e não decrescente.*

Teorema 1.20 (Segundo teorema de Helly). *Seja $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ uma sucessão uniformemente limitada de funções não decrescentes, definidas num intervalo compacto $[a, b]$, e suponha-se que $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ converge para ϕ em $[a, b]$. Então para qualquer função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f d\phi_n = \int_a^b f d\phi .$$

Teorema 1.21 (Fórmula da quadratura de Gauss). *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos definida-positiva e seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ a correspondente SPOM. Designem $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ os zeros de P_n , para cada n . Então, existem números $A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,n}$ tais que para todo o polinómio π de grau $\leq 2n - 1$,*

$$\mathcal{L}[\pi] = \sum_{k=1}^n A_{n,k} \pi(x_{n,k}) . \quad (1.17)$$

Os números $A_{n,k}$ são todos positivos e satisfazem

$$A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,n} = \mu_0 . \quad (1.18)$$

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Seja π um polinómio qualquer de grau menor ou igual a $2n - 1$, e construa-se o polinómio interpolador de Lagrange, L_n , nos pontos $(x_{n,k}, \pi(x_{n,k}))$, $k = 1, 2, \dots, n$. Então,

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^n \pi(x_{n,k}) l_k(x) ,$$

onde

$$l_k(x) := \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})P_n'(x_{n,k})} , \quad k = 1, 2, \dots, n .$$

Ponha-se $Q(x) := \pi(x) - L_n(x)$. Então Q é um polinómio de grau $\leq 2n - 1$ que se anula nos pontos $x_{n,k}$ ($1 \leq k \leq n$), logo $Q(x) = R(x)P_n(x)$, onde R é um polinómio de grau $\leq n - 1$. Consequentemente,

$$\mathcal{L}[\pi] = \mathcal{L}[L_n] + \mathcal{L}[R \cdot P_n] = \mathcal{L}[L_n] = \sum_{k=1}^n \pi(x_{n,k}) \mathcal{L}[l_k] ,$$

o que prova (1.17) com $A_{n,k} := \mathcal{L}[l_k]$. Agora, para $\pi(x) = l_m^2(x)$ tem-se

$$0 < \mathcal{L}[l_m^2] = \sum_{k=1}^n A_{n,k} l_m^2(x_{n,k}) = A_{n,m} .$$

Portanto, todos os $A_{n,k}$ são positivos. Finalmente, tomando $\pi(x) = 1$ obtém-se (1.18). \square

Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos definida-positiva, com sucessão de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$. De acordo com fórmula da quadratura de Gauss, para cada inteiro positivo n , existem números positivos $A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,n}$ tais que

$$\mathcal{L}[x^k] = \mu_k = \sum_{i=1}^n A_{n,i} x_{n,i}^k \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1), \quad (1.19)$$

onde $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ são os zeros de P_n , o polinômio ortogonal mônico de grau n correspondente a \mathcal{L} . Defina-se

$$\psi_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_{n,1} \\ A_{n,1} + \dots + A_{n,p}, & \text{se } x_{n,p} \leq x < x_{n,p+1} \quad (1 \leq p \leq n) \\ \mu_0, & \text{se } x \geq x_{n,n} . \end{cases} \quad (1.20)$$

Ora, ψ_n é uma função limitada, contínua à direita e não decrescente, com $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_n(x) = 0$ (i.e., ψ_n é uma função de distribuição). Além disso, é uma função em escada cujo suporte é o conjunto finito $\{x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$ e cujo salto em $x_{n,i}$ é $A_{n,i} > 0$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\psi_n(x) = \sum_{i=1}^n A_{n,i} x_{n,i}^k = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (1.21)$$

De acordo com o Teorema 1.19, existe uma subsucessão $\{\psi_{n_i}\}_{i=0}^\infty$ de $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ que converge em \mathbb{R} para uma função, ψ , limitada e não decrescente. A esta função ψ , obtida como limite da sucessão $\{\psi_{n_i}\}_{i=0}^\infty$, chamamos representante natural de \mathcal{L} . Agora, se $[\xi_1, \eta_1]$ (o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$) for limitado, então o Teorema 1.20 e (1.21) permitem concluir que

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\psi(x) = \int_{\xi_1}^{\eta_1} x^k d\psi(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\xi_1}^{\eta_1} x^k d\psi_{n_i}(x) = \mu_k = \mathcal{L}[x^k] \quad (1.22)$$

para todo o $k = 0, 1, 2, \dots$. (Note-se que $\psi(x) = 0$ para $x \leq \xi_1$ e $\psi(x) = \mu_0$ para $x \geq \eta_1$ e, portanto, podemos, de facto, reduzir o intervalo de integração em (1.22) a $[\xi_1, \eta_1]$.)

Podemos agora estabelecer o resultado principal desta secção, o qual afirma que a representação integral (1.22) para uma funcional de momentos definida-positiva permanece válida mesmo que $[\xi_1, \eta_1]$ seja ilimitado.

Teorema 1.22 (Teorema de representação). *Seja \mathcal{L} uma funcional de momentos definida-positiva e seja ψ_n definida por (1.20) para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Então existe uma subsucessão de $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge em \mathbb{R} para uma função de distribuição, ψ , que tem suporte infinito e satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\psi(x) = \mu_k = \mathcal{L}[x^k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.19 pode garantir-se a existência de uma subsucessão $\{\psi_{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$ de $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge em \mathbb{R} para uma função de distribuição, ψ . Pondo $\phi_i := \psi_{n_i}$, de acordo com (1.21) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\phi_i(x) = \mu_k \quad \text{para} \quad n_i \geq \frac{k+1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Do Teorema 1.20 deduz-se que, para qualquer intervalo compacto $[\alpha, \beta]$,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\phi_i(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x). \quad (1.24)$$

Assim, escolhendo $\alpha < 0 < \beta$ e $n_i > k + 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \mu_k - \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} x^k d\phi_i(x) - \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\alpha} x^k d\phi_i(x) + \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\phi_i(x) + \int_{\beta}^{+\infty} x^k d\phi_i(x) - \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\alpha} x^k d\phi_i(x) \right| + \left| \int_{\beta}^{+\infty} x^k d\phi_i(x) \right| + \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\phi_i(x) - \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x) \right|. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\beta}^{+\infty} x^k d\phi_i(x) \right| &= \left| \int_{\beta}^{+\infty} \frac{x^{2k+2}}{x^{k+2}} d\phi_i(x) \right| \\ &\leq \beta^{-(k+2)} \left| \int_{\beta}^{+\infty} x^{2k+2} d\phi_i(x) \right| \leq \beta^{-(k+2)} \mu_{2k+2} . \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\left| \int_{-\infty}^{\alpha} x^k d\phi_i(x) \right| \leq |\alpha|^{-(k+2)} \mu_{2k+2} .$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left| \mu_k - \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x) \right| &\leq (|\alpha|^{-(k+2)} + \beta^{-(k+2)}) \mu_{2k+2} \\ &\quad + \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\phi_i(x) - \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x) \right| , \end{aligned}$$

donde, fazendo $i \rightarrow \infty$ e tendo em conta (1.24),

$$\left| \mu_k - \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\psi(x) \right| \leq (|\alpha|^{-(k+2)} + \beta^{-(k+2)}) .$$

Daqui, fazendo $\alpha \rightarrow -\infty$ e $\beta \rightarrow +\infty$, obtém-se (1.23). Finalmente, que ψ tem suporte infinito é uma consequência imediata do Teorema 1.18. \square

Observação 1.23.

1. Decorre do teorema precedente que uma funcional de momentos \mathcal{L} é definida-positiva se e só se admite uma representação integral, em termos do integral de Riemann-Stieltjes, do tipo

$$\mathcal{L}[f] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi(x) , \quad f \in \mathcal{P} , \quad (1.25)$$

onde ψ é uma função de distribuição com suporte infinito (\mathcal{P} designa o espaço de todos os polinómios). Para esta função de distribuição, a função “normalizada” $\tilde{\psi} := \psi/\mu_0$ é, de facto, a função de distribuição de alguma medida de probabilidade, μ , com momentos de todas as ordens finitos, tendo-se $\tilde{\psi}(x) = \mu((-\infty, x])$

para todo o $x \in \mathbb{R}$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\tilde{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x)$$

para todo o polinómio f . Por abuso de linguagem, será também usada a designação medida para a função de distribuição, sendo corrente, e.g., usar terminologia do tipo “considere-se a função de distribuição $d\psi$ ”, ou “considere-se a medida $d\psi$ ”, ou escrever, e.g.,

$$“d\psi(x) = w(x)dx + M\delta_a(x)”$$

com o significado de que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)w(x)dx + Mf(a)$$

para todo o polinómio f (supondo que todos os integrais existem). Por analogia, também é corrente escrever “ $\text{supp}(d\psi)$ ” em vez de “ $\text{supp}(\psi)$ ”, e chamar a este conjunto “suporte da medida $d\psi$ ”.

2. Dada uma funcional de momentos definida-positiva, a função de distribuição ψ (ou a medida) que a representa em (1.25) pode não ser única. Porém, ψ é única se as sucessões $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ em (1.4) forem limitadas (mais geralmente, ψ é única se o problema de momentos associado à sucessão de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ for determinado).

3. Dada uma funcional de momentos \mathcal{L} definida-positiva, pode provar-se que se as correspondentes sucessões $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ em (1.4) forem limitadas, então o suporte de ψ em (1.25) é um conjunto limitado (cf. [6, pg. 109] e a relação (1.42) adiante).

Corolário 1.24. Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO relativamente a uma funcional de momentos definida-positiva, e seja ψ um representante desta funcional (no sentido da representação integral (1.25), e com suporte infinito). Suponha-se que

$$\text{supp}(\psi) \subset [a, b] \quad (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$$

e designe \mathcal{Z}_n o conjunto dos zeros de p_n . Então

$$\mathcal{Z}_n \subset (a, b), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo que todos os zeros de p_n são reais, simples, e pertencem a (a, b) .

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. De acordo com o Teorema 1.14, os zeros de p_n são reais e simples. Por outro lado, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) d\psi(x) = \int_a^b p_n(x) d\psi(x) = 0$$

e, portanto, existe $x_1 \in (a, b)$ tal que $p_n(x_1) = 0$. Sejam x_1, \dots, x_k , com $1 \leq k \leq n$, os zeros de p_n em (a, b) e definam-se os polinómios

$$p(x) := (x - x_1) \cdots (x - x_k), \quad q(x) := p(x)p_n(x).$$

É claro que $q(x) \geq 0$ ou $q(x) \leq 0$ para todo o $x \in [a, b]$ e $q(x) \not\equiv 0$. Assim, tem-se

$$0 \neq \int_a^b q(x) d\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x)p_n(x) d\psi(x).$$

Mas, isto só se pode verificar se $k = n$, o que prova o que se pretende. \square

1.5 Polinómios associados. Teorema de Markov

De acordo com o Teorema de Favard, uma SPOM $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é caracterizada por uma relação de recorrência a três termos do tipo (1.4), com $\gamma_n \neq 0$ para todo o $n = 1, 2, \dots$. Efectuando translações nos índices dos polinómios que figuram nesta relação de recorrência, obtém-se a sucessão dos chamados polinómios (mónicos) associados de ordem k ($k \in \mathbb{N}_0$) da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, designada por $\{P_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$ e caracterizada pela relação de recorrência

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(k)}(x) &= (x - \beta_{n+k}) P_n^{(k)}(x) - \gamma_{n+k} P_{n-1}^{(k)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ P_{-1}^{(k)}(x) &= 0, \quad P_0^{(k)}(x) = 1. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Obviamente, o Teorema de Favard assegura que $\{P_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$ é também um SPOM. Em particular, para $k = 1$, obtém-se

$$xP_n^{(1)}(x) = P_{n+1}^{(1)}(x) + \beta_{n+1}P_n^{(1)}(x) + \gamma_{n+1}P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

(com $P_{-1}^{(1)}(x) = 0$ e $P_0^{(1)}(x) = 1$). Esta sucessão $\{P_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ é particularmente importante, e normalmente designa-se apenas por sucessão dos polinómios (mónicos) associados ou sucessão dos polinómios (mónicos) numerador da SPOM

$\{P_n\}_{n=0}^\infty$ (por razões que adiante se tornarão claras). Naturalmente, para $k = 0$ obtém-se a própria SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, que satisfaz

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

(com $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$). Mudando n em $n + 1$ em (1.28) e multiplicando ambos os membros da equação obtida por $P_n^{(1)}(x)$ e fazendo em seguida a diferença (membro a membro) entre a equação resultante e a que se obtém multiplicando ambos os membros de (1.27) por $P_{n+1}(x)$, deduz-se

$$P_{n+1}(x)P_{n+1}^{(1)}(x) - P_{n+2}(x)P_n^{(1)}(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \gamma_j \quad (1.29)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, designando por \mathcal{L} a funcional de momentos (regular) a respeito da qual a SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal, verifica-se facilmente que

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}_y \left[\frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)}{x - y} \right] \quad (1.30)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\mu_0 := \mathcal{L}[1]$ e o índice em \mathcal{L}_y serve para indicar que a funcional \mathcal{L} actua em funções da variável y . Por outro lado, a partir da relação de recorrência (1.26), constata-se facilmente que o polinómio mónico associado de ordem k é dado explicitamente pela fórmula determinantal (determinante de ordem n , de uma matriz tridiagonal)

$$P_n^{(k)}(x) = \begin{vmatrix} x - \beta_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_{k+1} & x - \beta_{k+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_{n+k-2} & x - \beta_{n+k-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{n+k-1} & x - \beta_{n+k-1} \end{vmatrix} \quad (1.31)$$

para todos os $n, k = 0, 1, 2, \dots$.

Por vezes, quando se trata o caso definido-positivo, é útil considerar, em vez de polinómios mónicos, os correspondentes polinómios ortonormados. As relações precedentes, expressas para SPOM's, têm, naturalmente, relações homólogas para SPO ortonormadas. Assim, sendo $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ uma dada SPO ortonormada a respeito de uma funcional de momentos definida-positiva, caracterizada

pela relação de recorrência

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.32)$$

(com $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = 1$), onde $a_{n+1} > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, definem-se os correspondentes polinômios associados de ordem k , $\{p_n^{(k)}(x)\}_{n=0}^\infty$, pela relação de recorrência

$$xp_n^{(k)}(x) = a_{n+k+1}p_{n+1}^{(k)}(x) + b_{n+k}p_n^{(k)}(x) + a_{n+k}p_{n-1}^{(k)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.33)$$

com condições iniciais $p_{-1}^{(k)}(x) = 0$ e $p_0^{(k)}(x) = 1$. Para estes polinômios, são válidas as formulas (cf. [22])

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} p_{j-1}(x) p_{n-j}^{(j)}(y) = \frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y} \quad (1.34)$$

e

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} p_{j-1}(x) p_{n-j}^{(j)}(x) = p'_n(x) \quad (1.35)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Por outro lado, verifica-se facilmente que o Wronskiano

$$W(p_n, p_{n-1}^{(1)}) := a_{n+1} \begin{vmatrix} p_n & p_{n-1}^{(1)} \\ p_{n+1} & p_n^{(1)} \end{vmatrix} = a_{n+1} [p_n p_n^{(1)} - p_{n+1} p_{n-1}^{(1)}]$$

é independente de n (a prova decorre, e.g., de (1.29)), pelo que

$$a_{n+1} [p_n(x) p_n^{(1)}(x) - p_{n+1}(x) p_{n-1}^{(1)}(x)] = a_1 > 0 \quad (1.36)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Daqui resulta que $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{p_{n-1}^{(1)}(x)\}_{n=0}^\infty$ são duas soluções linearmente independentes da equação de diferenças de segunda ordem

$$xy_n(x) = a_{n+1}y_{n+1}(x) + b_n y_n(x) + a_n y_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e tendo em conta a teoria geral destas equações conclui-se que toda a solução desta equação é combinação linear de $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{p_{n-1}^{(1)}(x)\}_{n=0}^\infty$.

De acordo com os teoremas de Favard e de representação, como $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ satisfaz (1.32), com $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n (e com condições iniciais $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = 1$), então existe uma função de distribuição, ψ , com suporte infinito, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x) d\psi(x) = \delta_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.37)$$

Deduz-se então, usando (1.34), que

$$p_{n-k}^{(k)}(x) = a_k \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y} p_{k-1}(y) d\psi(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e, em particular,

$$p_{n-1}^{(1)}(x) = a_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y} d\psi(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (1.38)$$

Lema 1.25. *Seja $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ a uma SPO ortonormada relativamente a uma funcional de momentos definida-positiva. Então*

$$\frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{p_n(x)} = a_1 \sum_{k=1}^n \frac{A_{n,k}}{x - x_{n,k}} = a_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi_n(t)}{x - t}, \quad x \notin \mathcal{Z}_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.39)$$

onde $A_{n,1}, \dots, A_{n,n}$ são os coeficientes que figuram na fórmula de quadratura de Gauss (1.17), $\mathcal{Z}_n := \{x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$, $x_{n,1} < \dots < x_{n,n}$ são os zeros de p_n e ψ_n é a função de distribuição introduzida em (1.20).

Demonstração. Efectuando a decomposição da função racional $p_{n-1}^{(1)}(x)/p_n(x)$ nos seus elementos simples, obtém-se

$$\frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{p_n(x)} = a_1 \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{x - x_{n,j}}, \quad \lambda_{n,j} := \frac{p_{n-1}^{(1)}(x_{n,j})}{a_1 p_n'(x_{n,j})}, \quad (1.40)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Por outro lado, decorre da demonstração da fórmula de quadratura de Gauss (e da relação (1.8) entre os polinómios ortogonais mónicos e os ortonormados) que

$$A_{n,j} = \mathcal{L} \left[\frac{p_n(x)}{(x - x_{n,j})p_n'(x_{n,j})} \right].$$

Em consequência, atendendo a (1.34)—ou a (1.38)—, deduz-se

$$A_{n,j} = \frac{1}{p'_n(x_{n,j})} \mathcal{L} \left[\frac{p_n(x) - p_n(x_{n,j})}{x - x_{n,j}} \right] = \frac{p_{n-1}^{(1)}(x_{n,j})}{a_1 p'_n(x_{n,j})} = \lambda_{n,j} \quad (1.41)$$

para todos os j e n , com $1 \leq j \leq n$ e $n = 1, 2, \dots$, o que prova a primeira igualdade em (1.39). A segunda igualdade é consequência imediata das propriedades do integral de Riemann-Stieltjes e da definição de ψ_n . \square

Observação 1.26. *Os números $\lambda_{n,j}$ ($1 \leq j \leq n$) são conhecidos por números de Christoffel. Decorre da fórmula de quadratura de Gauss e de (1.41) que os números de Christoffel são todos positivos. Além disso, atendendo a (1.36) e (1.32), podemos observar que estes números admitem a representação*

$$\lambda_{n,j} = \frac{-1}{a_{n+1} p'_n(x_{n,j}) p_{n+1}(x_{n,j})}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Lema 1.27. *Sejam $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ a uma SPO ortonormada relativamente a uma funcional de momentos definida-positiva \mathcal{L} e ψ uma função de distribuição representante natural de \mathcal{L} , no sentido do Teorema 1.22. Seja $s \in \text{supp}(\psi)$. Então toda a vizinhança de s contém pelo menos um zero de $p_n(x)$ para uma infinidade de valores de n .*

Demonstração. A demonstração é essencialmente técnica (e relativamente simples). Pode ser vista em [6, pg. 60]. \square

Decorre do Lema 1.27 que se s é um ponto de crescimento da representante natural ψ então ou s é zero de $p_n(x)$ para uma infinidade de valores de n , ou s é o limite pontual de elementos do conjunto

$$Z_1 := \{x_{n,j} \mid 1 \leq j \leq n, \quad n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Por outras palavras, designando ainda

$$X_1 := Z'_1 \equiv \{\text{pontos de acumulação de } Z_1\},$$

$$X_2 := \{x \in Z_1 \mid P_n(x) = 0 \text{ para um número infinito de valores de } n\},$$

tem-se $\text{supp}(\psi) \subset X_1 \cup X_2$. De facto, mais geralmente, é válida a seguinte cadeia de inclusões:

$$\text{supp}(\psi) \subset X_1 \cup X_2 \subset [\xi_1, \xi_2] \subset \text{co}(\text{supp}(\psi)), \quad (1.42)$$

onde $\text{co}(\text{supp}(\psi))$ designa o invólucro convexo do conjunto $\text{supp}(\psi)$, que é o menor intervalo fechado (no sentido da inclusão) que contém $\text{supp}(\psi)$. Note-se que a segunda inclusão em (1.42) é consequência imediata das definições dos conjuntos envolvidos, e a última inclusão decorre do Corolário 1.24.

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Markov. Necessitamos ainda do seguinte (cf. [6, pg. 121])

Lema 1.28 (Teorema de Stieltjes-Vitali). *Seja $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ uma sucessão de funções analíticas num conjunto conexo e não vazio contido num aberto Ω do plano complexo. Se $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de Ω e converge num subconjunto $E \subset \Omega$ que contém um ponto de acumulação em Ω , então $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de Ω .*

Teorema 1.29 (Markov). *Seja $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ uma SPO ortonormada relativamente a uma funcional de momentos definida-positiva \mathcal{L} . Seja ψ uma função de distribuição representante natural de \mathcal{L} , no sentido do Teorema 1.22. Se $\text{supp}(\psi)$ é limitado, então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = a_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (X_1 \cup X_2), \quad (1.43)$$

e a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Demonstração. A demonstração que se segue é baseada nas referências [5], [6] e [22]. Como $\text{supp}(\psi)$ é limitado, então o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da sucessão $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, $[\xi_1, \eta_1]$, é limitado. De acordo com o Lema 1.25,

$$\frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = a_1 \int_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{d\psi_n(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\xi_1, \eta_1] \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.44)$$

Por outro lado, o Teorema de representação (Teorema 1.22) assegura a existência de uma subsucessão $\{\psi_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ que converge para a ψ em $[\xi_1, \eta_1]$. Segue-se do segundo Teorema de Helly (Teorema 1.20) que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p_{n_k-1}^{(1)}(z)}{p_{n_k}(z)} = a_1 \int_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{d\psi(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\xi_1, \eta_1]. \quad (1.45)$$

Pondo $M := \max\{|\xi_1|, |\eta_1|\}$, vamos agora mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = a_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-M, M]. \quad (1.46)$$

Começemos por observar que, por (1.36),

$$\frac{p_n^{(1)}(z)}{p_{n+1}(z)} - \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = \frac{a_1}{a_{n+1}} \frac{1}{p_{n+1}(z)p_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-M, M]$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Como $p_{n+1}(z)p_n(z)$ é um polinómio de grau $2n + 1$ cujos zeros são reais e simples, deduz-se da igualdade anterior, desenvolvendo o segundo membro em série de Laurent na coroa circular $|z| > M$, que o desenvolvimento em série de Laurent do primeiro membro é da forma

$$\frac{p_n^{(1)}(z)}{p_{n+1}(z)} - \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = \frac{c_{2n+1}}{z^{2n+1}} + \frac{c_{2n+2}}{z^{2n+2}} + \dots, \quad |z| > M \quad (1.47)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Considere-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, o desenvolvendo em série de Laurent

$$\frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = a_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j^{(n)}}{z^{j+1}}, \quad |z| > M. \quad (1.48)$$

Então, (1.47) implica que

$$c_j^{(n)} = c_j^{(n+1)}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.49)$$

Agora, observe-se que $1/(z-x) = \sum_{j \geq 0} x^j / z^{j+1}$ para $|z| > |x|$, logo, de (1.44), obtém-se

$$\frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = a_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}} \int_{\mathbb{R}} x^j d\psi_n(x), \quad |z| > M \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

donde, comparando com (1.48),

$$c_j^{(n)} = \int_{\mathbb{R}} x^j d\psi_n(x) \quad (j, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Daqui e de (1.49) conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}} x^j d\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} x^j d\psi_m(x) \quad (j = 0, 1, \dots, m+n; m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

logo também

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi_m(x) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.50)$$

para todo o polinómio f de grau $\leq m + n$, e deduz-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi_n(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi_{n_k}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\psi(x) \quad (1.51)$$

para qualquer polinómio $f(x)$, sendo a última igualdade justificada, de novo, pelo segundo Teorema de Helly. Pode agora provar-se (1.46) facilmente. Com efeito, seja K um subconjunto compacto de $\mathbf{C} \setminus [-M, M]$ e escolha-se $r > M$ tal que $K \cap [-r, r] = \emptyset$. Como a função $(z, x) \mapsto 1/(z-x)$ é contínua em $K \times [-r, r]$, o Teorema de Stone-Weierstrass (veja-se [...], e.g.) assegura que, dado $\epsilon > 0$, existe um polinómio $p(z, x)$ de grau m , digamos, tal que

$$\sup_{K \times [-r, r]} \left| \frac{1}{z-x} - p(z, x) \right| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.52)$$

Agora, notemos que, para $z \in K$ e $k \geq n \geq m$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} - \int_{-r}^r \frac{d\psi(x)}{z-x} \right| &\leq \left| \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} - \int_{-r}^r p(z, x) d\psi_n(x) \right| \\ &+ \left| \int_{-r}^r p(z, x) d\psi_n(x) - \int_{-r}^r p(z, x) d\psi_{n_k}(x) \right| \\ &+ \left| \int_{-r}^r p(z, x) d\psi_{n_k}(x) - \int_{-r}^r \frac{d\psi(x)}{z-x} \right|. \end{aligned}$$

A segunda parcela que figura na soma do segundo membro desta desigualdade anula-se, atendendo a (1.50). Por outro lado, atendendo a (1.44), a primeira destas parcelas é igual a

$$\left| \int_{-r}^r \left(\frac{1}{z-x} - p(z, x) \right) d\psi_n(x) \right| \leq \frac{\epsilon}{3} \int_{-r}^r d\psi_n(x) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

para todo o $z \in K$, atendendo a (1.52). Além disso, a terceira parcela na soma

anterior é menor ou igual que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-r}^r \left(p(z, x) - \frac{1}{z-x} \right) d\psi_{n_k}(x) \right| + \left| \int_{-r}^r \frac{d\psi_{n_k}(x)}{z-x} - \int_{-r}^r \frac{d\psi(x)}{z-x} \right| \\ & \leq \frac{\epsilon}{3} + \sup_{z \in K} \sup_{x \in [-r, r]} \left| \frac{1}{z-x} \right| \left| \int_{-r}^r d\psi_{n_k}(x) - \int_{-r}^r d\psi(x) \right| \leq \frac{2\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade justificada, uma vez mais, pelo segundo Teorema de Helly, o qual permite assegurar a existência de $n_0 \geq m$ tal que

$$\sup_{z \in K} \sup_{x \in [-r, r]} \left| \frac{1}{z-x} \right| \left| \int_{-r}^r d\psi_{n_k}(x) - \int_{-r}^r d\psi(x) \right| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad k \geq n_0.$$

Conclui-se assim que para todo o compacto K e para todo o $\epsilon > 0$, existe $n_0 \equiv n_0(K, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} - \int_{-r}^r \frac{d\psi(x)}{z-x} \right| \leq \epsilon, \quad \forall z \in K,$$

o que prova (1.46). (De facto, provou-se que a convergência em (1.46) é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-M, M]$.)

Resta provar que a convergência é uniforme em subconjunto compactos de $\mathbb{C} \setminus (X_1 \cup X_2)$. Para $N \in \mathbb{N}$, defina-se

$$Z_N := \{ x_{n,j} \mid 1 \leq j \leq n, n \geq N \}.$$

Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus (X_1 \cup X_2)$. Então K contém quando muito um número finito de zeros da sucessão $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, e nenhum destes zeros pertence a X_2 . Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap (X_1 \cup Z_N) = \emptyset$. Agora,

$$\delta := \inf\{|z-x| : z \in K, x \in X_1 \cup Z_N\} > 0$$

(esta distância é, de facto, positiva, pois K é compacto e $X_1 \cup Z_N$ é fechado—por ser uma reunião finita de fechados—e $K \cap (X_1 \cup Z_N) = \emptyset$). Consequentemente, usando (1.40) tem-se, para $n \geq N$,

$$\left| \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} \right| \leq a_1 \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{|z-x_{n,j}|} \leq \frac{a_1}{\delta} \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} = \frac{a_1}{\delta}, \quad z \in K.$$

Assim, pondo $f_n(z) := p_{n+N-1}^{(1)}(z)/p_{n+N}(z)$, a sucessão de funções $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uniformemente limitada em K , e o resultado pretendido decorre então de (1.46) e do Teorema de Stieltjes-Vitali, considerando neste $\Omega = \mathbf{C} \setminus (X_1 \cup X_2)$ e $E = \mathbf{C} \setminus [-M, M]$. \square

Observação 1.30. *Markov provou o teorema precedente supondo ψ uma medida absolutamente contínua e $\text{supp}(\psi) = [a, b]$, com a e b finitos. Nestas condições tem-se $X_1 \cup X_2 = [a, b]$. A generalização expressa em (1.43) é devida a W. Van Assche [22] e é válida para intervalos infinitos desde que o problema de momentos associado seja determinado.*

Definição 1.31. *Sendo ψ uma função de distribuição, a correspondente função de Stieltjes (ou transformada de Stieltjes) é a função complexa*

$$F(z; \psi) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \text{supp}(\psi).$$

Observação 1.32. *No espírito da Observação 1.23, por vezes também se escreve $F(z; d\psi)$ em vez de $F(z; \psi)$. Por outro lado, se $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO ortonormada e \mathcal{L} a correspondente funcional de momentos definida-positiva, e se ψ é uma função de distribuição (com suporte infinito) representante de \mathcal{L} , no sentido do Teorema 1.22, a tese do Teorema de Markov pode reescrever-se do seguinte modo:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = a_1 F(z; \psi), \quad z \in \mathbf{C} \setminus (X_1 \cup X_2). \quad (1.53)$$

Se partirmos de uma SPOM $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{\mu_0} F(z; \psi), \quad z \in \mathbf{C} \setminus (X_1 \cup X_2), \quad (1.54)$$

onde $\mu_0 := \int_{\mathbb{R}} d\psi(x)$ (o momento de ordem zero).

O Teorema de Markov permite determinar a medida de ortogonalidade de uma dada SPO, quando esta é dada pela sua relação de recorrência a três termos. Esta afirmação é justificada pela proposição seguinte.

Teorema 1.33 (Fórmula de inversão de Stieltjes). *Seja μ uma medida de probabilidade com momentos de todas as ordens finitos, e seja*

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$$

a correspondente transformada de Stieltjes. Então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(F(x-i\varepsilon)) dx = \mu((a,b)) + \frac{1}{2} \mu(\{a\}) + \frac{1}{2} \mu(\{b\}).$$

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} 2i\Im(F(z)) &= F(z) - \overline{F(z)} = F(z) - F(\bar{z}) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{z-\bar{z}}{|x-z|^2} d\mu(x) \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \frac{\Im(z)}{|x-z|^2} d\mu(x), \end{aligned}$$

donde

$$\Im(F(x-i\varepsilon)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{|s-(x+i\varepsilon)|^2} d\mu(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(s-x)^2 + \varepsilon^2} d\mu(s)$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Integrando os primeiro e último membros em (a,b) , e permutando a ordem de integração no último integral (o que pode fazer-se porque a função integranda é positiva), obtém-se

$$\int_a^b \Im(F(x-i\varepsilon)) dx = \int_{\mathbb{R}} \theta_\varepsilon(s) d\mu(s), \quad (1.55)$$

onde

$$\theta_\varepsilon(s) := \int_a^b \frac{\varepsilon}{(s-x)^2 + \varepsilon^2} dx.$$

Efectuando neste integral a mudança de variavel $x \rightsquigarrow y$ definida por $x = s + \varepsilon y$, deduz-se

$$\theta_\varepsilon(s) = \arctan\left(\frac{b-s}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{a-s}{\varepsilon}\right),$$

donde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_\varepsilon(s) = \begin{cases} \pi & \text{se } a < s < b \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } s = a \vee s = b \\ 0 & \text{se } s < a \vee s > b. \end{cases}$$

Agora, observe-se que $|\theta_\varepsilon(s)| \leq \pi$ para todo o $s \in \mathbb{R}$, e que a função constante $s \in \mathbb{R} \mapsto \pi$ é μ -integrável, logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \theta_\varepsilon(s) d\mu(s) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_\varepsilon(s) d\mu(s) \\ &= \pi\mu((a, b)) + \frac{\pi}{2}\mu(\{a\}) + \frac{\pi}{2}\mu(\{b\}), \end{aligned}$$

e o resultado pretendido decorre de (1.55) tomando limites para $\varepsilon \rightarrow 0^+$. \square

Observação 1.34. *A fórmula de inversão de Stieltjes pode ser reescrita em termos da função de distribuição, ψ , associada à medida μ , obtendo-se*

$$\psi(b) - \psi(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(F(x - i\varepsilon; d\psi)) dx,$$

onde se considera ψ normalizada de modo que

$$\psi(-\infty) = 0, \quad \psi(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2}.$$

1.6 Polinómios de Chebyshev

Nesta secção vamos estudar detalhadamente (seguindo, essencialmente, a referência [5]) duas famílias particulares de polinómios ortogonais—os chamados polinómios de Chebyshev de primeira e de segunda espécie—que vão desempenhar um papel essencial em certos momentos do texto. Os polinómios de Chebyshev são determinados a partir da relação de recorrência

$$2xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

No caso de as condições iniciais serem $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, denominamos estes polinómios por **polinómios de Chebyshev de primeira espécie**, e em vez de P_n escrevemos T_n ; e se as condições iniciais forem $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = 2x$, denominamo-los **polinómios de Chebyshev de segunda espécie**, e em vez de P_n escrevemos U_n . Relações trigonométricas elementares mostram que

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad \text{e} \quad U_n(\cos \theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1.57)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$. Daqui deduzem-se facilmente as expressões explícitas para os zeros das sucessões $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{U_n\}_{n=0}^\infty$, o que permite concluir que o verdadeiro intervalo de ortogonalidade destas SPO's é $[-1, 1]$.

De seguida vamos ver como usar os resultados das secções anteriores para determinar explicitamente quer as funções de Stieltjes, quer as medidas de ortogonalidade para as SPO's $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{U_n\}_{n=0}^\infty$. Para isso, usaremos um importante Teorema de Darboux, o qual é uma consequência fácil do famoso Lema de Riemann-Lebesgue. Como é usual, dadas sucessões $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$, escreveremos

$$\begin{aligned} \alpha_n = o(\beta_n) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0, \\ a_n \sim b_n &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \end{aligned}$$

(Também se escreve $\alpha_n = \beta_n + o(\gamma_n)$ com o significado $\alpha_n - \beta_n = o(\gamma_n)$.)

Lema 1.35 (Riemann-Lebesgue). *Seja g uma função seccionalmente contínua e limitada no intervalo $[a, b]$, com $-\infty < a < b < +\infty$. Então*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_a^b e^{ixt} g(t) dt = 0.$$

Teorema 1.36 (Darboux). *Sejam f e g duas funções analíticas numa bola do plano complexo, cujas séries de Taylor têm raio de convergência $0 < R < \infty$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n, \quad 0 < R < \infty.$$

(i) *Se $h(z) := f(z) - g(z)$ é contínua em $\{z : |z| \leq R\}$ então*

$$a_n = b_n + o(R^{-n}). \tag{1.58}$$

(ii) *Suponha-se que*

$$\bar{h}(\theta) := h(Re^{i\theta}), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

é de classe C^m . Se $0 \leq m < +\infty$ então

$$a_n = b_n + o\left(\frac{1}{n^m R^n}\right), \tag{1.59}$$

e se $m = +\infty$ então

$$a_n = b_n + o\left(\frac{1}{n^n R^n}\right). \tag{1.60}$$

Demonstração. Sob as hipóteses consideradas, tem-se

$$a_n - b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{h(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \bar{h}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (1.61)$$

e (1.58) decorre imediatamente do Lema de Riemann-Lebesgue. Por outro lado, como $\bar{h}(0) = \bar{h}(2\pi)$, integrando por partes m vezes obtém-se

$$\int_0^{2\pi} \bar{h}(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{n^m i^m} \int_0^{2\pi} \bar{h}^{(m)}(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad (1.62)$$

o que, conjugando com (1.61) e o Lema de Riemann-Lebesgue, prova (1.59). Finalmente, se $\bar{h} \in C^\infty$ então fixado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}_0$ pode integrar-se por partes n vezes o integral do primeiro membro de (1.62), e o resultado é a igualdade (1.62) com $m = n$, o que permite provar (1.60). \square

Consideremos a relação (1.56) para os polinómios de Chebyshev de primeira espécie. Multiplicando ambos os membros de (1.56) por t^{n+1} e “somando” (formalmente), obtém-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_{n+1}(z) t^{n+1} = 2zt \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(z) t^n - t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} T_{n-1}(z) t^{n-1}.$$

Assim, pondo $T(z, t) := \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(z) t^n$, tem-se

$$T(z, t) - T_1(z)t - T_0(z) = 2zt(T(z, t) - T_0(z)) - t^2 T(z, t),$$

donde

$$T(z, t) = \frac{1 - zt}{1 - 2zt + t^2} \quad (1.63)$$

De modo análogo, para os polinómios de Chebyshev de segunda espécie, pondo $U(z, t) := \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) t^n$, deduz-se

$$U(z, t) = \frac{1}{1 - 2zt + t^2}. \quad (1.64)$$

Considerem-se as funções complexas $(z \pm 1)^{1/2}$, definidas por

$$(z \pm 1)^{1/2} = \sqrt{|z \pm 1|} e^{\frac{i}{2} \text{Arg}(z \pm 1)}, \quad -\pi < \text{Arg}(z \pm 1) \leq \pi.$$

À custa destas funções, defina-se

$$(z^2 - 1)^{1/2} := (z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2} .$$

Esta função $(z^2 - 1)^{1/2}$ é analítica para $z \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, 1]$ e pode prolongar-se analiticamente a $\mathbf{C} \setminus [-1, 1]$. Além disso, tem-se

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \begin{cases} -\sqrt{z^2 - 1} & \text{se } z \in (-\infty, -1] \\ i\sqrt{1 - z^2} & \text{se } z \in [-1, 1] \\ \sqrt{z^2 - 1} & \text{se } z \in [1, +\infty) \end{cases} \quad (1.65)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} ((x \pm i\epsilon)^2 - 1)^{1/2} = \pm i\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1 . \quad (1.66)$$

Definindo

$$\alpha(z) := z + (z^2 - 1)^{1/2} \quad \text{e} \quad \beta(z) = z - (z^2 - 1)^{1/2} ,$$

α e β são contínuas em $\mathbf{C} \setminus (-1, 1)$ e analíticas em $\mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ e, para $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \alpha(x + i\epsilon) &= \alpha(x) , & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \alpha(x - i\epsilon) &= \beta(x) , \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \beta(x + i\epsilon) &= \beta(x) , & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \beta(x - i\epsilon) &= \alpha(x) . \end{aligned} \quad (1.67)$$

Tem-se também, claramente,

$$\alpha(z) + \beta(z) = 2z , \quad \alpha(z)\beta(z) = 1 , \quad z \in \mathbf{C} . \quad (1.68)$$

Daqui deduz-se que

$$z \in [-1, 1] \Leftrightarrow |\alpha(z)| = |\beta(z)| \quad (1.69)$$

e, nestas condições, necessariamente $|\alpha(z)| = |\beta(z)| = 1$. Para provar (1.69) notemos que, se $z \in [-1, 1]$ então decorre directamente da definição da raiz quadrada complexa $(z^2 - 1)^{1/2}$ que $|\alpha(z)| = |\beta(z)| = 1$. Reciprocamente, se $|\alpha(z)| = |\beta(z)|$ então, por (1.68), necessariamente $|\alpha(z)| = |\beta(z)| = 1$, logo existe $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\alpha(z) = e^{i\theta}$ e $\beta(z) = e^{-i\theta}$, donde, usando de novo (1.68), $z = \frac{1}{2}(\alpha(z) + \beta(z)) = \cos \theta \in [-1, 1]$.

Por outro lado, como $|\alpha(z)|$ e $|\beta(z)|$ são contínuas em $\mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ e, para $z > 1$, $|\alpha(z)| = z + \sqrt{z^2 - 1} > z - \sqrt{z^2 - 1} = |\beta(z)|$, podemos concluir ainda, tendo em conta (1.69), que

$$z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1] \Leftrightarrow |\beta(z)| < |\alpha(z)| \quad (1.70)$$

e, nestas condições, necessariamente $0 < |\beta(z)| < 1 < |\alpha(z)|$. Em particular, de (1.69) e (1.70) sai

$$0 < |\beta(z)| \leq 1 \leq |\alpha(z)|, \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad (1.71)$$

(onde as desigualdades são todas estritas para $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$). Agora, note-se que (1.63) se pode reescrever na forma (atenda-se a (1.68))

$$T(z, t) = \frac{1 - zt}{(t - \alpha(z))(t - \beta(z))}.$$

Observe-se que, para $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ é $0 < |\beta(z)| < |\alpha(z)|$, logo, como função da variável t , $T(z, t)$ é uma função analítica em $|t| < |\beta(z)|$ (para z fixo) que tem em $t = \beta(z)$ um pólo simples. Da mesma maneira se conclui que, para $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$, a função

$$\frac{1 - z\beta(z)}{(\beta(z) - \alpha(z))(t - \beta(z))}$$

é analítica para $|t| < |\beta(z)|$ e tem em $t = \beta(z)$ um pólo simples. Assim, como

$$\begin{aligned} h(z, t) &:= \frac{1 - zt}{(t - \alpha(z))(t - \beta(z))} - \frac{1 - z\beta(z)}{(\beta(z) - \alpha(z))(t - \beta(z))} \\ &= \frac{\alpha(z)z - 1}{(\beta(z) - \alpha(z))(t - \alpha(z))} \end{aligned}$$

é contínua para $|t| \leq |\beta(z)|$ quando $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ e, nestas condições,

$$\frac{1 - z\beta(z)}{(\beta(z) - \alpha(z))(t - \beta(z))} = \frac{1 - \beta(z)z}{\alpha(z) - \beta(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(z)^{-n-1} t^n,$$

decorre do Teorema de Darboux que, para $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$,

$$T_n(z) = \frac{1 - \beta(z)z}{\alpha(z) - \beta(z)} \beta(z)^{-n-1} + o\left(\frac{1}{|\beta(z)|^n}\right),$$

donde

$$\beta(z)^n T_n(z) \sim \frac{1 - z\beta(z)}{\alpha(z) - \beta(z)} \beta(z)^{-1}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]. \quad (1.72)$$

Por outro lado, partindo de

$$U(z, t) = \frac{1}{(t - \alpha(z))(t - \beta(z))},$$

por um procedimento análogo ao anterior deduz-se que, para $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$,

$$U_n(z) = \frac{1}{\alpha(z) - \beta(z)} \beta(z)^{-n-1} + o\left(\frac{1}{|\beta(z)|^n}\right),$$

donde

$$\beta(z)^n U_n(z) \sim \frac{1}{\alpha(z) - \beta(z)} \beta(z)^{-1}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]. \quad (1.73)$$

As relações (1.72) e (1.73) dão o comportamento assintótico das SPO's $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{U_n\}_{n=0}^\infty$. Por outro lado, notemos que os polinômios associados de primeira espécie correspondentes a estas SPO's satisfazem

$$T_{n-1}^{(1)}(z) = U_{n-1}(z), \quad U_{n-1}^{(1)}(z) = U_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots$$

Assim, designando por F_T e F_U as funções de Stieltjes correspondentes às medidas de ortogonalidade das SPO's $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ (resp.), para $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ deduz-se

$$F_T(z) := \frac{1}{a_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n-1}^{(1)}(z)}{T_n(z)} = \frac{\beta(z)}{1 - z\beta(z)} = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} \quad (1.74)$$

e

$$F_U(z) := \frac{1}{a_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-1}^{(1)}(z)}{U_n(z)} = 2\beta(z) = 2\left(z - (z^2 - 1)^{1/2}\right), \quad (1.75)$$

e F_T e F_U são analíticas em $\mathbf{C} \setminus [-1, 1]$. Notemos agora que, pondo

$$w(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} [F_U(x - i\epsilon) - F_U(x + i\epsilon)], \quad x \in \mathbf{R},$$

tem-se imediatamente que $w(x) = 0$ para $|x| > 1$ (pois $F_U(z)$ é contínua para $z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$) e, de acordo com (1.65) e (1.67), para $-1 \leq x \leq 1$ é

$$w(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi i} [\beta(x - i\epsilon) - \beta(x + i\epsilon)] = \frac{1}{\pi i} [\alpha(x) - \beta(x)] = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2},$$

i.e.,

$$w(x) = \chi_{(-1,1)}(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

onde $\chi_{(-1,1)}$ representa a função característica do intervalo $(-1, 1)$ (Recorde-se que, dado um conjunto E , $\chi_E(x) := 1$ se $x \in E$ e $\chi_E(x) := 0$ se $x \notin E$.) Como w

é contínua em \mathbb{R} e $|F_U(x - i\epsilon) - F_U(x + i\epsilon)| \leq 6\sqrt{1 + \epsilon^2}$ se $|x| \leq 1$ e $0 < \epsilon \leq 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \{F_U(x - i\epsilon) - F_U(x + i\epsilon)\} \varphi(x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) w(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} dx, \quad \forall \varphi \in C[-1, 1] \end{aligned}$$

e segue-se da fórmula de inversão de Stieltjes que a medida de ortogonalidade, $d\psi_U$, correspondente à SPO ortonormalda $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ é dada por

$$d\psi_U(x) = \chi_{(-1,1)}(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Analogamente se mostra que a medida de ortogonalidade, $d\psi_T$, para a SPO $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ é dada por

$$d\psi_T(x) = \chi_{(-1,1)}(x) \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Note-se que, tendo em conta (1.57) e as fórmulas

$$\begin{aligned} 2 \cos(m\theta) \cos(n\theta) &= \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta, \\ 2 \sin(m+1)\theta \sin(n+1)\theta &= \cos(m-n)\theta - \cos(m+n+2)\theta, \end{aligned}$$

deduz-se facilmente que

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{se } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} \delta_{mn} & \text{se } m, n \neq 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

e

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots),$$

e conclui-se que, de facto, $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ são SPO's ortogonais relativamente às medidas $d\psi_T$ e $d\psi_U$ (resp.).

Observação 1.37. A sucessão $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ é uma SPO ortonormada relativamente à medida $d\psi_U$. Porém, $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ não é uma SPO ortonormada relativamente a $d\psi_T$; a correspondente SPO ortonormada relativamente a $d\psi_T$ é a sucessão $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ definida por

$$t_0(x) = 1, \quad t_n(x) = \sqrt{2} T_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

As SPO's mónicas, $\{\widehat{T}_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\widehat{U}_n\}_{n=0}^\infty$, correspondentes às SPO's $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{U_n\}_{n=0}^\infty$, são dadas por

$$\widehat{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x), \quad \widehat{U}_n(x) = 2^{-n}U_n(x), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Além disso, $\{\widehat{T}_n\}_{n=0}^\infty$ satisfaz a relação de recorrência a três termos (1.4), com

$$\beta_n = 0, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_n = \frac{1}{4} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

e $\{\widehat{U}_n\}_{n=0}^\infty$ satisfaz (1.4) com

$$\beta_n = 0, \quad \gamma_n = \frac{1}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Concluimos esta secção enunciando uma proposição que resume algumas propriedades envolvendo os polinómios de Chebyshev de segunda espécie e que serão úteis adiante (estas propriedades decorrem, essencialmente, por translação de algumas das propriedades estabelecidas anteriormente).

Teorema 1.38. *Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma SPOM dada pela relação de recorrência*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + bP_n(x) + \frac{c^2}{4}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

com condições iniciais $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - b$, onde $b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$. Então

$$(i) \quad P_n(x) = c^n \widehat{U}_n\left(\frac{x-b}{c}\right) = \left(\frac{c}{2}\right)^n U_n\left(\frac{x-b}{c}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(ii) \quad F_P(z) = \frac{1}{c}F_U\left(\frac{z-b}{c}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [b-c, b+c],$$

$$(iii) \quad d\sigma_P(x) = \frac{2}{\pi c^2} \sqrt{c^2 - (x-b)^2} dx, \quad \text{supp}(\sigma_P) = [b-c, b+c],$$

onde $d\sigma_P$ designa a medida de ortogonalidade da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, F_P a correspondente função de Stieltjes, e F_U é a função de Stieltjes correspondente à SPO dos polinómios de Chebyshev de segunda espécie, definida por (1.75).

Capítulo 2

Transformações polinomiais

Este capítulo é dedicado ao estudo de certas transformações polinomiais em teoria dos polinômios ortogonais. As referências bibliográficas utilizadas foram, essencialmente, os artigos [2], [4], [7] e [15]. Destacamos que alguns dos resultados a apresentar não encontramos na bibliografia disponível, nomeadamente aqueles que envolvem a determinação explícita da medida de ortogonalidade de uma SPOM obtida via uma transformação polinomial geral do tipo estudado.

2.1 Introdução

Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma SPOM. De acordo com o teorema de Favard, esta SPOM é caracterizada por uma equação de diferenças de segunda ordem. Para os nossos propósitos, no que vai seguir-se é conveniente escrever esta equação de diferenças como um sistema formado por blocos de relações de recorrência a três termos, do tipo

$$\begin{aligned}(x - b_n^{(j)})P_{nk+j}(x) &= P_{nk+j+1}(x) + a_n^{(j)}P_{nk+j-1}(x), \\ 0 \leq j \leq k-1; \quad n &= 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{2.1}$$

com as condições iniciais habituais

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1,\tag{2.2}$$

onde, para cada $j = 0, 1, \dots, k-1$, $\{a_n^{(j)}\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ são sucessões de números complexos tais que

$$a_n^{(j)} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(De facto, para cada n , (2.1) define um sistema com k equações, e fazendo variar n obtêm-se k blocos de relações de recorrência a três termos.) Sem perda de generalidade, supomos que $a_0^{(0)} = 1$ e que $P_s(x) = 0$ para $s \leq -1$. É também conveniente definir

$$b_n^{(k+j)} := b_{n+1}^{(j)}, \quad a_n^{(k+j)} := a_{n+1}^{(j)} \neq 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq k-1 \text{ e } n \geq 0.$$

Seguindo [4], introduzimos polinómios $\Delta_n(i, j; \cdot)$ definidos por

$$\Delta_n(i, j; x) := \begin{cases} 0 & \text{if } j < i-2 \\ 1 & \text{if } j = i-2 \\ x - b_n^{(i-1)} & \text{if } j = i-1 \end{cases}$$

e, para $j \geq i \geq 1$,

$$\Delta_n(i, j; x) := \begin{vmatrix} x - b_n^{(i-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n^{(i)} & x - b_n^{(i)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n^{(i+1)} & x - b_n^{(i+1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x - b_n^{(j-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^{(j)} & x - b_n^{(j)} \end{vmatrix}.$$

Em [4], mostrou-se que se $b_n^{(0)}$ e $\Delta_n(2, k-1; x)$ forem independentes de n e se

$$a_n^{(0)} \Delta_{n-1}(2, k-2; x) + a_n^{(1)} \Delta_n(3, k-1; x) - a_0^{(1)} \Delta_0(3, k-1; x)$$

for independente de x para todo o $n = 0, 1, \dots$, então a SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ pode ser descrita através de uma transformação polinomial do tipo

$$P_{nk}(x) = Q_n(T(x))$$

onde T é um polinómio de grau k e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ é uma nova SPOM. Naturalmente, a importância deste tipo de decomposição decorre da possibilidade de

estudar as propriedades da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ dada—quer algébricas, quer analíticas, incluindo a determinação da medida de ortogonalidade—, através das propriedades da SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$, já que, em princípio, esperamos que as propriedades desta nova SPOM sejam mais fáceis de estudar. Isto suscita a seguinte questão:

Que condições deveremos impor para que, dada uma SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, exista outra SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ tal que a SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ possa ser descrita por uma transformação polinomial do tipo

$$P_{nk+m}(x) = \theta_m(x)Q_n(T(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde k e m são números inteiros fixos, com $k \geq 2$ e $0 \leq m \leq k - 1$, e T e θ_m são polinómios fixos de graus k e m , respectivamente?

O problema correspondente a $m = 0$ foi estudado em [4] e [8], quer do ponto de vista algébrico, quer do ponto de vista analítico. Por outro lado, o problema algébrico no caso correspondente a $m = k - 1$ (i.e., a determinação da nova SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ e dos polinómios T e θ_{k-1} , bem como a obtenção de uma representação dos polinómios da família dada $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ em termos dos polinómios da família $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$) foi resolvido em [7], tendo ficado em aberto o problema analítico, o qual se reduz, essencialmente, à descrição (ou determinação) da medida de ortogonalidade da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ em termos da medida de ortogonalidade da SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$. O objectivo principal deste capítulo é resolver este problema.

Na secção 2 apresentamos a solução para o problema algébrico em questão (correspondente a $m = k - 1$), tal como estabelecido em [7], e na secção seguinte apresentamos a solução para o problema analítico, dando explicitamente a medida de ortogonalidade da sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ em termos da medida de ortogonalidade da SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$. Finalmente, na secção 4, e como exemplo de aplicação dos resultados estabelecidos, analisamos o caso particular $k = 3$ (logo $m = 2$) na situação especial em que as duas sucessões que definem os coeficientes da relação de recorrência a três termos para a sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ são sucessões periódicas de período 3.

2.2 Propriedades algébricas

A proposição seguinte foi estabelecida por C. M. da Fonseca e J. Petronilho [7].

Teorema 2.1. *Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma SPOM que satisfaz a relação de recorrência (2.1), com condições iniciais (2.2). Para $n = 0, 1, 2, \dots$, defina-se*

$$r_n(x) := a_{n+1}^{(0)} \Delta_{n+1}(2, k-2; x) - a_1^{(0)} \Delta_1(2, k-2; x) \\ + a_n^{(k-1)} \Delta_n(1, k-3; x) - a_0^{(k-1)} \Delta_0(1, k-3; x).$$

Suponha-se que, para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, se verificam as seguintes condições:

- (i) $b_n^{(k-1)}$ é independente de n ;
- (ii) $\Delta_n(1, k-2; x) := \theta_{k-1}(x)$ é independente de n para todo o x ;
- (iii) $r_n(x) =: r_n$ é independente de x para todo n .

Sejam T o polinómio de grau k definido por

$$T(x) := \Delta_0(1, k-1; x) - a_1^{(0)} \Delta_1(2, k-2; x),$$

e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ a SPOM definida pela relação de recorrência

$$Q_{n+1}(x) = (x - r_n) Q_n(x) - s_n Q_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

com condições iniciais $Q_{-1}(x) = 0$ e $Q_0(x) = 1$, onde

$$s_n := a_n^{(0)} a_n^{(1)} \dots a_n^{(k-1)} \quad (\text{com } a_0^{(0)} \equiv 1).$$

Então, para cada $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ e para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$P_{kn+j}(x) = \Delta_n(1, j-1; x) Q_n(T(x)) \\ + a_n^{(0)} a_n^{(1)} \dots a_n^{(j)} \Delta_n(j+2, k-2; x) Q_{n-1}(T(x)). \quad (2.4)$$

Em particular, para $j = k-1$,

$$P_{nk+k-1}(x) = \theta_{k-1}(x) Q_n(T(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Fazendo em (2.6) $j = 0$ e mudando n em $n + 1$ obtemos

$$\begin{aligned} & \Delta_{n+1}(1, k-2; x) P_{nk+k}(x) \\ &= P_{(n+2)k-1}(x) + a_{n+1}^{(0)} \Delta_{n+1}(2, k-2; x) P_{(n+1)k-1}(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

para todo $n = 0, 1, \dots$. Como $\Delta_n(1, k-2; x)$ é independente de n para todo o x , mudando n em $n-1$ em (2.7) e (2.8) concluimos que

$$\begin{aligned} & P_{(n+1)k-1}(x) + a_{n-1}^{(0)} a_{n-1}^{(1)} \cdots a_{n-1}^{(k-1)} P_{(n-1)k-1}(x) \\ &= \left\{ (x - b_0^{(k-1)}) \Delta_0(1, k-2; x) - a_{n-1}^{(k-1)} \Delta_{n-1}(1, k-3; x) \right. \\ & \quad \left. - a_n^{(0)} \Delta_n(2, k-2; x) \right\} P_{nk-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como a expansão do determinante $\Delta_0(1, k-1; x)$ ao longo a última coluna é

$$\Delta_0(1, k-1; x) = (x - b_0^{(k-1)}) \Delta_0(1, k-2; x) - a_0^{(k-1)} \Delta_0(1, k-3; x),$$

podemos reescrever (2.9) na forma

$$\begin{aligned} & P_{(n+1)k-1}(x) + a_{n-1}^{(0)} a_{n-1}^{(1)} \cdots a_{n-1}^{(k-1)} P_{(n-1)k-1}(x) \\ &= \left\{ \Delta_0(1, k-1; x) + a_0^{(k-1)} \Delta_0(1, k-3; x) - \right. \\ & \quad \left. a_{n-1}^{(k-1)} \Delta_{n-1}(1, k-3; x) - a_n^{(0)} \Delta_n(2, k-2; x) \right\} P_{nk-1}(x) \\ &= \{T(x) - r_{n-1}(x)\} P_{nk-1}(x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

para todo $n = 1, 2, \dots$. Assim

$$P_{(n+1)k-1}(x) = \{T(x) - r_{n-1}\} P_{nk-1}(x) - s_{n-1} P_{(n-1)k-1}(x) \quad (2.11)$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$. Atendendo agora a que

$$P_{k-1}(x) = \Delta_0(1, k-2; x) \equiv \theta_{k-1}(x),$$

facilmente se prova (2.5) por indução. De facto, é óbvio que (2.5) se verifica para $n = 0$; e para $n = 1$ também se verifica, pois de (2.11) para $n = 1$ deduz-se

$$P_{k+k-1}(x) = \theta_{k-1}(x) T(x) = \theta_{k-1}(x) Q_1(T(x)),$$

e o processo de indução é agora consequência imediata de (2.11). Finalmente, a relação (2.4) decorre de (2.5) e (2.6). \square

Como consequência da proposição precedente podemos determinar relações explícitas entre os polinômios associados das famílias $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$. Estas relações serão fundamentais para a determinação da medida de ortogonalidade da sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$.

Teorema 2.2. *Nas condições do teorema precedente, tem-se*

$$P_{(n+1)k-2}^{(1)}(x) = \Delta_0(2, k-2; x)Q_n(T(x)) + s_0 Q_{n-1}^{(1)}(T(x)) \quad (2.12)$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$.

Demonstração. Começamos por observar que $P_{nk+k-2}^{(1)}$ admite uma representação da forma

$$P_{nk+k-2}^{(1)}(x) = \alpha(x)Q_n(T(x)) + \beta(x)Q_{n-1}^{(1)}(T(x)) \quad (2.13)$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ podem depender de x mas não dependem de n . Para provar esta relação, considere-se a seguinte equação de diferenças de segunda ordem (onde x é parâmetro):

$$y_{n+1}(x) = (T(x) - r_n)y_n(x) - s_n y_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

onde r_n e s_n são definidos como no Teorema 2.1. Ora, por um lado, de acordo com (2.3), a solução de (2.14) que satisfaz as condições iniciais $y_0(x) = 1$ e $y_1(x) = T(x) - r_0$ é dada por $y_n(x) = Q_n(T(x))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Por outro lado, como a sucessão dos polinômios associados de primeira espécie $\{Q_{n-1}^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ também satisfaz a mesma relação de recorrência (2.3) satisfeita por $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$, mas com condições iniciais $y_0(x) = 1$ e $y_1(x) = x - r_1$, então a solução de (2.14) que satisfaz as condições iniciais $y_0(x) = 1$ e $y_1(x) = T(x) - r_1$ é dada por $y_n(x) = Q_{n-1}^{(1)}(T(x))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Estas duas soluções de (2.14) são linearmente independentes pois o seu wronskiano nunca se anula. De facto, usando a relação (1.29), aplicada à sucessão $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$, obtém-se

$$\begin{vmatrix} Q_n(T(x)) & Q_{n-1}^{(1)}(T(x)) \\ Q_{n+1}(T(x)) & Q_n^{(1)}(T(x)) \end{vmatrix} = s_1 s_2 \cdots s_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Consequentemente, a solução geral da equação de diferenças (2.14) é

$$y_n(x) = C_1(x)Q_n(T(x)) + C_2(x)Q_{n-1}^{(1)}(T(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $C_1(x)$ e $C_2(x)$ podem depender de x mas não de n . Assim, para provar (2.13) basta mostrar que $y_n(x) = P_{nk+k-2}^{(1)}(x)$ também satisfaz (2.14). Para isso, designe \mathcal{L} a funcional de momentos a respeito da qual $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal. Então, usando (1.30) e (2.5), tem-se

$$\begin{aligned}
P_{nk+k-2}^{(1)}(x) &= \frac{1}{u_0} \langle \mathcal{L}_y, \frac{P_{nk+k-1}(x) - P_{nk+k-1}(y)}{x-y} \rangle \\
&= \frac{1}{u_0} \langle \mathcal{L}_y, \frac{\theta_{k-1}(x)Q_n(T(x)) - \theta_{k-1}(y)Q_n(T(y))}{x-y} \rangle \\
&= \frac{1}{u_0} \langle \mathcal{L}_y, \frac{\theta_{k-1}(x) - \theta_{k-1}(y)}{x-y} \rangle Q_n(T(x)) \\
&\quad + \frac{1}{u_0} \langle \mathcal{L}_y, \theta_{k-1}(y) \frac{Q_n(T(x)) - Q_n(T(y))}{x-y} \rangle \\
&= P_{k-2}^{(1)}(x)Q_n(T(x)) + R_n(x),
\end{aligned}$$

onde

$$R_n(x) := \frac{1}{u_0} \langle \mathcal{L}_y, \theta_{k-1}(y) \frac{Q_n(T(x)) - Q_n(T(y))}{x-y} \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, para provar (2.13) é suficiente mostrar que $y_n(x) = R_n(x)$ é também solução da equação de diferenças (2.14). Com efeito, usando a relação de recorrência (2.3) para $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
&T(x)Q_n(T(x)) - T(x)Q_n(T(y)) \\
&= [Q_{n+1}(T(x)) - Q_{n+1}(T(y))] + r_n [Q_n(T(x)) - Q_n(T(y))] \\
&\quad + s_n [Q_{n-1}(T(x)) - Q_{n-1}(T(y))] - [T(x) - T(y)] Q_n(T(y)),
\end{aligned}$$

logo, para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}
T(x)R_n(x) &= \frac{1}{u_0} \langle \mathcal{L}_y, \theta_{k-1}(y) \frac{T(x)Q_n(T(x)) - T(x)Q_n(T(y))}{x-y} \rangle \\
&= R_{n+1}(x) + r_n R_n(x) + s_n R_{n-1}(x) \\
&\quad - \frac{1}{u_0} \langle \mathcal{L}_y, \frac{T(x) - T(y)}{x-y} \theta_{k-1}(y) Q_n(T(y)) \rangle.
\end{aligned}$$

Mas, $\theta_{k-1}(y)Q_n(T(y)) = P_{nk+k-1}(y)$ e $\varrho_{k-1}(y; x) := \frac{T(x)-T(y)}{x-y}$ é um polinómio em y de grau $k-1$ e, portanto, verifica-se

$$\langle \mathcal{L}_y, \frac{T(x)-T(y)}{x-y} \theta_{k-1}(y)Q_n(T(y)) \rangle = \langle \mathcal{L}_y, \varrho_{k-1}(y; x) P_{nk+k-1}(y) \rangle = 0$$

para todo o $n = 1, 2, \dots$, sendo a última igualdade justificada pela ortogonalidade de $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ relativamente a \mathcal{L} . Conclui-se assim que $R_n(x)$ satisfaz (2.14), o que implica que, de facto, $P_{nk+k-2}^{(1)}(x)$ é da forma indicada em (2.13).

Agora, fazendo $n = 0$ em (2.13), obtém-se

$$\alpha(x) = P_{k-2}^{(1)}(x) = \Delta_0(2, k-2; x),$$

e para $n = 1$ vem

$$\begin{aligned} \beta(x) &= P_{2k-2}^{(1)}(x) - \alpha(x)T(x) \\ &= P_{2k-2}^{(1)}(x) - \Delta_0(2, k-2; x) \left\{ P_k(x) - a_1^{(0)} \Delta_1(2, k-2; x) \right\}. \end{aligned}$$

Mas, usando propriedades dos determinantes de matrizes tridiagonais, é

$$\begin{aligned} P_{2k-2}^{(1)}(x) &= \Delta_0(2, k-1; x) \Delta_1(1, k-2; x) \\ &\quad - a_1^{(0)} \Delta_0(2, k-2; x) \Delta_1(2, k-2; x), \end{aligned}$$

logo podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \Delta_0(2, k-1; x) \Delta_1(1, k-2; x) - \Delta_0(2, k-2; x) P_k(x) \\ &= \Delta_0(2, k-1; x) P_{k-1}(x) - \Delta_0(2, k-2; x) P_k(x) \\ &= P_{k-1}^{(1)}(x) P_{k-1}(x) - P_{k-2}^{(1)}(x) P_k(x) = \prod_{j=1}^{k-1} a_0^{(j)} = s_0, \end{aligned}$$

onde se usou novamente a relação (1.29). Isto conclui a demonstração. \square

2.3 Medida de ortogonalidade

A determinação da função de distribuição (medida de ortogonalidade) a respeito da qual a sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal, será feita com base no Teorema 2.2 e no lema seguinte, que foi estabelecido por F. Marcellán e J. Petronilho [15].

Lema 2.3. *Seja σ uma função de distribuição com suporte $\text{supp}(\sigma) \subset [\xi, \eta]$, $-\infty < \xi < \eta < +\infty$. Seja T um polinómio real e mónico de grau $k \geq 2$ cuja*

derivada T' tem $k-1$ zeros reais e distintos, que escrevemos de forma crescente por $y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1}$. Suponha-se que $T(y_{2i-1}) \geq \eta$ e $T(y_{2i}) \leq \xi$ se k é ímpar, ou $T(y_{2i-1}) \leq \xi$ e $T(y_{2i}) \geq \eta$ se k é par. Sejam A e B dois polinômios reais e mônicos tais que o grau de A é $k-1-m$ e o grau de B é m , com $0 \leq m \leq k-1$. Suponha-se que os zeros de AB são reais e distintos, AB e T' têm o mesmo sinal em cada ponto do conjunto de $T^{-1}([\xi, \eta])$ e, se $m \geq 1$,

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{d\sigma(y)}{|y - T(b_j)|} < +\infty \quad (2.15)$$

para $j = 1, \dots, m$, onde b_1, b_2, \dots, b_m designam os zeros de B . Seja

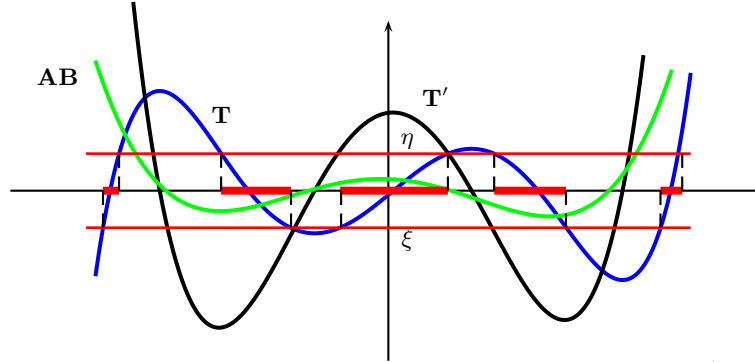
$$F(z) := \frac{1}{B(z)} [A(z)F(T(z); \sigma) - L_{m-1}(z)], \quad z \in \mathbf{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta]), \quad (2.16)$$

onde $L_{m-1}(z) := \sum_{j=1}^m M_j B(z)/(z - b_j)$, $M_j := A(b_j)F(T(b_j); \sigma)/B'(b_j)$ para $j = 1, \dots, m$ ($L_0(z) \equiv 0$), isto é, L_{m-1} é o polinômio interpolador de Lagrange de grau $m-1$ que coincide com $A(z)F(T(z); \sigma)$ nos zeros de B .

Nestas condições, F é a função de Stieltjes da função de distribuição τ definida por

$$d\tau(x) := \left| \frac{A(x)}{B(x)} \right| \chi_{T^{-1}([\xi, \eta])}(x) \frac{d\sigma(T(x))}{T'(x)}. \quad (2.17)$$

Observação 2.4. A figura seguinte ilustra o lema precedente para polinômios T , A e B de graus 5, 0 e 4 (resp.).



Demonstração. Sob as hipóteses consideradas, podemos escrever $T^{-1}([\xi, \eta]) = \cup_{j=1}^k E_j$ onde E_1, \dots, E_k são k intervalos fechados tais que E_j e E_{j+1} tem no

máximo um ponto em comum. Consideremos as funções $T_j : D_j \rightarrow T(D_j)$ ($j = 1, \dots, k$) tais que $x \in D_j \mapsto T_j(x) := T(x)$, onde $D_1 :=]-\infty, y_1]$, $D_j := [y_{j-1}, y_j]$ ($j = 2, \dots, k-1$) e $D_k := [y_{k-1}, +\infty[$. Então, cada T_j é bijectiva e $T_j(E_j) = [\xi, \eta]$ para $j = 1, \dots, k$. Como AB e T' têm o mesmo sinal em cada intervalo E_j de $T^{-1}([\xi, \eta])$ então os zeros de AB estão localizados entre os intervalos E_1, \dots, E_k . Além disso, os zeros a_1, \dots, a_{k-1-m} de A e b_1, \dots, b_m de B satisfazem $T(a_i) \notin]\xi, \eta[$ ($i = 1, \dots, k-1-m$) e $T(b_j) \notin]\xi, \eta[$ ($j = 1, \dots, m$). Provemos primeiramente que τ define, de facto, uma função de distribuição. Para tal, é suficiente mostrar que

$$\int_{T^{-1}([\xi, \eta])} \left| \frac{A(x)}{B(x)} \right| \frac{d\sigma(T(x))}{T'(x)} < +\infty \quad (2.18)$$

(porque $[\xi, \eta]$ é compacto). Uma vez que os zeros de B e T' são reais e simples, considerando os conjuntos de índices J_1, J_2 e J_3 definidos por

$$J_1 := \{1, \dots, m\} \setminus \{j : b_j = y_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k-1\}\},$$

$$J_2 := \{1, \dots, k-1\} \setminus \{j : y_j = b_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, m\}\},$$

$$J_3 := \{1, \dots, m\} \cap \{j : b_j = y_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k-1\}\},$$

podemos escrever

$$\frac{1}{B(x)T'(x)} = \sum_{j \in J_1} \frac{\alpha_{1j}}{x - b_j} + \sum_{j \in J_2} \frac{\alpha_{2j}}{x - y_j} + \sum_{j \in J_3} \frac{\alpha_{3j}}{(x - b_j)^2},$$

onde os α_{ij} 's são números reais. Mas, $T(x) = T(b_j) + T'(b_j)(x - b_j) + \frac{T''(b_j)}{2!}(x - b_j)^2 + \dots + (x - b_j)^k$ (para j fixo). Além disso, se $j \in J_1$ então $T'(b_j) \neq 0$ e $T(x) - T(b_j) = (x - b_j)[T'(b_j) + G_{1j}(x)]$, onde $G_{1j}(x)$ é um polinómio de grau $k-1$ tal que $G_{1j}(b_j) = 0$. Segue-se que

$$\frac{|\alpha_{1j}A(x)|}{|x - b_j|} \leq \frac{K_{1j}}{|T(x) - T(b_j)|}, \quad x \in T^{-1}(] \xi, \eta [), \quad j \in J_1$$

onde $K_{1j} := \sup_{x \in T^{-1}(] \xi, \eta [)} |\alpha_{1j}A(x)| |T'(b_j) + G_{1j}(x)| < \infty$. Analogamente, se $j \in J_3$ então $T'(b_j) = 0$ e $T''(b_j) \neq 0$ e $T(x) - T(b_j) = (x - b_j)^2 [T''(b_j)/2 + G_{3j}(x)]$, onde $G_{3j}(x)$ é um polinómio de grau $k-2$ tal que $G_{3j}(b_j) = 0$. Então, deduzimos que

$$\frac{|\alpha_{3j}A(x)|}{(x - b_j)^2} \leq \frac{K_{3j}}{|T(x) - T(b_j)|}, \quad x \in T^{-1}(] \xi, \eta [), \quad j \in J_3$$

onde $K_{3j} := \sup_{x \in T^{-1}([\xi, \eta])} |\alpha_{3j} A(x)| |T''(b_j)/2 + G_{3j}(x)| < \infty$. Finalmente, se $j \in J_2$ então $y_j \neq b_i$ para todo o $i \in \{1, \dots, m\}$ e, além disso, se $T(y_j) = \xi$ ou $T(y_j) = \eta$ para algum j então necessariamente $y_j = a_i$ para algum $i \in \{1, \dots, k-1-m\}$, e podemos concluir que

$$K_{2j} := \sup_{x \in T^{-1}([\xi, \eta])} \frac{|\alpha_{2j} A(x)|}{|x - y_j|} < \infty, \quad j \in J_2.$$

Isto é óbvio se $T(y_j) \neq \xi$ e $T(y_j) \neq \eta$ para todo o j . Assim, para $x \in T^{-1}([\xi, \eta])$,

$$\left| \frac{A(x)}{B(x)} \frac{1}{T'(x)} \right| \leq K_1 \sum_{j \in J_1} \frac{1}{|T(x) - T(b_j)|} + n_2 K_2 + K_3 \sum_{j \in J_3} \frac{1}{|T(x) - T(b_j)|},$$

onde $K_i := \max_{j \in J_i} K_{ij}$ ($i = 1, 2, 3$) e $n_2 = \#J_2$. Mas, o integral (2.18) é

$$\begin{aligned} & \int_{T^{-1}([\xi, \eta])} \left| \frac{A(x)}{B(x)} \frac{1}{T'(x)} \right| \operatorname{sgn} T'(x) d\sigma(T(x)) \leq \\ & \leq K_1 \sum_{j \in J_1} \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \frac{\operatorname{sgn} T'(x)}{|T(x) - T(b_j)|} d\sigma(T(x)) + \\ & \quad + n_2 K_2 \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \operatorname{sgn} T'(x) d\sigma(T(x)) + \\ & \quad + K_3 \sum_{j \in J_3} \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \frac{\operatorname{sgn} T'(x)}{|T(x) - T(b_j)|} d\sigma(T(x)) = \\ & = k K_1 \sum_{j \in J_1} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{|y - T(b_j)|} d\sigma(y) + k n_2 K_2 \mu_0 + \\ & \quad + k K_3 \sum_{j \in J_3} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{|y - T(b_j)|} d\sigma(y) \end{aligned}$$

(fazendo a substituição $y = T(x)$, $x \in E_i$). Isto prova (2.18), atendendo à hipótese (2.15). Concluimos assim que τ , definido por (2.17), é uma função distribuição com $\operatorname{supp}(\tau) \subset T^{-1}([\xi, \eta])$. Além disso, para $z \in \mathbf{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta])$, efectuando a substituição $s = T(x)$ (note-se que AB e T' tem o mesmo sinal em

cada intervalo E_j), obtém-se

$$\begin{aligned} F(z; d\tau) &= \sum_{j=1}^k \int_{E_j} \frac{1}{z-x} \left| \frac{A(x)}{B(x)} \right| \frac{d\sigma(T(x))}{T'(x)} \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{z-T_j^{-1}(s)} \frac{A(T_j^{-1}(s))}{B(T_j^{-1}(s))} \frac{d\sigma(s)}{T'(T_j^{-1}(s))}. \end{aligned}$$

Uma vez que $T(b_j) \notin]\xi, \eta[$ para $j = 1, \dots, m$, se $s \in]\xi, \eta[$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{A(z)}{B(z)} \frac{1}{T(z)-s} &= \sum_{j=1}^k \frac{A(T_j^{-1}(s))}{(z-T_j^{-1}(s))B(T_j^{-1}(s))T'(T_j^{-1}(s))} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{A(b_j)}{B'(b_j)(s-T(b_j))(b_j-z)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $z \in \mathbf{C} \setminus T^{-1}([\xi, \eta])$, deduz-se

$$\begin{aligned} F(z; d\tau) &= \int_{\xi}^{\eta} \frac{A(z)}{B(z)} \frac{1}{T(z)-s} d\sigma(s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \frac{A(b_j)}{B'(b_j)(z-b_j)} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{T(b_j)-s} d\sigma(s) \\ &= F(z). \end{aligned}$$

□

No que vai seguir-se vamos supor que a SPOM $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal no sentido definido-positivo. Claramente, nas condições do teorema 2.1 também $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal no sentido definido-positivo. Designem σ_p e σ_q as correspondente funções de distribuição. De acordo com o teorema de Markov (cf. Teorema 1.29) podemos escrever

$$\begin{aligned} \mu_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_{(n+1)k-2}^{(1)}(z)}{P_{(n+1)k-1}^{(1)}(z)} &= F(z, d\sigma_p) := \int_{\mathbf{R}} \frac{d\sigma_p(t)}{z-t}, \\ z &\in \mathbf{C} \setminus (T^{-1}([\xi, \eta]) \cup \{z_1, \dots, z_{k-1}\}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$\nu_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_{n-1}^{(1)}(T(z))}{Q_n(T(z))} = F(T(z), d\sigma_q) := \int_{\mathbf{R}} \frac{d\sigma_q(t)}{T(z)-t}, \quad T(z) \in \mathbf{C} \setminus]\xi, \eta], \quad (2.20)$$

onde μ_0 e ν_0 são os momentos de ordem zero de σ_p e σ_q , resp.—que, sem perda de generalidade, podemos supor serem iguais a 1. Estamos em condições de estabelecer o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.5. *Nas condições do teorema 2.1, suponha-se que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal no sentido definido-positivo, e designe σ_p a correspondente função de distribuição. Então, $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ é também ortogonal no sentido definido-positivo, a respeito de alguma função de distribuição σ_q . Suponha-se ainda que*

(i) θ_{k-1} tem o mesmo sinal de T' em cada ponto de $T^{-1}([\xi, \eta])$, onde $[\xi, \eta]$ designa o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da sucessão $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$;

(ii) para todo o $j = 1, \dots, k-1$,

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{d\sigma_q(y)}{|y - T(z_j)|} < +\infty,$$

onde $z_1 < \dots < z_{k-1}$ denotam os zeros de θ_{k-1} ;

(iii) para todo o $j = 1, \dots, k-1$,

$$M_j := \frac{\pi_{k-2}(z_j)}{\theta'_{k-1}(z_j)} \geq 0,$$

onde

$$\pi_{k-2}(z) := \mu_0 \Delta_0(2, k-2; z) + s_0 L_{k-2}(z)$$

e L_{k-2} é o polinómio interpolador de Lagrange que coincide com $F(T(z); d\sigma_q)$ nos zeros de θ_{k-1} , isto é,

$$L_{k-2}(z) = \sum_{j=1}^{k-1} l_j \frac{\theta_{k-1}(z)}{z - z_j}, \quad l_j := \frac{F(T(z_j); d\sigma_q)}{\theta'_{k-1}(z_j)}.$$

Nestas condições, para todo o $z \in \mathbf{C} \setminus (T^{-1}([\xi, \eta]) \cup \{z_1, \dots, z_{k-1}\})$ verifica-se

$$F(z; d\sigma_p) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{M_j}{z - z_j} + s_0 \frac{F(T(z); d\sigma_q) - L_{k-2}(z)}{\theta_{k-1}(z)}. \quad (2.21)$$

Além disso,

$$d\sigma_p(x) = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \delta_{z_j}(x) + \frac{s_0 \chi_E(x)}{|\theta_{k-1}(x)|} \frac{d\sigma_q(T(x))}{T'(x)}, \quad (2.22)$$

onde $\delta_{z_j}(x)$ é a medida de Dirac no ponto z_j e $E = T^{-1}([\xi, \eta]) = \bigcup_{j=1}^k E_j$.

Demonstração. Como

$$F(z, d\sigma_p) = \mu_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_{(n+1)k-2}^{(1)}(z)}{P_{(n+1)k-1}^{(1)}(z)},$$

então, pelos Teoremas 2.1 e 2.2, para $z \in \mathbb{C} \setminus (T^{-1}([\xi, \eta]) \cup \{z_1, \dots, z_{k-1}\})$ podemos escrever

$$\begin{aligned} F(z, d\sigma_p) &= \\ &= \mu_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_0(2, k-2; z) Q_n(T(z)) + s_0 Q_{n-1}^{(1)}(T(z))}{\theta_{k-1}(z) Q_n(T(z))} \\ &= \frac{\mu_0 \Delta_0(2, k-2; z)}{\theta_{k-1}(z)} + \frac{s_0}{\theta_{k-1}(z)} \left(\mu_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_{n-1}^{(1)}(T(z))}{Q_n(T(z))} \right) \\ &= \frac{\mu_0 \Delta_0(2, k-2; z) + s_0 F(T(z); d\sigma_q)}{\theta_{k-1}(z)} \\ &= \frac{\mu_0 \Delta_0(2, k-2; z) + s_0 L_{k-2}(z)}{\theta_{k-1}(z)} + s_0 \frac{F(T(z); d\sigma_q) - L_{k-2}(z)}{\theta_{k-1}(z)} \\ &= \frac{\pi_{k-2}(z)}{\theta_{k-1}(z)} + s_0 \frac{F(T(z); d\sigma_q) - L_{k-2}(z)}{\theta_{k-1}(z)} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{M_j}{z - z_j} + s_0 \frac{F(T(z); d\sigma_q) - L_{k-2}(z)}{\theta_{k-1}(z)}. \end{aligned}$$

Isto prova (2.21). A relação (2.22) entre as medidas de ortogonalidade é agora consequência de (2.21) e do lema anterior. \square

2.4 Exemplo para $k = 3$. Caso periódico

Nesta secção aplicamos os resultados da secção precedente ao estudo de uma SPOM $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ caracterizada pelo facto de as correspondentes sucessões dos

coeficientes de recorrência, $\{a_n^{(j)}\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ ($1 \leq j \leq k$), serem periódicas de período k . Referimos que as propriedades algébricas de uma tal sucessão foram estudadas em [15], como aplicação do Teorema 2.1, tendo sido mostrado que os polinômios P_n se exprimem através de uma transformação polinomial (do tipo indicado no Teorema 2.1) sobre os polinômios de Chebychev de segunda espécie—i.e., Q_n no Teorema 2.1 é dado por uma transformação afim na variável do polinômio U_n .

Aqui, estamos interessados no estudo do caso definido-positivo. Por questões de simplicidade, limitamo-nos a analisar o caso em que o período é $k = 3$. Neste caso $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é caracterizada por

$$(x - b_n^{(j)})P_{3n+j}(x) = P_{3n+j+1}(x) + a_n^{(j)}P_{3n+j-1}(x), \quad (2.23)$$

$$0 \leq j \leq 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

com condições iniciais

$$P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1 \quad (2.24)$$

e tal que, para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{(0)} &= a_0, & a_n^{(1)} &= a_1, & a_n^{(2)} &= a_2, \\ b_n^{(0)} &= b_0, & b_n^{(1)} &= b_1, & b_n^{(2)} &= b_2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ são números reais com $a_0, a_1, a_2 > 0$.

Nestas condições, é imediato constatar que as hipóteses (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.1 são satisfeitas, tendo-se

$$\begin{aligned} r_n(x) &\equiv r_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \theta_2(x) &= (x - b_0)(x - b_1) - a_1, \\ T(x) &= (x - b_0)(x - b_1)(x - b_2) - (a_0 + a_1 + a_2)(x - b_2) \\ &\quad + a_2(b_0 - b_2) + a_0(b_1 - b_2). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Adiante será útil considerar T reescrito sob a forma

$$T(x) = (\theta_2(x) - a_0 - a_2)(x - b_2) + a_2(b_0 - b_2) + a_0(b_1 - b_2). \quad (2.27)$$

Segue-se pelo Teorema 2.1 que

$$\begin{aligned} P_{3n+2}(x) &= \theta_2(x)Q_n(T(x)), \\ P_{3n+1}(x) &= (x - b_0)Q_n(T(x)) + a_0a_1Q_{n-1}(T(x)), \\ P_{3n}(x) &= Q_n(T(x)) + a_0(x - b_1)Q_{n-1}(T(x)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ é a SPOM caracterizada pela relação de recorrência

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - s_1Q_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

com condições iniciais $Q_{-1}(x) = 0$ e $Q_0(x) = 1$, e

$$s_1 := a_0a_1a_2.$$

(Na notação do Teorema 2.1, é $s_0 = a_1a_2$ e $s_n = s_1 = a_0a_1a_2$ para $n \geq 1$.) Isto permite concluir que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ se obtém a partir da sucessão $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ dos polinómios de Chebychev de segunda espécie através da transformação polinomial definida por T e θ_2 , uma vez que, como decorre imediatamente de (2.29) e do Teorema 1.38, é

$$Q_n(x) = s_1^{n/2}U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{s_1}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.30)$$

O mesmo teorema permite ainda concluir que a função de Stieltjes e a medida de ortogonalidade correspondentes a $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ são dadas explicitamente por

$$F(z; d\sigma_q) = \frac{1}{2\sqrt{s_1}}F_U\left(\frac{z}{2\sqrt{s_1}}\right), \quad z \in \mathbf{C} \setminus [-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}], \quad (2.31)$$

$$d\sigma_q(x) = \frac{1}{2\pi s_1} \sqrt{4s_1 - x^2} dx, \quad \text{supp}(\sigma_q) = [-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}]. \quad (2.32)$$

O nosso objectivo é determinar explicitamente a medida de ortogonalidade $d\sigma_p$ da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Para isso, vamos usar o Teorema 2.5, começando por estabelecer alguns lemas preliminares. Tendo em conta que

$$\theta_2(x) = x^2 - (b_0 + b_1)x + b_0b_1 - a_1,$$

segue-se que os zeros de θ_2 são

$$z_1 = \frac{b_0 + b_1 - \Delta}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{b_0 + b_1 + \Delta}{2},$$

onde

$$\Delta := \sqrt{(b_0 - b_1)^2 + 4a_1}.$$

Observe-se que $z_1 < z_2$. É também útil reter a relação

$$\Delta^2 - 4a_1 = (b_0 - b_1)^2, \quad (2.33)$$

bem como as igualdades

$$\begin{aligned} b_0 - z_1 &= \frac{b_0 - b_1 + \Delta}{2}, & b_1 - z_1 &= \frac{b_1 - b_0 + \Delta}{2}, \\ b_0 - z_2 &= \frac{b_0 - b_1 - \Delta}{2}, & b_1 - z_2 &= \frac{b_1 - b_0 - \Delta}{2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

De $(x - z_1)(x - z_2) = \theta_2(x) = (x - b_0)(x - b_1) - a_1$, obtém-se ainda

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 &= z_1 + z_2 \\ \theta_2(b_0) &= -a_1 = \theta_2(b_1). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Lema 2.6. *São válidas as seguintes igualdades:*

$$T^2(z_1) - 4s_1 = \frac{1}{4} [(a_2 - a_0) \Delta + (b_0 - b_1) (a_0 + a_2)]^2 \quad (2.36)$$

$$T^2(z_2) - 4s_1 = \frac{1}{4} [(a_2 - a_0) \Delta - (b_0 - b_1) (a_0 + a_2)]^2. \quad (2.37)$$

Demonstração. Tendo em conta (2.27), tem-se

$$T(z_1) = a_2 (b_0 - z_1) + a_0 (b_1 - z_1), \quad (2.38)$$

logo, como, atendendo a (2.35),

$$(b_0 - z_1) (b_1 - z_1) = - (b_0 - z_1) (b_0 - z_2) = -\theta_2(b_0) = a_1,$$

obtém-se

$$\begin{aligned} T^2(z_1) &= a_2^2 (b_0 - z_1)^2 + 2a_0 a_2 (b_0 - z_1) (b_1 - z_1) + a_0^2 (b_1 - z_1)^2 \\ &= a_2^2 (b_0 - z_1)^2 + 2s_1 + a_0^2 (b_1 - z_1)^2, \end{aligned}$$

donde

$$T^2(z_1) - 4s_1 = a_2^2 (b_0 - z_1)^2 - 2s_1 + a_0^2 (b_1 - z_1)^2.$$

Assim, usando (2.34) e (2.33), deduz-se

$$\begin{aligned}
& 4 [T^2(z_1) - 4s_1] \\
&= 4 \left[a_2^2 \left(\frac{b_0 - b_1 + \Delta}{2} \right)^2 - 2s_1 + a_0^2 \left(\frac{b_1 - b_0 + \Delta}{2} \right)^2 \right] \\
&= a_2^2 [(b_0 - b_1)^2 + 2(b_0 - b_1)\Delta + \Delta^2] - 8s_1 \\
&\quad + a_0^2 [(b_0 - b_1)^2 + 2(b_1 - b_0)\Delta + \Delta^2] \\
&= a_2^2 [2\Delta^2 - 4a_1 + 2(b_0 - b_1)\Delta] \\
&\quad + a_0^2 [2\Delta^2 - 4a_1 + 2(b_1 - b_0)\Delta] - 8s_1 \\
&= 2(a_2^2 + a_0^2)\Delta^2 - 4a_1(a_2^2 + a_0^2) \\
&\quad + 2\Delta(a_2^2 - a_0^2)(b_0 - b_1) - 8s_1 \\
&= [(a_2 - a_0)^2 + (a_0 + a_2)^2]\Delta^2 - 4a_1(a_0 + a_2)^2 \\
&\quad + 2\Delta(b_0 - b_1)(a_2^2 - a_0^2) \\
&= (a_2 - a_0)^2\Delta^2 + (b_0 - b_1)^2(a_2 + a_0)^2 \\
&\quad + 2\Delta(b_0 - b_1)(a_0 + a_2)(a_2 - a_0) \\
&= [(a_2 - a_0)\Delta + (b_0 - b_1)(a_0 + a_2)]^2,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

o que prova (2.36). A prova de (2.37) faz-se de modo análogo. \square

Lema 2.7. *São válidas as seguintes relações:*

- (i) $T(z_1) > 0$ e $T(z_2) < 0$;
- (ii) $\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} \leq -1$ e $\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \geq 1$;
- (iii) $F_U \left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{s_1}} \min \{-a_0(b_0 - b_1 - \Delta), a_2(b_0 - b_1 + \Delta)\}$ e
 $F_U \left(\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{s_1}} \max \{-a_0(b_0 - b_1 + \Delta), a_2(b_0 - b_1 - \Delta)\}$,

onde F_U designa a função de Stieltjes associada aos polinómios de Chebychev de segunda espécie.

Demonstração.

(i) Tendo em conta (2.34) e a definição de Δ , tem-se $b_0 - z_1 > 0$ e $b_1 - z_1 > 0$, e como $a_0 > 0$ e $a_2 > 0$, decorre imediatamente de (2.38) que $T(z_1) > 0$. Analogamente se mostra que $T(z_2) < 0$.

(ii) Por (2.36) temos

$$0 \leq T^2(z_1) - 4s_1 = 4s_1 \left[\left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right)^2 - 1 \right],$$

o que implica $\left| \frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right| \geq 1$, donde, conjugado com (i), $\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \geq 1$. Do mesmo modo se mostra que $\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} \leq -1$.

(iii) Recordemos que, por (1.75) no Capítulo 1,

$$F_U(z) = 2 \left(z - (z^2 - 1)^{1/2} \right), \quad z \in \mathbf{C} \setminus [-1, 1],$$

onde a raiz complexa $(z^2 - 1)^{1/2}$ satisfaz as propriedades (1.65) do Capítulo 1. De acordo com estas propriedades e atendendo a (ii), tem-se

$$\left[\left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = \sqrt{\left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right)^2 - 1}$$

e

$$\left[\left(\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = -\sqrt{\left(\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} \right)^2 - 1},$$

onde as raízes quadradas nos segundos membros são raízes quadradas (reais) usuais. Consequentemente,

$$F_U \left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right) = 2 \left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} - \sqrt{\left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right)^2 - 1} \right)$$

e

$$F_U \left(\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} \right) = 2 \left(\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} + \sqrt{\left(\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}} \right)^2 - 1} \right).$$

Assim, usando (2.38) e (2.36), podemos escrever

$$\begin{aligned}
F_U \left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{s_1}} [a_2 (b_0 - z_1) + a_0 (b_1 - z_1) \\
&\quad - \frac{1}{2} |(a_2 - a_0) \Delta + (b_0 - b_1) (a_0 + a_2)|] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{s_1}} [(a_2 - a_0) (b_0 - b_1) + \Delta (a_2 + a_0) \\
&\quad - |(a_2 - a_0) \Delta + (b_0 - b_1) (a_0 + a_2)|] \\
&= \frac{1}{\sqrt{s_1}} \left[\frac{a_2 (b_0 - b_1 + \Delta) - a_0 (b_0 - b_1 - \Delta)}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{|a_2 (b_0 - b_1 + \Delta) + a_0 (b_0 - b_1 - \Delta)|}{\sqrt{s_1}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{s_1}} \min \{ -a_0 (b_0 - b_1 - \Delta), a_2 (b_0 - b_1 + \Delta) \},
\end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada pela primeira das fórmulas

$$\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2} \quad \text{e} \quad \max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}. \quad (2.40)$$

Portanto, está demonstrada a primeira igualdade indicada em (iii) do enunciado do Lema. A prova da segunda igualdade é análoga, e nela intervem a segunda fórmula de (2.40). \square

Para prosseguir, vamos calcular, para caso o concreto do exemplo que estamos a analisar, as “massas” M_1 e M_2 definidas no Teorema 2.5.

Lema 2.8. *As “massas” M_1 e M_2 são dadas explicitamente por*

$$M_1 = \frac{z_1 - b_1}{z_1 - z_2} \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{a_2 (b_0 - z_1)}{a_0 (b_1 - z_1)} \right\} \right], \quad (2.41)$$

$$M_2 = \frac{z_2 - b_1}{z_2 - z_1} \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{a_2 (b_0 - z_2)}{a_0 (b_1 - z_2)} \right\} \right]. \quad (2.42)$$

Em consequência, deduz-se que $M_1 \geq 0$ e $M_2 \geq 0$.

Demonstração. De acordo com as definições, tem-se

$$M_1 := \frac{\pi_1(z_1)}{\theta'_2(z_1)}, \quad M_2 := \frac{\pi_1(z_2)}{\theta'_2(z_2)}$$

onde

$$\pi_1(z) := z - b_1 + a_1 a_2 L_1(z) ,$$

sendo

$$\begin{aligned} L_1(z) &:= l_1(z - z_2) + l_2(z - z_1) , \\ l_1 &:= \frac{F(T(z_1), d\sigma_q)}{\theta'_2(z_1)} = \frac{F_U\left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}}\right)}{2\sqrt{s_1}(z_1 - z_2)} , \\ l_2 &:= \frac{F(T(z_2), d\sigma_q)}{\theta'_2(z_2)} = \frac{F_U\left(\frac{T(z_2)}{2\sqrt{s_1}}\right)}{2\sqrt{s_1}(z_2 - z_1)} . \end{aligned}$$

Assim, e usando o Lema 2.7, tem-se

$$\begin{aligned} L_1(z_1) &= l_1(z_1 - z_2) = \frac{1}{2\sqrt{s_1}} F_U\left(\frac{T(z_1)}{2\sqrt{s_1}}\right) \\ &= \frac{1}{2s_1} \min\{-a_0(b_0 - b_1 - \Delta), a_2(b_0 - b_1 + \Delta)\} \\ &= \frac{-a_0(b_0 - b_1 - \Delta)}{2s_1} \min\left\{1, -\frac{a_2(b_0 - b_1 + \Delta)}{a_0(b_0 - b_1 - \Delta)}\right\} \\ &= -\frac{z_1 - b_1}{a_1 a_2} \min\left\{1, \frac{a_2(b_0 - z_1)}{a_0(b_1 - z_1)}\right\} , \end{aligned}$$

sendo a última igualdade facilmente justificada pelas relações (2.34) e (2.35), bem como por ser $s_1 = a_0 a_1 a_2$. (Na terceira igualdade usou-se também o facto de ser $-a_0(b_0 - b_1 - \Delta) > 0$.) Consequentemente,

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{z_1 - b_1 + a_1 a_2 L_1(z_1)}{z_1 - z_2} = \frac{z_1 - b_1}{z_1 - z_2} \left[1 + \frac{a_1 a_2}{z_1 - b_1} L_1(z_1)\right] \\ &= \frac{z_1 - b_1}{z_1 - z_2} \left[1 - \min\left\{1, \frac{a_2(b_0 - z_1)}{a_0(b_1 - z_1)}\right\}\right] , \end{aligned}$$

o que prova (2.41). Do mesmo modo se demonstra (2.42). \square

Estamos agora em condições de determinar a medida de ortogonalidade, $d\sigma_p$, da SPOM $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ caracterizada por (2.23)–(2.25). O teorema que a seguir apresentamos foi estabelecido, numa versão ligeiramente distinta, por R. Álvarez-Nodarse, J. Petronilho e N. Rodríguez-Quintero em [2].

Teorema 2.9. *Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ a SPOM caracterizada por (2.23)-(2.25), com b_0, b_1, b_2 reais e $a_0, a_1, a_2 > 0$. Designem T e θ_2 os polinômios de graus 3 e 2 (resp.) definidos por (2.26). Então, a medida de ortogonalidade da sucessão $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é dada por*

$$\begin{aligned} d\sigma_p(x) &= \frac{z_1 - b_1}{z_1 - z_2} \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{a_2 b_0 - z_1}{a_0 b_1 - z_1} \right\} \right] \delta_{z_1}(x) \\ &\quad + \frac{z_2 - b_1}{z_2 - z_1} \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{a_2 b_0 - z_2}{a_0 b_1 - z_2} \right\} \right] \delta_{z_2}(x) \\ &\quad + \frac{\sqrt{4s_1 - T^2(x)}}{2\pi a_0 |(x - z_1)(x - z_2)|} \chi_{E(x)} dx, \end{aligned}$$

onde z_1 e z_2 são os zeros de θ_2 e $E = T^{-1}([-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}])$, conjunto que consiste numa reunião de 3 intervalos.

Demonstração. Começamos por mostrar que as hipóteses (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.5 são verificadas. De acordo com (2.32), o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da SPOM $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ é

$$[\xi, \eta] = [-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}] = \text{supp}(\sigma_q).$$

Vamos provar que a hipótese (i) se verifica, i.e., que θ_2 e T' têm o mesmo sinal em cada ponto do conjunto $T^{-1}([-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}])$. Para isso, observemos primeiramente que T tem 3 zeros reais e distintos, digamos, $x_1 < x_2 < x_3$, facto que é consequência imediata de (i) no Lema 2.7 e por T ser mónico e de grau 3 (logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} T(x) = -\infty$), tendo-se que $x_1 < z_1 < x_2 < z_2 < x_3$. Assim, atendendo a (ii) no Lema 2.7, que podemos escrever

$$T^{-1}([-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}]) = E_1 \cup E_2 \cup E_3,$$

onde E_1, E_2 e E_3 são intervalos de números reais tais que cada dois deles têm no máximo um ponto em comum (pelo que podemos supor E_1, E_2 e E_3 dispostos da esquerda para a direita) e tais que $T(E_i) = [-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}]$ para $i = 1, 2, 3$. É também claro que T' tem dois zeros reais e distintos, digamos, y_1 e y_2 , com $y_1 < y_2$, sendo y_1 um maximizante para T e y_2 um minimizante, verificando-se também $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3$, $T(y_1) > 0$ e $T(y_2) < 0$. Isto permite concluir,

usando novamente (ii) no Lema 2.7, que $T(y_1) \geq 2\sqrt{s_1}$ e $T(y_2) \leq -2\sqrt{s_1}$. Segue-se do exposto que $x_i \in E_i$ para $i = 1, 2, 3$, e que y_1 e z_1 estão situados entre E_1 e E_2 , e y_2 e z_2 entre E_2 e E_3 . Decorre que θ_2 e T' tem o mesmo sinal em $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, i.e., verifica-se a hipótese (i). As figuras seguintes ilustram geometricamente as considerações precedentes para duas situações possíveis.

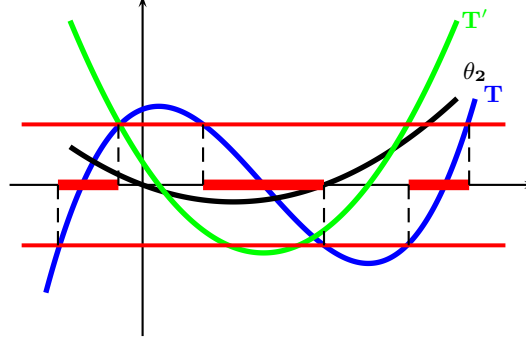


Figura 2.1: Caso $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $a_0 = 4$, $a_1 = a_2 = 2$.

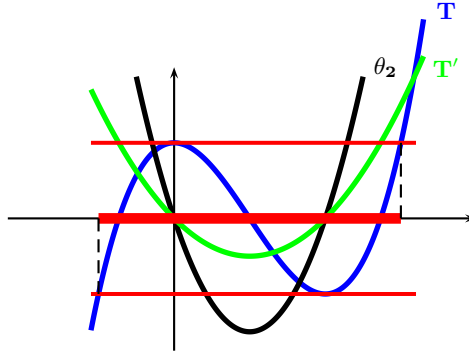


Figura 2.2: Caso $b_0 = b_1 = b_2 = a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

Para justificar que a hipótese (ii) também é satisfeita, temos que mostrar que

$$\int_{-2\sqrt{s_1}}^{2\sqrt{s_1}} \frac{d\sigma_q(y)}{|y - T(z_i)|} < +\infty, \quad i = 1, 2. \quad (2.43)$$

Como $|T(z_i)| \geq 2\sqrt{s_1}$, é claro que (2.43) se verifica se $|T(z_i)| > 2\sqrt{s_1}$, pelo que resta mostrar que também se verifica se $T(z_i) = \pm 2\sqrt{s_1}$. No caso $T(z_i) = 2\sqrt{s_1}$,

de acordo com (2.32) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{s_1}}^{2\sqrt{s_1}} \frac{d\sigma(y)}{|y - 2\sqrt{s_1}|} &= \frac{1}{2\pi s_1} \int_{-2\sqrt{s_1}}^{2\sqrt{s_1}} \frac{\sqrt{4s_1 - y^2}}{2\sqrt{s_1} - y} dy \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{s_1}} \int_{-1}^1 (1-t)^{-1/2}(1+t)^{1/2} dt \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{s_1}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{s_1}} < +\infty. \end{aligned}$$

($B(\cdot, \cdot)$ designa a função beta.) A prova no caso $T(z_i) = -2\sqrt{s_1}$ é análoga. O Lema 2.8 assegura que a hipótese (iii) também se verifica.

Finalmente, podemos aplicar o Teorema 2.5, obtendo-se

$$d\sigma_p(x) = M_1\delta_{z_1}(x) + M_2\delta_{z_2}(x) + \frac{a_1 a_2 \chi_E(x)}{|(x - z_1)(x - z_2)|} \frac{d\sigma_q(T(x))}{T'(x)},$$

com M_1 e M_2 dadas pelo Lema 2.8, o que conclui a prova, atendendo a (2.32) e a que $s_1 = a_0 a_1 a_2$. \square

Observação 2.10. Designando $\Sigma_p = T^{-1}([-2\sqrt{s_1}, 2\sqrt{s_1}])$ (que é uma reunião de três intervalos), decorre do teorema precedente que a medida $d\sigma_p$ tem suporte contido em $\Sigma_p \cup \{z_1, z_2\}$. Mais precisamente,

$$\text{supp}(\sigma_p) = \begin{cases} \Sigma_p & \text{se } M_1 = 0, M_2 = 0; \\ \Sigma_p \cup \{z_2\} & \text{se } M_1 = 0, M_2 > 0; \\ \Sigma_p \cup \{z_1\} & \text{se } M_1 > 0, M_2 = 0; \\ \Sigma_p \cup \{z_1, z_2\} & \text{se } M_1 > 0, M_2 > 0. \end{cases}$$

Capítulo 3

Tópicos da teoria espectral

O objectivo neste capítulo é introduzir conceitos e resultados da teoria espectral de operadores que são necessários para o estudo dos operadores de Jacobi a introduzir no Capítulo 4. Assim, introduzem-se os aspectos básicos da teoria espectral, iniciando com uma breve revisão de elementos de Análise Funcional, com o objectivo de estabelecer o teorema espectral para operadores auto-adjuntos limitados. No final do capítulo dá-se particular atenção ao estudo do chamado espectro essencial (de um operador auto-adjunto limitado), estabelecendo-se, em particular, e com base no teorema espectral, um critério (Critério de Weyl) do qual se deduzem dois importantes teoremas para a análise espectral de operadores de Jacobi: o Teorema de Weyl e um teorema de transformação do espectro essencial de um operador auto-adjunto limitado. As referências bibliográficas utilizadas foram as monografias [12], [19], [20] e [3].

3.1 Preliminares de Análise Funcional

Nesta secção iremos recordar alguns dos conceitos já adquiridos a nível da Licenciatura. Por esse motivo limitar-nos-emos a enunciar os resultados mais importantes para o desenvolvimento das secções seguintes. As demonstrações podem ser vistas, e.g., em [12] e [20]. Naturalmente, esta secção poderia ser omitida. A sua inclusão no texto, porém, facilita a escrita (e poderá, eventualmente, facilitar a leitura) das secções seguintes, sobretudo por tornar mais cómodo o

processo de citação de certos resultados conhecidos que por vezes será necessário invocar (sendo, por conseguinte, desnecessário remeter para texto exterior).

Definição 3.1. *Sejam $X = (X, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (Y, \|\cdot\|_Y)$ dois espaços normados, $\mathcal{D}(T) \subset X$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , e $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ um operador linear. A $\mathcal{D}(T)$ chamamos domínio de T ; a $\mathcal{R}(T) \equiv T(X) := \{Tx \mid x \in \mathcal{D}\}$ o contradomínio de T ; e a $\mathcal{N}(T) := \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}$ o espaço nulo (ou núcleo) de T . Nestas condições, dizemos que T é limitado se*

$$\exists c > 0 : \forall x \in \mathcal{D}(T), \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

Designa-se $\mathcal{L}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ é linear e limitado}\}$, $\mathcal{L}(X) \equiv \mathcal{L}(X, X)$ e $X' \equiv \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

Teorema 3.2. $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço normado, com norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y$$

Observação 3.3. *Normalmente, escreveremos apenas $\|\cdot\|$ para qualquer norma, sem a indicação explícita do espaço onde a norma está definida, sempre que o contexto seja claro. Assim, as igualdades precedentes escrevem-se*

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Teorema 3.4. *Se X é um espaço normado de dimensão finita, então todo o operador linear em X é limitado.*

Definição 3.5. *Seja X um espaço normado e $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão em X .*

(i) *Diz-se que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ é limitada em X se*

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}_0, \|x_n\| \leq M.$$

(ii) *Diz-se que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge (fortemente) para $x \in X$, e escreve-se $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow +\infty$), se*

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

- (iii) Diz-se que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge fracamente para $x \in X$, e escreve-se $x_n \rightharpoonup x$ ($n \rightarrow +\infty$) se

$$\forall f \in X', \quad f(x_n) \rightarrow f(x).$$

É fácil de justificar que, nas condições da definição precedente, se $x_n \rightarrow x$ então também $x_n \rightharpoonup x$, mas o recíproco não é verdade em geral. No entanto, em espaços de dimensão finita é válida a proposição seguinte.

Teorema 3.6. *Se X é um espaço normado de dimensão finita e $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sucessão em X , então a convergência fraca de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ para x implica a convergência forte de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ para x .*

Teorema 3.7. *Sejam X um espaço normado, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão em X e $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão limitada em \mathbb{K} . Nestas condições,*

(i) *Se $x_n \rightarrow 0$ então também $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.*

(ii) *Se $x_n \rightharpoonup 0$ então também $\alpha_n x_n \rightharpoonup 0$.*

Definição 3.8. *Sejam X e Y dois espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador. T diz-se compacto se de toda a sucessão limitada $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em X for possível extrair uma subsucessão $\{x_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ tal que a sucessão $\{Tx_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ é convergente em Y . O conjunto dos operadores compactos de X em Y será designado por $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Teorema 3.9. *Sejam X e Y espaços normados sobre o mesmo corpo.*

(i) *$\mathcal{K}(X, Y)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

(ii) *Se Y é de Banach então $\mathcal{K}(X, Y)$ é fechado em $\mathcal{L}(X, Y)$.*

(iii) *Se Y é de Banach e $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão de operadores lineares compactos em X que converge uniformemente para T em $\mathcal{L}(X, Y)$, então $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

Teorema 3.10. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Nestas condições,*

(i) *se T é limitado e $\dim T(X) < \infty$, então T é compacto.*

(ii) *se $\dim X < \infty$, então T é compacto.*

Teorema 3.11. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador compacto e $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão em X . Se $x_n \rightarrow x$ em X (fracamente) então $Tx_n \rightarrow Tx$ em Y (fortemente).*

Definição 3.12. *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear. Chama-se gráfico de T ao conjunto*

$$\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Diz-se que T é fechado se o seu gráfico for um conjunto fechado em $X \times Y$.

Teorema 3.13 (Teorema do gráfico fechado). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear fechado. Suponha-se ainda que $\mathcal{D}(T)$ é fechado em X . Então T é um operador limitado.*

Teorema 3.14. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear. Então T é fechado se e só se para toda a sucessão $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em X se verifica a seguinte propriedade:*

$$x_n \rightarrow x \text{ (em } X) \text{ e } Tx_n \rightarrow y \text{ (em } Y) \Rightarrow x \in \mathcal{D}(T) \text{ e } y = Tx.$$

Teorema 3.15. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear limitado. Então:*

- (i) *Se $\mathcal{D}(T)$ é um subconjunto fechado de X então T é fechado.*
- (ii) *Se T é fechado e Y completo, então $\mathcal{D}(T)$ é subconjunto fechado de X .*

Teorema 3.16 (Teorema da aplicação aberta). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, bijectivo. Então $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

No resto desta secção vamos situar-nos no contexto dos espaços de Hilbert. Recordemos que um espaço de Hilbert, H , é um espaço pré-hilbertiano (i.e., munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$) completo para a norma induzida pelo produto interno,

$$x \in H \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Definição 3.17. *Sejam H_1 e H_2 dois espaços de Hilbert e $T : H_1 \rightarrow H_2$ um operador linear limitado. Chama-se adjunto de T ao operador $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ caracterizado por*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall (x, y) \in H_1 \times H_2.$$

Se $T^ = T$ diz-se que T é auto-adjunto.*

Teorema 3.18. *Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Então*

- (i) *se T é um operador auto-adjunto então $\langle Tx, x \rangle$ é real para todo o $x \in H$;*
- (ii) *se H é complexo e $\langle Tx, x \rangle$ é real para todo o $x \in H$ então T é um operador auto-adjunto.*

De acordo com o teorema precedente, é possível introduzir uma relação de ordem no conjunto dos operadores auto-adjuntos limitados num espaço de Hilbert, pondo:

$$T_1 \geq T_2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle T_1 x, x \rangle \geq \langle T_2 x, x \rangle, \quad \forall x \in H .$$

Definição 3.19. *Um operador linear $T : H \rightarrow H$ diz-se positivo se satisfaz*

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H .$$

Teorema 3.20. *Um operador positivo num espaço de Hilbert complexo é auto-adjunto.*

Teorema 3.21. *Sejam S e T dois operadores lineares auto-adjuntos limitados num espaço de Hilbert H . Se S e T são positivos e comutam, então ST também é positivo.*

Teorema 3.22. *Seja $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão de operadores auto-adjuntos limitados num espaço de Hilbert H tal que*

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq \dots \leq K ,$$

onde K é um operador auto-adjunto limitado em H . Suponha-se ainda que cada T_j comuta com K e com todo o T_m , para todo o j e todo o m . Então

$$T_n x \rightarrow Tx, \quad \forall x \in H$$

onde T é um operador linear limitado e auto-adjunto que satisfaz $T \leq K$.

Dado um subconjunto Y de um espaço de Hilbert H , designamos por Y^\perp o complementar ortogonal de Y ,

$$Y^\perp := \{x \in H \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in Y\} .$$

Teorema 3.23 (Teorema da projecção ortogonal). *Seja H um espaço de Hilbert e Y um subespaço fechado de H . Então*

$$H = Y \oplus Y^\perp ,$$

i.e., todo o elemento $x \in H$ admite uma decomposição única da forma $x = y + z$, com $y \in Y$ e $z \in Y^\perp$.

Dado um subespaço fechado Y de um espaço de Hilbert H , o teorema precedente permite introduzir um operador, chamado operador projecção (ortogonal) de H sobre Y , definido por:

$$\begin{aligned} P & : H = Y \oplus Y^\perp & \rightarrow & Y \\ x = y + z & & \mapsto & Px := y . \end{aligned}$$

Teorema 3.24. *O operador projecção de H sobre o subespaço (fechado) Y satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) P é um operador linear limitado em H , com $\|P\| \leq 1$;
- (ii) P é sobrejectivo ;
- (iii) $P(Y) = Y$ e $P(Y^\perp) = \{0\}$;
- (iv) $P|_Y$ é o operador identidade em Y ;
- (v) $\mathcal{N}(P) = Y^\perp$.

Teorema 3.25. *Sejam P_1 e P_2 projecções definidas num espaço de Hilbert H , sobre os subespaços $Y_1 = P_1(H)$ e $Y_2 = P_2(H)$, respectivamente. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$;
- (ii) $Y_1 \subset Y_2$;
- (iii) $\mathcal{N}(P_1) \supset \mathcal{N}(P_2)$;
- (iv) $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$, $\forall x \in H$;
- (v) $P_1 \leq P_2$.

Teorema 3.26. *Sejam P_1 e P_2 projecções definidas num espaço de Hilbert H , sobre os subespaços $Y_1 = P_1(H)$ e $Y_2 = P_2(H)$, respectivamente. Então*

- (i) *A diferença $P = P_1 - P_2$ é uma projecção em H se e só se $Y_1 \subset Y_2$.*
- (ii) *A soma $P = P_1 + P_2$ é uma projecção em H se e só se Y_1 e Y_2 são ortogonais.*

Teorema 3.27. *Para uma projecção P num espaço de Hilbert H , tem-se*

$$\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2, \quad x \in H.$$

Em consequência, tem-se $P \geq 0$, $\|P\| \leq 1$ e $\|P\| = 1$ se $P(H) \neq \{0\}$

A proposição seguinte caracteriza o operador projecção.

Teorema 3.28. *Se H um espaço de Hilbert, um operador $P \in \mathcal{L}(H)$ é uma projecção se e só se P é auto-adjunto e idempotente, isto é $P^2 = P$.*

Teorema 3.29 (desigualdades de Bessel). *Sejam X um espaço pré-hilbertiano e $S \subset X$ um conjunto ortonormado. Então, para todos os $x, y \in X$ verificam-se as seguintes desigualdades:*

- (i) $\sum_{s \in S} |\langle x, s \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
- (ii) $\sum_{s \in S} |\langle x, s \rangle| |\langle y, s \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$

Teorema 3.30. *Sejam H um espaço de Hilbert, $\{e_1, e_2, \dots\}$ um conjunto ortonormado (numerável) e $x \in H$. Então*

- (i) *a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$ é convergente (na norma de H) se e só se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2$ é convergente em \mathbb{R} ;*
- (ii) *se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$ é convergente, então*
 - (a) $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$ para todo o $n = 1, 2, \dots$;

$$(b) \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 .$$

Teorema 3.31. *Sejam H um espaço de Hilbert e S um subconjunto ortonormado de H . As seguintes condições são equivalentes*

(i) *S é ortonormal maximal (ou ortonormado completo, ou base ortonormada, ou base hilbertiana) em H ;*

$$(ii) x = \sum_{s \in S} \langle x, s \rangle s, \quad \forall x \in H ;$$

$$(iii) \langle x, y \rangle = \sum_{s \in S} \langle x, s \rangle \langle s, y \rangle, \quad \forall x, y \in H \quad (\text{identidade de Parseval}) ;$$

$$(iv) \|x\|^2 = \sum_{s \in S} |\langle x, s \rangle|^2, \quad \forall x \in H .$$

Teorema 3.32. *Seja H um espaço de Hilbert e $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão em H . Então,*

$$x_n \rightarrow x \text{ em } H \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle, \quad \forall z \in H .$$

Do teorema precedente e da desigualdade de Bessel, deduz-se imediatamente o seguinte

Teorema 3.33. *Sendo H um espaço de Hilbert, então toda a sucessão ortonormada em H converge fracamente para zero.*

3.2 Espectro e resolvente de um operador

Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado e $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Associamos a T o operador

$$T_\lambda := T - \lambda I, \tag{3.1}$$

onde λ é um número complexo e I é o operador identidade em $\mathcal{D}(T)$. Se a aplicação T_λ tem inversa, o operador inverso T_λ^{-1} designa-se por (operador) resolvente de T .

Definição 3.34. *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado complexo e $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$.*

(i) *Um valor regular de T é um número complexo λ tal que :*

(P_1) T_λ^{-1} existe ;

(P_2) T_λ^{-1} é limitado ;

(P_3) T_λ^{-1} está definido num subconjunto denso de X .

(ii) *O conjunto resolvente de T , designado por $\rho(T)$, é o conjunto de todos os valores regulares de T . O conjunto complementar $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ é chamado o espectro de T . Cada $\lambda \in \sigma(T)$ diz-se um valor espectral de T .*

(iii) *Partição do espectro:*

(a) *o espectro pontual, $\sigma_p(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que T_λ^{-1} não existe; cada $\lambda \in \sigma_p(T)$ diz-se um valor próprio de T ;*

(b) *o espectro contínuo, $\sigma_c(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que T_λ^{-1} existe e satisfaz (P_3) mas não (P_2);*

(c) *o espectro residual, $\sigma_r(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que T_λ^{-1} existe mas não satisfaz (P_3), i.e., o domínio de T_λ^{-1} não é denso em X .*

Observação 3.35.

(a) *Decorre imediatamente da definição anterior que o espectro de T pode ser escrito como uma reunião disjunta dos três conjuntos descritos em (iii):*

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) .$$

(b) *No caso de X ser de dimensão finita, tem-se $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.*

(c) *$T_\lambda^{-1} : \mathcal{R}(T_\lambda) \rightarrow \mathcal{D}(T_\lambda)$ existe se e só se $T_\lambda x = 0$ implica $x = 0$, i.e., se e só se $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$. Assim, se existir $x \neq 0$ tal que $T_\lambda x \equiv (T - \lambda I)x = 0$, então $\lambda \in \sigma_p(T)$, i.e., λ é um valor próprio de T , e o vector x diz-se um vector próprio de T associado a λ .*

(d) *Pode mostrar-se (cf., e.g., [12, pg. 390]) que se $X \neq \{0\}$ é um espaço de Banach complexo e $T \in \mathcal{L}(X)$, então $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Teorema 3.36. *Seja X um espaço de Banach, $T : X \rightarrow X$ um operador linear e $\lambda \in \rho(T)$. Se T é um operador fechado ou limitado então T_λ^{-1} está definido em todo o X e é limitado.*

Demonstração. Suponha-se, primeiramente, que T é fechado. Então, usando o Teorema 3.14, deduz-se facilmente que T_λ também o é, logo também T_λ^{-1} é fechado. T_λ^{-1} é limitado, por (P_2) . O domínio $\mathcal{D}(T_\lambda^{-1})$ é fechado, pelo Teorema 3.15 e, portanto, $\mathcal{D}(T_\lambda^{-1}) = \overline{\mathcal{D}(T_\lambda^{-1})}$. Mas, por (P_3) sabemos que $\overline{\mathcal{D}(T_\lambda^{-1})} = X$, logo $\mathcal{D}(T_\lambda^{-1}) = X$. Suponha-se agora que T é limitado. Uma vez que $\mathcal{D}(T) = X$ é fechado então, pelo Teorema 3.15, T é fechado, e o resultado pretendido decorre do caso já provado. \square

O lema que a seguir se enuncia é fácil de demonstrar.

Lema 3.37. *Seja X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Então $\mathcal{R}(I - T) = X$, $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $\|(I - T)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|T\|)$ e*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n = I + T + T^2 + \dots .$$

Teorema 3.38. *Seja X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Então $\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$ é fechado.*

Demonstração. Se $\rho(T) = \emptyset$ então é aberto. Suponhamos que $\rho(T) \neq \emptyset$. Seja $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então para todo o $\lambda \in \mathbf{C}$ tem-se $T_\lambda = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = T_{\lambda_0} V$, onde $V = I - (\lambda - \lambda_0)T_{\lambda_0}^{-1}$. Uma vez que $\lambda_0 \in \rho(T)$ e T é limitado, decorre do Teorema 3.36 que $T_{\lambda_0}^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Logo, pelo Lema 3.37, V tem inversa limitada para todo λ tal que $\|(\lambda - \lambda_0)T_{\lambda_0}^{-1}\| < 1$, i.e., para todo λ tal que

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|T_{\lambda_0}^{-1}\|}. \quad (3.2)$$

Consequentemente, $T_\lambda^{-1} = V^{-1}T_{\lambda_0}^{-1}$ para todo o λ que satisfaz (3.2). Assim, o conjunto dos números (complexos) λ que satisfazem (3.2) é uma vizinhança de λ_0 constituída apenas por valores regulares de T . Logo $\rho(T)$ é aberto e, portanto, $\sigma(T) = \mathbf{C} \setminus \rho(T)$ é fechado. \square

Finalmente, enunciamos um resultado (cuja prova é fácil) que será frequentemente utilizado nos desenvolvimentos seguintes.

Teorema 3.39. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \rightarrow H$ um operador linear auto-adjunto limitado. Então:*

- (i) *Todos os valores próprios de T são reais.*
- (ii) *Vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.*

3.3 Teorema de transformação do espectro

Teorema 3.40. *Sejam X um espaço de Banach complexo, $T : X \rightarrow X$ um operador linear limitado e p um polinómio não nulo qualquer. Então*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) .$$

Demonstração. De acordo com a observação 3.35(d), podemos assumir que $\sigma(T) \neq \emptyset$. (Naturalmente, excluimos o caso em que $X = \{0\}$, por ser pouco interessante.) Designe n o grau de p . No caso $n = 0$ o resultado é trivial uma vez que, neste caso, é $p(z) \equiv \alpha_0$, para alguma constante $\alpha_0 \neq 0$, logo

$$p(\sigma(T)) = \{\alpha_0\} = \sigma(p(T)) .$$

Suponhamos então que $n > 0$. Provemos primeiro que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. Naturalmente, podemos escrever

$$p(\lambda) - \mu = \alpha_n(\lambda - \gamma_1) \cdots (\lambda - \gamma_n) \quad (3.3)$$

onde $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ são os zeros da equação algébrica $p(\lambda) = \mu$ e α_n é um número complexo não nulo. Logo, também

$$p(T) - \mu I = \alpha_n(T - \gamma_1 I) \cdots (T - \gamma_n I) . \quad (3.4)$$

Suponha-se que $\gamma_i \in \rho(T)$ para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$. Então todos os operadores $T_{\gamma_i} = T - \gamma_i I$ têm inverso limitado e, pelo Teorema 3.36, todos os operadores inversos (resolventes) $T_{\gamma_i}^{-1}$ estão definidos em todo o X , e decorre então de (3.4) que também o operador $(p(T) - \mu I)^{-1}$ existe, é limitado e está definido em todo o X , o que implica que $\mu \in \rho(p(T))$. Consequentemente, podemos concluir que se $\mu \in \sigma(p(T))$ então $\gamma_i \in \sigma(T)$ para algum i , logo, para este i , vem $\mu = p(\gamma_i) \in p(\sigma(T))$. Isto prova que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. Para provar a

inclusão contrária, considere-se arbitrariamente $\mu \in p(\sigma(T))$. Então, $\mu = p(\gamma)$ para algum $\gamma \in \sigma(T)$, e podemos escrever

$$p(\lambda) - \mu = (\lambda - \gamma)q(\lambda),$$

onde $q(\lambda)$ é um polinómio de grau $n - 1$. Ponha-se $\mathcal{P}_\mu := p(T) - \mu I$. Então

$$\mathcal{P}_\mu = (T - \gamma I)q(T) = q(T)(T - \gamma I). \quad (3.5)$$

Agora, por um lado, se \mathcal{P}_μ^{-1} não existe, então é claro que $\mu \in \sigma(p(T))$, e nada mais há a provar. Por outro lado, se \mathcal{P}_μ^{-1} existe, então tem-se

$$I = (T - \gamma I)q(T)\mathcal{P}_\mu^{-1} = \mathcal{P}_\mu^{-1}q(T)(T - \gamma I),$$

o qual mostra que $T - \gamma I$ tem inversa, i.e., o operador resolvente T_γ^{-1} existe. Mas então, para o contradomínio de $T - \gamma I$, deve verificar-se

$$\mathcal{R}(T - \gamma I) \neq X, \quad (3.6)$$

pois caso contrário, pelo Teorema da aplicação aberta (Teorema 3.16), T_γ^{-1} seria também limitado, e concluir-se-ia que $\gamma \in \rho(T)$, contrariando o facto de ser $\gamma \in \sigma(T)$. De (3.5) e (3.6) obtém-se $\mathcal{R}(\mathcal{P}_\mu) \neq X$. Isto implica $\mu \in \sigma(p(T))$, uma vez que se fosse $\mu \in \rho(p(T))$ então pelo Teorema 3.36 ter-se-ia $\mathcal{R}(\mathcal{P}_\mu) = X$. Conclui-se que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$, o que conclui a prova. \square

3.4 Propriedades do espectro

Nesta secção vamos estabelecer algumas propriedades do espectro de um operador auto-adjunto limitado num espaço de Hilbert, necessárias para os desenvolvimentos seguintes. Começamos com o seguinte

Lema 3.41. *Seja $T : H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto limitado num espaço de Hilbert complexo H . Então $\lambda \in \rho(T)$ se e só se existe $c > 0$ tal que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$ para todo o $x \in H$.*

Demonstração. Se $\lambda \in \rho(T)$, então T_λ^{-1} existe e é limitado. Assim $\|T_\lambda^{-1}\| = k$, onde $k > 0$, desde que $T_\lambda^{-1} \neq 0$. Como $I = T_\lambda^{-1}T_\lambda$, temos para $x \in H$

$$\|x\| = \|T_\lambda^{-1}T_\lambda x\| \leq \|T_\lambda^{-1}\| \|T_\lambda x\| = k \|T_\lambda x\|.$$

Logo $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, onde $c = 1/k$. Reciprocamente, suponha-se que existe $c > 0$ tal que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in H$, e prove-se que $\lambda \in \rho(T)$. Para tal vamos mostrar que:

- (a) $T_\lambda : H \rightarrow T_\lambda(H)$ é bijectivo.
- (b) $T_\lambda(H)$ é denso em H .
- (c) $T_\lambda(H)$ é fechado em H .

Prove-se (a). Sendo $x_1, x_2 \in H$ tais que $T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$, tem-se

$$0 = \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| = \|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \geq c\|x_1 - x_2\| ,$$

donde $\|x_1 - x_2\| = 0$ (pois $c > 0$), donde $x_1 = x_2$. Uma vez que x_1, x_2 são arbitrários, conclui-se que o operador $T_\lambda : H \rightarrow T_\lambda(H)$ é bijectivo. Para provar (b) vamos mostrar que se $x_0 \in \overline{T_\lambda(H)}^\perp$ então $x_0 = 0$, pois neste caso deduz-se pelo Teorema 3.23 que $\overline{T_\lambda(H)} = H$. Seja $x_0 \in \overline{T_\lambda(H)}^\perp$. Então $x_0 \in T_\lambda(H)^\perp$, logo para todo $x \in H$ tem-se $0 = \langle T_\lambda x, x_0 \rangle = \langle Tx, x_0 \rangle - \lambda \langle x, x_0 \rangle$, donde $\langle Tx, x_0 \rangle = \langle x, \bar{\lambda}x_0 \rangle$. Logo, como T é auto-adjunto, vem

$$\langle x, Tx_0 \rangle = \langle Tx, x_0 \rangle = \langle x, \bar{\lambda}x_0 \rangle , \quad \forall x \in H ,$$

donde $Tx_0 = \bar{\lambda}x_0$. Assim, se fosse $x_0 \neq 0$ então $\bar{\lambda}$ seria um valor próprio de T , e como T é auto-adjunto ter-se-ia $\bar{\lambda} = \lambda$ e $T_\lambda x_0 = Tx_0 - \lambda x_0 = 0$, o que seria absurdo, pois por hipótese é $\|T_\lambda x_0\| \geq c\|x_0\| > 0$. Logo $x_0 = 0$, o que implica $\overline{T_\lambda(H)}^\perp = \{0\}$. Como $\overline{T_\lambda(H)}$ é um subespaço fechado de H , pelo Teorema da projecção podemos escrever $H = \overline{T_\lambda(H)} \oplus \overline{T_\lambda(H)}^\perp$, donde se conclui que $\overline{T_\lambda(H)} = H$, logo $T_\lambda(H)$ é denso em H . Finalmente, prove-se (c), i.e., que $T_\lambda(H) = \overline{T_\lambda(H)} = H$. Basta mostrar que $\overline{T_\lambda(H)} \subset T_\lambda(H)$. Seja $y \in \overline{T_\lambda(H)}$. Então existe uma sucessão $\{y_n\}_{n=0}^\infty \in T_\lambda(H)$ que converge para y . Como $y_n \in T_\lambda(H)$, temos $y_n = T_\lambda x_n$, para algum $x_n \in H$. Mas, usando a hipótese, para todos os inteiros positivos m e n tem-se

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \|T_\lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c} \|y_n - y_m\| ,$$

e uma vez que a sucessão $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ é convergente, conclui-se que $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ é de Cauchy, logo convergente, pois H é completo. Seja $x = \lim x_n$ em H . Como T

é contínua, T_λ também o é. Assim $y_n = T_\lambda x_n \rightarrow T_\lambda x$ e decorre da unicidade do limite que $y = T_\lambda x \in T_\lambda(H)$. Isto prova (c), tendo-se $\overline{T_\lambda(H)} = T_\lambda(H) = H$ (fechado). Assim, pelo Teorema da aplicação aberta, segue-se que T_λ^{-1} é limitado e, portanto, $\lambda \in \rho(T)$. \square

Teorema 3.42. *Se T é um operador auto-adjunto limitado num espaço de Hilbert complexo H , então $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Basta mostrar se $\lambda = \alpha + i\beta$, com α e β reais e $\beta \neq 0$, então $\lambda \in \rho(T)$. Para todo o $x \neq 0$ em H temos $\langle T_\lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle$, e como $\langle x, x \rangle$ e $\langle Tx, x \rangle$ são reais (cf. Teorema 3.18) vem $\overline{\langle T_\lambda x, x \rangle} = \langle Tx, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$. Assim,

$$-2i\mathcal{I}m \langle T_\lambda x, x \rangle = \overline{\langle T_\lambda x, x \rangle} - \langle T_\lambda x, x \rangle = (\lambda - \bar{\lambda}) \langle x, x \rangle = 2i\beta \|x\|^2,$$

e aplicando a desigualdade de Schwarz deduz-se

$$|\beta| \|x\|^2 = |\mathcal{I}m \langle T_\lambda x, x \rangle| \leq |\langle T_\lambda x, x \rangle| \leq \|T_\lambda x\| \|x\|,$$

donde, por ser $x \neq 0$, $|\beta| \|x\| \leq \|T_\lambda x\|$, e decorre do Lema 3.41 que $\lambda \in \rho(T)$. \square

No que vai seguir-se, sendo T um operador auto-adjunto limitado num espaço de Hilbert H , consideremos as seguintes notações:

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \quad (3.7)$$

$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \quad (3.8)$$

Teorema 3.43. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \rightarrow H$ um operador auto adjunto limitado. Então*

$$\sigma(T) \subset [m, M],$$

onde m e M são dados por (3.7) e (3.8).

Demonstração. Pelo Teorema 3.42, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Prove-se agora que sendo $\lambda = M + c$, com $c > 0$, então $\lambda \in \rho(T)$. Seja $x \in H$, com $x \neq 0$. Pondo $v = \|x\|^{-1}x$, temos $x = \|x\|v$ e $\|v\| = 1$, logo

$$\langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \langle Tv, v \rangle \leq \|x\|^2 \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle = \langle x, x \rangle M.$$

Assim $-\langle Tx, x \rangle \geq -\langle x, x \rangle M$ e, pela desigualdade de Schwarz, deduz-se

$$\|T_\lambda x\| \|x\| \geq -\langle T_\lambda x, x \rangle = -\langle Tx, x \rangle + \lambda \langle x, x \rangle \geq (-M + \lambda) \langle x, x \rangle = c \|x\|^2,$$

e como $c > 0$, dividindo por $\|x\|$ obtém-se $\|T_\lambda x\| \geq c \|x\|$, e conclui-se pelo Lema 3.41 que $\lambda \in \rho(T)$. Analogamente se prova que sendo $\lambda = m - c$, com $c > 0$, então $\lambda \in \rho(T)$. \square

Teorema 3.44. *Para um operador linear auto-adjunto limitado T num espaço de Hilbert H , tem-se:*

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$$

Demonstração. Pela desigualdade de Schwarz

$$K := \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \|x\| = \|T\|.$$

Prove-se agora que $\|T\| \leq K$. Seja $z \in H$, com $\|z\| = 1$. Suponha-se que $Tz \neq 0$. Sejam $v = \|Tz\|^{1/2} z$ e $w = \|Tz\|^{-1/2} Tz$. Então $\|v\|^2 = \|w\|^2 = \|Tz\|$. Sendo $y_1 = v + w$ e $y_2 = v - w$, uma vez que T é auto-adjunto, tem-se

$$\begin{aligned} \langle Ty_1, y_1 \rangle - \langle Ty_2, y_2 \rangle &= 2(\langle Tv, w \rangle + \langle Tw, v \rangle) \\ &= 2(\langle Tz, Tz \rangle + \langle T^2 z, z \rangle) \\ &= 4 \|Tz\|^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, para qualquer $y \neq 0$, pondo $x = \|y\|^{-1} y$ (logo $\|x\| = 1$ e $y = \|y\| x$), é

$$|\langle Ty, y \rangle| = \|y\|^2 |\langle Tx, x \rangle| \leq \|y\|^2 \sup_{\|u\|=1} |\langle Tu, u \rangle| = K \|y\|^2$$

e, consequentemente, usando a desigualdade triangular, deduz-se

$$\begin{aligned} |\langle Ty_1, y_1 \rangle - \langle Ty_2, y_2 \rangle| &\leq |\langle Ty_1, y_1 \rangle| + |\langle Ty_2, y_2 \rangle| \\ &\leq K (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) \\ &= 2K (\|v\|^2 + \|w\|^2) \\ &= 4K \|Tz\|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.9) e (3.10) podemos concluir que $\|Tz\| \leq K$ para todo o z com norma 1 (esta desigualdade é trivial se z satisfaz $Tz = 0$), o que implica que $\|T\| \leq K$. \square

Teorema 3.45. *Sejam $H \neq \{0\}$ um espaço de Hilbert complexo e $T : H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto limitado. Então m e M são valores espectrais de T .*

Demonstração. Pelo Teorema de transformação do espectro, o espectro de $T + kI$ (k constante real) obtém-se do espectro de T por translação, logo para qualquer número real μ , tem-se

$$\mu \in \sigma(T) \Leftrightarrow \mu + k \in \sigma(T + kI).$$

Assim, suponha-se $m \geq 0$. Então também $M \geq 0$ e $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle = \|T\|$.

Em consequência, por definição de supremo, existe uma sucessão $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $\langle Tx_n, x_n \rangle = M - \delta_n$, com $\delta_n \geq 0$ para todo o n e $\delta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). Então $\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\| = \|T\| = M$ e, como T é auto-adjunto, vem

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Mx_n\|^2 &= \langle Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n \rangle \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M \langle Tx_n, x_n \rangle + M^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq M^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 = 2M\delta_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim, não existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx_n\| = \|Tx_n - Mx_n\| \geq c = c\|x_n\|$$

e, portanto, pelo Lema 3.41, $M \notin \rho(T)$. Assim, $M \in \sigma(T)$. Analogamente se mostra que $m \in \sigma(T)$. \square

Observação 3.46. *Como consequência imediata do teorema precedente decorre que se T é um operador auto-adjunto limitado num espaço de Hilbert complexo, então $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Teorema 3.47. *Se T é um operador linear auto-adjunto limitado, num espaço de Hilbert complexo H , então $\sigma_r(T) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $\sigma_r(T) \neq \emptyset$. Seja $\lambda \in \sigma_r(T)$. Por definição de $\sigma_r(T)$, o inverso T_λ^{-1} existe mas o domínio $\mathcal{D}(T_\lambda^{-1})$ não é denso em H . Assim, pelo Teorema 3.23, existe $y \in H$, com $y \neq 0$, o qual é ortogonal a $\mathcal{D}(T_\lambda^{-1})$. Mas $\mathcal{D}(T_\lambda^{-1}) = \mathcal{R}(T_\lambda)$. Logo $\langle T_\lambda x, y \rangle = 0$ para todo o $x \in H$, e uma vez que λ é real e T é auto-adjunto decorre que $\langle x, T_\lambda y \rangle = 0$ para todo o $x \in H$. Em particular, tomando $x = T_\lambda y$ obtém-se $\|T_\lambda y\|^2 = 0$, logo $Ty = \lambda y$. Assim, uma vez que $y \neq 0$, vem $\lambda \in \sigma_p(T)$, o que é absurdo, visto que $\sigma_p(T) \cap \sigma_r(T) = \emptyset$. \square

3.5 Família espectral

Definição 3.48. *Seja H um espaço de Hilbert e $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ uma família de projecções em H . Diz-se que \mathcal{E} é uma família espectral (de projecções) se*

- (i) $E_\lambda \leq E_\mu$ para $\lambda \leq \mu$;
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda x = 0$ para todo o $x \in H$;
- (iii) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda x = x$ para todo o $x \in H$;
- (iv) $E_{\lambda^+} x := \lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x$ para todo o $x \in H$.

Observação 3.49.

1. De acordo com o Teorema 3.25, a condição (i) na definição precedente é equivalente a

$$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda \quad \text{para } \lambda \leq \mu.$$

2. Uma família espectral pode ser vista como uma transformação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{L}(H) \\ \lambda &\mapsto E_\lambda. \end{aligned}$$

O ponto (iv) da definição anterior significa, então, que esta aplicação é contínua à direita.

3. \mathcal{E} é chamada uma família espectral no intervalo $[a, b]$ se $E_\lambda = 0$ para $\lambda < a$ e $E_\lambda = I$ para $\lambda \geq b$.

Como sabemos o espectro $\sigma(T)$ de um operador linear auto-adjunto limitado, T , num espaço de Hilbert complexo, é um subconjunto de \mathbb{R} . Este facto permite obter uma representação de T sob forma de um integral de Riemann-Stieltjes envolvendo uma família espectral. O nosso objectivo seguinte é, justamente, a obtenção de uma tal representação, a qual será estabelecida na secção seguinte. No resto desta secção vamos apresentar alguns conceitos e resultados necessários para a obtenção desta representação.

Definição 3.50. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \rightarrow H$ um operador linear auto-adjunto limitado e positivo. Chama-se raiz quadrada de T a todo o operador linear auto-adjunto limitado A tal que $A^2 = T$. Se, além disso, A for um operador positivo, então é chamado a raiz quadrada positiva de T , e escreve-se $A = \sqrt{T}$ ou $A = T^{1/2}$.*

Observação 3.51. *Pode mostrar-se que, nas condições da definição anterior, existe um e um só operador A tal que $A = T^{1/2}$. Além disso, se $B \in \mathcal{L}(H)$ permuta com T , também permuta com A ; e se T for invertível também A é invertível.*

Como habitualmente, sendo T um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T_\lambda := T - \lambda I.$$

Definição 3.52. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \rightarrow H$ um operador linear auto-adjunto limitado e positivo. Designe B_λ a raiz quadrada positiva de T_λ^2 , i.e.,*

$$B_\lambda := (T_\lambda^2)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Chama-se parte positiva de T_λ ao operador

$$T_\lambda^+ := \frac{1}{2} (B_\lambda + T_\lambda), \quad (3.12)$$

e parte negativa de T_λ ao operador

$$T_\lambda^- := \frac{1}{2} (B_\lambda - T_\lambda). \quad (3.13)$$

O lema seguinte resume algumas propriedades dos operadores acabados de definir. A prova será omitida, por se tratar, no essencial, de uma “demonstração técnica” (veja-se, e.g., [12, pg. 498]).

Lema 3.53. *Seja H um espaço de Hilbert complexo, $T : H \rightarrow H$ um operador limitado auto-adjunto e positivo, e B_λ , T_λ^+ e T_λ^- os operadores definidos por (3.11)-(3.13). Para cada λ real, designe E_λ o operador projecção de H sobre o subespaço nulo $\mathcal{N}(T_\lambda^+)$. Então, são válidas as seguintes propriedades:*

- (a) B_λ , T_λ^+ e T_λ^- são operadores auto adjuntos limitados.

- (b) B_λ , T_λ^+ e T_λ^- comutam com todo o operador linear que comuta com T_λ .
Em particular,

$$\begin{aligned} B_\lambda T_\lambda &= T_\lambda B_\lambda, & T_\lambda^+ T_\lambda &= T_\lambda T_\lambda^+, \\ T_\lambda^- T_\lambda &= T_\lambda T_\lambda^-, & T_\lambda^+ T_\lambda^- &= T_\lambda^- T_\lambda^+. \end{aligned}$$

- (c) E_λ comuta com todo o operador linear auto-adjunto que comuta com T_λ .
Em particular,

$$E_\lambda T_\lambda = T_\lambda E_\lambda \quad \text{e} \quad E_\lambda B_\lambda = B_\lambda E_\lambda.$$

- (d) Tem-se ainda:

$$\begin{aligned} T_\lambda^+ T_\lambda^- &= 0 & , & & T_\lambda^- T_\lambda^+ &= 0 \\ T_\lambda^+ E_\lambda &= E_\lambda T_\lambda^+ = 0 & , & & T_\lambda^- E_\lambda &= E_\lambda T_\lambda^- = T_\lambda^- \\ T_\lambda E_\lambda &= -T_\lambda^- & , & & T_\lambda(I - E_\lambda) &= T_\lambda^+ \\ T_\lambda^+ &\geq 0 & , & & T_\lambda^- &\geq 0. \end{aligned}$$

Observação 3.54. Do lema anterior é imediato concluir que

$$E_\mu T_\lambda = T_\lambda E_\mu, \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.55. Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \rightarrow H$ um operador linear auto-adjunto limitado. Seja ainda E_λ (λ real) a projecção de H sobre o espaço nulo $Y_\lambda = \mathcal{N}(T_\lambda^+)$. Então $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é uma família espectral no intervalo $[m, M] \subset \mathbb{R}$, onde m e M são definidos por (3.7) e (3.8), respectivamente.

Demonstração. Para provar que $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ uma família espectral no intervalo $[m, M]$, há que verificar que:

- (a) $\lambda < \mu \Rightarrow E_\lambda \leq E_\mu$;
- (b) $\lambda < m \Rightarrow E_\lambda = 0$;
- (c) $\lambda \geq M \Rightarrow E_\lambda = I$;
- (d) $\mu \rightarrow \lambda^+ \Rightarrow E_\mu x \rightarrow E_\lambda x$ para todo o $x \in H$.

(a) Seja $\lambda < \mu$. Então $T_\lambda = T_\lambda^+ - T_\lambda^- \leq T_\lambda^+$, já que $-T_\lambda^- \leq 0$ (pelo Lema 3.53). Assim

$$T_\lambda^+ - T_\mu \geq T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda)I \geq 0.$$

Como $T_\lambda^+ - T_\mu$ é auto adjunto e comuta com $T_\mu^+ \geq 0$, pelo Teorema 3.21 tem-se

$$0 \leq T_\mu^+ (T_\lambda^+ - T_\mu) = T_\mu^+ (T_\lambda^+ - T_\mu^+ + T_\mu^-) = T_\mu^+ T_\lambda^+ - T_\mu^{+2},$$

sendo a última igualdade justificada por ser $T_\mu^+ T_\mu^- = 0$. Assim, $T_\mu^+ T_\lambda^+ \geq T_\mu^{+2}$ e, consequentemente,

$$\langle T_\mu^+ T_\lambda^+ x, x \rangle \geq \langle T_\mu^{+2} x, x \rangle = \|T_\mu^+ x\|^2 \geq 0$$

para todo o $x \in H$. Isto mostra que $T_\lambda^+ x = 0$ implica $T_\mu^+ x = 0$ para todo o $x \in H$. Assim $\mathcal{N}(T_\lambda^+) \subset \mathcal{N}(T_\mu^+)$, logo

$$\mathcal{N}(E_\lambda) = [\mathcal{N}(T_\lambda^+)]^\perp \supset [\mathcal{N}(T_\mu^+)]^\perp = \mathcal{N}(E_\mu)$$

e conclui-se, pelo Teorema 3.25, que $E_\lambda \leq E_\mu$.

(b) Suponha-se, por absurdo, que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < m$ e $E_\lambda \neq 0$. Então $E_\lambda z \neq 0$ para algum z . Pondo $x := E_\lambda z$, tem-se $E_\lambda x = E_\lambda^2 z = E_\lambda z = x$ e, assumindo, sem perda de generalidade, que $\|x\| = 1$, vem

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda E_\lambda x, x \rangle &= \langle T_\lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \lambda \\ &\geq \inf_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle - \lambda = m - \lambda > 0, \end{aligned}$$

o que contradiz o facto de ser $T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^- \leq 0$.

(c) Suponha-se agora que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > M$ e $E_\lambda \neq I$. Então $I - E_\lambda \neq 0$, logo, como na prova de (b), deduz-se que $(I - E_\lambda)x = x$ para algum x de norma 1. Assim

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda (I - E_\lambda)x, x \rangle &= \langle T_\lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \lambda \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle - \lambda = M - \lambda < 0, \end{aligned}$$

o que contradiz o facto de ser $T_\lambda (I - E_\lambda) = T_\lambda^+ \geq 0$.

(d) Considere-se o intervalo $\Delta = (\lambda, \mu]$. A este intervalo associe-se o operador $E(\Delta) := E_\mu - E_\lambda$. Uma vez que $\lambda < \mu$ tem-se, por (a), $E_\lambda \leq E_\mu$ e, pelo Teorema

3.25, $E_\lambda(H) \subset E_\mu(H)$. Além disso, $E(\Delta)$ é uma projecção, pelo Teorema 3.26 e, pelo Teorema 3.27, $E(\Delta) \geq 0$. Agora, usando o Teorema 3.25, tem-se

$$\begin{aligned} E_\mu E(\Delta) &= E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta) , \\ (I - E_\lambda) E(\Delta) &= E(\Delta) - E_\lambda (E_\mu - E_\lambda) = E(\Delta) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

De acordo com o Lema 3.53, os operadores $E(\Delta)$, T_μ^- e T_λ^+ são positivos e comutam, logo também $T_\mu^- E(\Delta)$ e $T_\lambda^+ E(\Delta)$ são operadores positivos, pelo Teorema 3.21. Assim, por (3.14) e pelo Lema 3.53, tem-se

$$\begin{aligned} T_\mu E(\Delta) &= T_\mu E_\mu E(\Delta) = -T_\mu^- E(\Delta) \leq 0 , \\ T_\lambda E(\Delta) &= T_\lambda (I - E_\lambda) E(\Delta) = T_\lambda^+ E(\Delta) \geq 0 , \end{aligned} \quad (3.15)$$

o que implica $TE(\Delta) = (T_\mu + \mu I)E(\Delta) \leq \mu E(\Delta)$ e $TE(\Delta) = (T_\lambda + \lambda I)E(\Delta) \geq \lambda E(\Delta)$, donde

$$\lambda E(\Delta) \leq TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta) . \quad (3.16)$$

Seja λ fixo e considere-se μ tal que $\mu \searrow \lambda$, i.e., $\mu \rightarrow \lambda$ por valores à direita e monotonamente. Então usando o análogo do Teorema 3.22 para sucessões decrescentes de operadores, deduz-se que $E(\Delta)x \rightarrow P(\lambda)x$, onde $P(\lambda)$ é um operador linear limitado e auto-adjunto. Uma vez que $E(\Delta)$ é indempotente, o mesmo sucede a $P(\lambda)$. Assim, $P(\lambda)$ é projecção. Além disso, (3.16) implica $\lambda P(\lambda) = TP(\lambda)$, donde $T_\lambda P(\lambda) = 0$ e, portanto, pelo Lema 3.53, obtém-se

$$T_\lambda^+ P(\lambda) = T_\lambda (I - E_\lambda) P(\lambda) = (I - E_\lambda) T_\lambda P(\lambda) = 0. \quad (3.17)$$

Assim, $T_\lambda^+ P(\lambda)x = 0$ para todo o $x \in H$, logo $P(\lambda)x \in \mathcal{N}(T_\lambda^+)$. Mas, por definição, E_λ é a projecção de H sobre $\mathcal{N}(T_\lambda^+)$ e, consequentemente, tem-se $E_\lambda P(\lambda)x = P(\lambda)x$ para todo o $x \in H$, i.e.,

$$E_\lambda P(\lambda) = P(\lambda) .$$

Por outro lado fazendo $\mu \searrow \lambda$ em (3.14) também se obtém

$$(I - E_\lambda) P(\lambda) = P(\lambda) ,$$

e decorre imediatamente das duas igualdades precedentes que $P(\lambda) = 0$. Conclui-se que $E(\Delta)x \rightarrow 0$, ou seja,

$$E_\mu x \rightarrow E_\lambda x \quad \text{se} \quad \mu \rightarrow \lambda^+$$

para todo o $x \in H$, o que significa que a transformação $\lambda \mapsto E_\lambda$ é contínua à direita. Isto conclui a demonstração. \square

O teorema precedente permite formular a seguinte

Definição 3.56. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \rightarrow H$ um operador linear limitado auto-adjunto, chama-se família espectral associada a T à família espectral $\mathcal{E} := \{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, onde E_λ é o operador projecção de H sobre o subespaço nulo $\mathcal{N}(T_\lambda^+)$.*

3.6 Teorema espectral

O objectivo imediato é estabelecer o teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos limitados em espaços de Hilbert. Começamos com o seguinte

Lema 3.57. *Sejam H um espaço de Hilbert, $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ uma sucessão de operadores em $\mathcal{L}(H)$, e T um operador em $\mathcal{L}(H)$ que comuta com U_n para todo o n . Suponha-se que $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente para T (i.e., na norma de $\mathcal{L}(H)$). Então também $\{U_n^r\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente para T^r , para qualquer número inteiro $r \geq 1$.*

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$. Como $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente para T então existe um número inteiro $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \|U_n - T\| < \varepsilon .$$

Como T comuta com U_n , então podemos escrever para todo o n

$$U_n^r - T^r = (U_n - T) (U_n^{r-1} + TU_n^{r-2} + T^2U_n^{r-3} + \dots + T^{r-1}) ,$$

donde

$$\begin{aligned} \|U_n^r - T^r\| &\leq \|U_n - T\| \\ &\quad \times (\|U_n\|^{r-1} + \|T\| \|U_n\|^{r-2} + \|T\|^2 \|U_n\|^{r-3} + \dots + \|T\|^{r-1}) . \end{aligned}$$

Como $|\|U_n\| - \|T\|| \leq \|U_n - T\|$, então

$$n \geq N \Rightarrow \|U_n\| < \varepsilon + \|T\| =: \varepsilon_1 .$$

Assim, para $n \geq N$, podemos escrever

$$\|U_n^r - T^r\| \leq \varepsilon \frac{\varepsilon_1^r - \|T\|^r}{\varepsilon_1 - \|T\|} = (\varepsilon + \|T\|)^r - \|T\|^r = \varepsilon P_{r-1}(\varepsilon, \|T\|),$$

onde $P_{r-1}(\xi, \eta) := \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \xi^{j-1} \eta^{r-j}$, que é um polinómio de grau $r-1$ nas variáveis ξ e η . Conclui-se que $\{U_n^r\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente para T^r . \square

O teorema seguinte é o teorema espectral no contexto dos polinómios. No contexto das funções contínuas, o teorema será posteriormente estabelecido via Teorema de aproximação de Weierstrass.

Teorema 3.58. *Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador limitado auto-adjunto. Então*

(i) *T tem a seguinte representação espectral*

$$T = \int_{m-0}^M \lambda dE_\lambda, \quad (3.18)$$

onde $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é a família espectral associada a T e o integral é entendido no sentido da convergência uniforme de operadores (convergência em norma de $\mathcal{L}(H)$) e, para todos os $x, y \in H$,

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{m-0}^M \lambda dw(\lambda), \quad w(\lambda) := \langle E_\lambda x, y \rangle, \quad (3.19)$$

onde, aqui, o integral é o integral ordinário de Riemann-Stieltjes.

(ii) *Para qualquer polinómio p com coeficientes reais, o operador $p(T)$ admite a representação espectral*

$$p(T) = \int_{m-0}^M p(\lambda) dE_\lambda \quad (3.20)$$

e, para todos os $x, y \in H$,

$$\langle p(T)x, y \rangle = \int_{m-0}^M p(\lambda) dw(\lambda). \quad (3.21)$$

Observação 3.59. *Escreve-se “ $m - 0$ ” no extremo inferior do integral para indicar a contribuição para $\lambda = m$, o que ocorre se $E_m \neq 0$. Assim, para $a < m$ pode-se escrever*

$$\int_a^M \lambda dE_\lambda = \int_{m-0}^M \lambda dE_\lambda .$$

Demonstração. Começamos por provar (i). Seja $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^\infty$ uma sucessão de partições de $(a, b]$ (onde $a < m$ e $M < b$) em subintervalos

$$\Delta_{nj} = (\lambda_{nj}, \mu_{nj}] \quad (j = 1, \dots, n)$$

de comprimento $l(\Delta_{nj}) = \mu_{nj} - \lambda_{nj}$. Considera-se $\lambda_{n,1} = a$, $\mu_{n,n} = b$ e $\mu_{nj} = \lambda_{n,j+1}$ para $j = 1, \dots, n-1$ e $n \geq 2$. Vamos assumir que a sucessão dos diâmetros das partições tende para zero, i.e., a sucessão $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^\infty$ é tal que

$$\eta(\mathcal{P}_n) := \max_j l(\Delta_{nj}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) . \quad (3.22)$$

De (3.16) com $\Delta = \Delta_{nj}$ tem-se

$$\lambda_{nj}E(\Delta_{nj}) \leq TE(\Delta_{nj}) \leq \mu_{nj}E(\Delta_{nj}) , \quad (3.23)$$

donde

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{nj}E(\Delta_{nj}) \leq T \leq \sum_{j=1}^n \mu_{nj}E(\Delta_{nj}) , \quad (3.24)$$

uma vez que

$$\sum_{j=1}^n E(\Delta_{nj}) = \sum_{j=1}^n (E_{\mu_{nj}} - E_{\lambda_{nj}}) = E_b - E_a = I - 0 = I . \quad (3.25)$$

De acordo com (3.22), para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo o número inteiro $n > N$ é $\eta(\mathcal{P}_n) < \epsilon$. Assim, tem-se

$$\sum_{j=1}^n \mu_{nj}E(\Delta_{nj}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}E(\Delta_{nj}) = \sum_{j=1}^n (\mu_{nj} - \lambda_{nj})E(\Delta_{nj}) < \epsilon I .$$

Da relação anterior e de (3.24) segue-se que, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ e para toda a escolha de $\hat{\lambda}_{nj} \in \Delta_{nj}$, então

$$\left\| T - \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_{nj}E(\Delta_{nj}) \right\| < \epsilon . \quad (3.26)$$

Como E_λ é constante para $\lambda < m$ e para $\lambda \geq M$, a escolha particular de $a < m$ e $b > M$ é irrelevante. Assim, fica provado (3.18), e (3.26) justifica que o integral deve ser entendido no sentido da convergência uniforme de operadores. Uma vez que o produto interno é contínuo e a soma em (3.26) é de tipo Riemann-Stieltjes, decorre que (3.18) implica (3.19) para todos os $x, y \in H$.

Para provar (ii), começamos por observar que, para quaisquer $k < \lambda \leq \mu < \nu$, verifica-se

$$\begin{aligned} (E_\lambda - E_k)(E_\mu - E_\nu) &= E_\lambda E_\mu - E_\lambda E_\nu - E_k E_\mu + E_k E_\nu \\ &= E_\lambda - E_\lambda - E_k + E_k = 0, \end{aligned}$$

o que implica $E(\Delta_{n_j})E(\Delta_{n_k}) = 0$ para $j \neq k$. Além disso, como $E(\Delta_{n_j})$ é uma projecção, tem-se

$$(E(\Delta_{n_j}))^s = E(\Delta_{n_j}), \quad s = 1, 2, \dots$$

Estes factos permitem justificar facilmente que

$$\left(\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_{n_j} E(\Delta_{n_j}) \right)^r = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_{n_j}^r E(\Delta_{n_j}) \quad (3.27)$$

para qualquer número inteiro $r \in \mathbb{N}$. Assim, de acordo com (3.26) e (3.27) e atendendo ao Lema 3.57, pode concluir-se que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$

$$\left\| T^r - \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_{n_j}^r E(\Delta_{n_j}) \right\| < \epsilon,$$

o que permite justificar (3.20) e (3.21) para polinómios da forma $p(\lambda) = \lambda^r$. Por linearidade, deduz-se o resultado para um polinómio arbitário. \square

A proposição seguinte lista algumas propriedades do operador $p(T)$, as quais irão ser úteis na prova do Teorema espectral para funções contínuas. A prova destas propriedades pode ser vista em [12, pg. 509].

Teorema 3.60. *Sejam T como no teorema anterior e p, p_1 e p_2 polinómios com coeficientes reais. Então:*

- (i) $p(T)$ é auto-adjunto;

- (ii) *Todo o operador linear limitado que comuta com T , comuta com $p(T)$;*
- (iii) *Se $p(\lambda) \geq 0$ para todo o $\lambda \in [m, M]$, então $p(T) \geq 0$;*
- (iv) *Se $p_1(\lambda) \leq p_2(\lambda)$ para todo o $\lambda \in [m, M]$, então $p_1(T) \leq p_2(T)$;*
- (v) $\|p(T)\| \leq \max_{\lambda \in J} |p(\lambda)|$, onde $J := [m, M]$.

Vamos agora generalizar o Teorema 3.58 para um operador do tipo $f(T)$, onde T é definido como anteriormente (i.e., como no teorema precedente) e f é uma função contínua e que toma valores reais em $[m, M]$. Sendo f contínua em $[m, M]$, de acordo com o teorema da aproximação de Weierstrass ⁽¹⁾ existe uma sucessão de polinómios $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, com coeficientes reais, tal que

$$p_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente em } J := [m, M]. \quad (3.28)$$

Agora, pelo Teorema 3.60, $\{p_n(T)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sucessão de operadores lineares limitados e auto-adjuntos que satisfaz

$$\|p_n(T) - p_r(T)\| \leq \max_{\lambda \in J} |p_n(\lambda) - p_r(\lambda)|$$

para quaisquer $n, r \in \mathbb{N}$. Assim, como, atendendo a (3.28), dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos os $n, r > N$,

$$\max_{\lambda \in J} |p_n(\lambda) - p_r(\lambda)| < \epsilon,$$

conclui-se que a sucessão de operadores $\{p_n(T)\}_{n=0}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(H)$, logo tem limite neste espaço, uma vez que $\mathcal{L}(H)$ é completo. Define-se então $f(T)$ como sendo o limite

$$f(T) := \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(T) \quad \text{em } \mathcal{L}(H). \quad (3.29)$$

Observamos que $f(T)$ está bem definido, uma vez que $f(T)$ depende apenas de f e não da escolha da sucessão de polinómios que converge uniformemente para

¹ Teorema da aproximação de Weierstrass: O conjunto $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ de todos os polinómios com coeficientes reais é denso no espaço real $C[a, b]$ das funções reais contínuas em $[a, b]$. Assim, para toda a função $f \in C[a, b]$ e dado $\epsilon > 0$, existe um polinómio p tal que $|f(t) - p(t)| < \epsilon$ para todo o $t \in [a, b]$.

f . Para provar esta afirmação, seja $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma outra sucessão de polinômios com coeficientes reais tal que $\tilde{p}_n \rightarrow f$, uniformemente em J . Então, usando argumentos análogos aos anteriores, pode garantir-se a existência de $\tilde{f}(T)$ tal que

$$\tilde{f}(T) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{p}_n(T) \quad \text{em } \mathcal{L}(H). \quad (3.30)$$

Prove-se que $\tilde{f}(T) = f(T)$. Claramente, $\tilde{p}_n - p_n \rightarrow 0$, uniformemente em J , o que implica, pelo Teorema anterior,

$$\|\tilde{p}_n(T) - p_n(T)\| \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

Fixemos arbitrariamente $\epsilon > 0$. De (3.29), (3.30) e (3.31), deduz-se que existe $N = N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ tal que para $n > N$

$$\|f(T) - p_n(T)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \|\tilde{f}(T) - \tilde{p}_n(T)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \|p_n(T) - \tilde{p}_n(T)\| < \frac{\epsilon}{3},$$

donde

$$\|\tilde{f}(T) - f(T)\| \leq \|\tilde{f}(T) - \tilde{p}_n(T)\| + \|\tilde{p}_n(T) - p_n(T)\| + \|p_n(T) - f(T)\| < \epsilon.$$

Como ϵ foi escolhido arbitrariamente positivo e o primeiro membro não depende de ϵ , decorre que $\tilde{f}(T) = f(T)$, e conclui-se que o operador $f(T)$ em (3.29) está bem definido.

Estamos em condições de estender o Teorema 3.58 para funções reais de variável real, contínuas em $[m, M]$.

Teorema 3.61 (Teorema espectral). *Seja H um espaço de Hilbert complexo, $T : H \rightarrow H$ um operador linear auto-adjunto limitado e f uma função contínua que toma valores reais em $[m, M]$. Então $f(T)$ admite a representação espectral*

$$f(T) = \int_{m-0}^M f(\lambda) dE_\lambda, \quad (3.32)$$

onde $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ é a família espectral associada a T . O integral deve ser entendido no sentido da convergência uniforme de operadores e, para todos os $x, y \in H$,

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{m-0}^M f(\lambda) dw(\lambda), \quad w(\lambda) := \langle E_\lambda x, y \rangle, \quad (3.33)$$

onde, aqui, o integral é o integral ordinário de Riemann-Stieltjes.

Demonstração. Fixemos $\epsilon > 0$. Pelo teorema de Weierstrass, existe um polinómio p com coeficientes reais tal que, para todo o $\lambda \in [m, M]$,

$$-\epsilon/3 \leq f(\lambda) - p(\lambda) \leq \epsilon/3. \quad (3.34)$$

Isto implica, pela propriedade (v) do Teorema 3.60,

$$\|f(T) - p(T)\| \leq \epsilon/3.$$

Seja $\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^\infty$ uma qualquer partição de $[m, M]$, e considerem-se as notações como na demonstração do Teorema 3.58. Então, partindo de (3.34) e usando a propriedade (iv) do Teorema 3.60, e tendo em conta (3.25), obtém-se

$$-\frac{\epsilon}{3}I \leq \sum_{j=1}^n [f(\hat{\lambda}_{nj}) - p(\hat{\lambda}_{nj})] E(\Delta_{nj}) \leq \frac{\epsilon}{3}I$$

para toda a escolha de $\hat{\lambda}_{nj} \in \Delta_{nj}$ ($j = 1, \dots, n$), donde

$$\left\| \sum_{j=1}^n [f(\hat{\lambda}_{nj}) - p(\hat{\lambda}_{nj})] E(\Delta_{nj}) \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Agora, uma vez que $p(T)$ é representado por (3.20), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n > N$

$$\left\| \sum_{j=1}^n p(\hat{\lambda}_{nj}) E(\Delta_{nj}) - p(T) \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalmente, das desigualdades anteriores deduz-se que, para $n > N$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n f(\hat{\lambda}_{nj}) E(\Delta_{nj}) - f(T) \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^n [f(\hat{\lambda}_{nj}) - p(\hat{\lambda}_{nj})] E(\Delta_{nj}) \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^n p(\hat{\lambda}_{nj}) E(\Delta_{nj}) - p(T) \right\| + \|p(T) - f(T)\| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$f(T) = \lim_n \sum_{j=1}^n f(\hat{\lambda}_{nj}) E(\Delta_{nj}) = \int_{m-0}^M f(\lambda) dE_\lambda.$$

Isto prova (3.32) e (3.33). \square

Observação 3.62. Por vezes, em vez de $\int_{m-0}^M(\dots)$ escrever-se-á $\int_{\mathbb{R}}(\dots)$, quando estes integrais sejam considerados a respeito de certas funções envolvendo elementos da família espectral. Por exemplo, $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_{\lambda}x = \int_{m-0}^M f(\lambda) dE_{\lambda}x$.

Lema 3.63. Sejam H um espaço de Hilbert, $T : H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto limitado e $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a família espectral associada a T . Então, para quaisquer $x \in H$ e $a, b \in \mathbb{R}$, verificam-se as igualdades

$$(a) \int_b^{+\infty} d\|E_{\lambda}x\|^2 = \|(I - E_b)x\|^2$$

$$(b) \int_{-\infty}^a d\|E_{\lambda}x\|^2 = \|E_ax\|^2 .$$

Demonstração. Por um lado, usando as propriedades da família espectral, bem como as do integral de Riemann-Stieltjes, pode justificar-se que

$$\begin{aligned} \int_b^{+\infty} d\|E_{\lambda}x\|^2 &= \int_b^M d\|E_{\lambda}x\|^2 = \lim_n \sum_{j=0}^n \|E_{\lambda_{j+1}}x\|^2 - \|E_{\lambda_j}x\|^2 \\ &= \lim_n \|E_{\lambda_{n+1}}x\|^2 - \|E_{\lambda_0}x\|^2 = \|E_Mx\|^2 - \|E_bx\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|E_bx\|^2 = \|x - E_bx\|^2 , \end{aligned}$$

o que prova (a). Por outro lado, também se tem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a d\|E_{\lambda}x\|^2 &= \int_{m-0}^a d\|E_{\lambda}x\|^2 = \lim_n \sum_{j=0}^n \|E_{\lambda_{j+1}}x\|^2 - \|E_{\lambda_j}x\|^2 \\ &= \lim_n \|E_{\lambda_{n+1}}x\|^2 - \|E_{\lambda_0}x\|^2 = \|E_ax\|^2 - \|E_{m-0}x\|^2 \\ &= \|E_ax\|^2 , \end{aligned}$$

o que conclui a prova. \square

Lema 3.64. Sejam H um espaço de Hilbert, $T : H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto limitado e $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a família espectral associada a T . Então, para quaisquer $x, y \in H$ e $\mu \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(a) \|Tx\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E_{\lambda}x\|^2 ;$$

$$(b) \langle E_{\mu}Tx, y \rangle = \langle TE_{\mu}x, y \rangle ;$$

$$(c) \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \langle f(T)x, (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x \rangle = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\|E_{\lambda}x\|^2 .$$

Demonstração. Para provar (a) basta observar que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^2x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E_{\lambda}x\|^2 .$$

Por outro lado, (b) decorre de

$$\begin{aligned} \langle E_{\mu}Tx, y \rangle &= \langle Tx, E_{\mu}y \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_{\lambda}x, E_{\mu}y \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_{\mu}E_{\lambda}x, y \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_{\lambda}E_{\mu}x, y \rangle = \langle TE_{\mu}x, y \rangle . \end{aligned}$$

Finalmente, para provar (c), comecemos por notar que

$$E_{\lambda}(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) = \begin{cases} E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} & \text{se } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda \\ E_{\lambda} - E_{\lambda_1} & \text{se } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \\ 0 & \text{se } \lambda < \lambda_1 < \lambda_2 , \end{cases}$$

logo, para $x \in H$ (fixo) a função $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle x, E_{\lambda}(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x \rangle$ é constante em $\mathbb{R} \setminus [\lambda_1, \lambda_2]$, o que permite justificar a terceira igualdade abaixo

$$\begin{aligned} &\langle f(T)x, (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E_{\lambda}x, (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle x, E_{\lambda}(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x \rangle \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\langle x, (E_{\lambda} - E_{\lambda_1})x \rangle = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\langle (E_{\lambda} - E_{\lambda_1})x, (E_{\lambda} - E_{\lambda_1})x \rangle \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d(\langle E_{\lambda}x, E_{\lambda}x \rangle - \langle E_{\lambda_1}x, E_{\lambda_1}x \rangle) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\langle E_{\lambda}x, E_{\lambda}x \rangle . \end{aligned}$$

□

Observação 3.65. O Teorema 3.60 permanece válido se, no seu enunciado, p , p_1 e p_2 forem substituídos por funções reais f , f_1 e f_2 contínuas em $[m, M]$.

Teorema 3.66. Sejam H um espaço de Hilbert, T um operador limitado auto-adjunto em H e $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a família espectral associada a T . Então:

- (a) $\sigma_p(T)$ é o conjunto dos $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tais que $E_{\lambda_0^-} \neq E_{\lambda_0}$, e $\mathcal{R}(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^-})$ é o subespaço gerado pelos vectores próprios de T associados a λ_0 .
- (b) $\sigma_c(T)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $E_{\lambda^-} = E_{\lambda}$ e $E_{\lambda_1} \neq E_{\lambda_2}$ para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Demonstração. Sendo $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $x \in H$, tem-se

$$(T - \lambda_0 I)x = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0) dE_{\lambda} x \quad (3.35)$$

e, também,

$$\|(T - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E_{\lambda} x\|^2. \quad (3.36)$$

Suponha-se que $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, i.e., λ_0 é um valor próprio de T . Seja $x \neq 0$ um vector próprio associado. Então, $Tx = \lambda_0 x$, logo, para estes λ_0 e x , o primeiro membro e, portanto, também o segundo membro, da igualdade (3.36) é zero. Consequentemente,

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E_{\lambda} x\|^2 = 0$$

para todo o $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Daqui decorre que para $\lambda_1 > \lambda_0$ é

$$0 = \int_{\lambda_1}^{+\infty} d\|E_{\lambda} x\|^2 = \|x - E_{\lambda_1} x\|^2,$$

sendo a última igualdade justificada pelo Lema 3.63. Conclui-se que $E_{\lambda_1} x = x$ para todo o $\lambda_1 > \lambda_0$, logo, pela continuidade à direita dos elementos da família espectral,

$$E_{\lambda_0} x = x. \quad (3.37)$$

Por outro lado, se $\lambda_1 < \lambda_0$, usando argumentos análogos aos precedentes, mas agora aplicados ao integral $\int_{-\infty}^{\lambda_1} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E_{\lambda} x\|^2$, mostra-se que $E_{\lambda_1} x = 0$ para $\lambda_1 < \lambda_0$, donde

$$E_{\lambda_0^-} x = 0. \quad (3.38)$$

De (3.37) e (3.38) decorre que $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0^-}$ e $(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^-})x = x$, o que implica ainda $x \in \mathcal{R}(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^-})$. Reciprocamente suponha-se que $E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^-} \neq 0$ e

$x \in \mathcal{R}(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^-})$, com $x \neq 0$. Então, $x = (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^-})y$ para algum $y \in H$, logo, por (3.36),

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda_0 I)x\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d \|E_{\lambda}(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^-})y\|^2 \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \lambda_0^-} \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d \|E_{\lambda}(E_{\lambda_0} - E_{\alpha})y\|^2 \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \lambda_0^-} \int_{\alpha}^{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^2 d \|E_{\lambda}y\|^2 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde $Tx = \lambda_0 x$, logo $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. Isto prova (a).

Prove-se agora (b). Suponhamos que $E_{\lambda_0^-} = E_{\lambda_0}$. Então $\lambda_0 \notin \sigma_p(T)$, por (a), pelo que as únicas possibilidades são ou $\lambda_0 \in \rho(T)$ ou $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$ (já que, pelo Teorema 3.47, $\sigma_r(T) = \emptyset$). Se existir um par (λ_1, λ_2) tal que $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ e $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$, então é claro que $E_{\lambda} = E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$ para todo o $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, logo $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d \|E_{\lambda}x\|^2 = 0$ e, para todo o $x \in H$, obtém-se

$$\|(T - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d \|E_{\lambda}x\|^2 \geq \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} \|E_{\lambda}x\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2,$$

onde α é escolhido tal que $0 < \alpha \leq \min\{\lambda_0 - \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_0\}$. Assim, $\|T_{\lambda_0}x\| \geq \alpha \|x\|$, logo $\lambda_0 \in \rho(T)$. Por outro lado, se $E_{\lambda_1} \neq E_{\lambda_2}$ para todo o par (λ_1, λ_2) tal que $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$, então necessariamente $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$. Com efeito, caso contrário, seria $\lambda_0 \in \rho(T)$, logo existiria $\gamma > 0$ tal que $\|T_{\lambda_0}x\| \geq \gamma \|x\|$ para todo o $x \in H$, donde

$$\int_{m-0}^M (\lambda - \lambda_0)^2 d \|E_{\lambda}x\|^2 \geq \gamma^2 \int_{m-0}^M d \|E_{\lambda}x\|^2, \quad x \in H, \quad (3.40)$$

o que implicaria E_{λ} constante para $\lambda \in [\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma]$ (senão, existiriam $0 < \eta < \gamma$ e $y \in H$ tais que $x := (E_{\lambda_0+\eta} - E_{\lambda_0-\eta})y \neq 0$; para este x seria $E_{\lambda}x = 0$ para $\lambda < \lambda_0 - \eta$ e $E_{\lambda}x$ independente de λ para $\lambda > \lambda_0 + \eta$, logo de (3.40) viria

$$\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} (\lambda - \lambda_0)^2 d \|E_{\lambda}x\|^2 \geq \gamma^2 \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} d \|E_{\lambda}x\|^2,$$

o que é uma desigualdade impossível, uma vez que o segundo membro é estritamente positivo e o primeiro membro é estritamente menor que o segundo, já

que $(\lambda - \lambda_0)^2 \leq \eta^2 < \gamma^2$ para $\lambda \in [\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta]$), contrariando $E_{\lambda_1} \neq E_{\lambda_2}$ para $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$. Reciprocamente, se $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$, o argumento anterior mostra que não pode existir um par (λ_1, λ_2) tal que $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ e $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$. Por outro lado, não pode ser $E_{\lambda_0^-} \neq E_{\lambda_0}$, pois $\sigma_p(T) \cap \sigma_c(T) = \emptyset$. \square

Observação 3.67. *Decorre do teorema precedente, e da sua demonstração, que $\lambda_0 \in \rho(T)$ se e só se existe um par (λ_1, λ_2) tal que $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ e $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$. Em particular, se $\lambda_0 \in \rho(T)$ então, necessariamente, $E_{\lambda_0^-} = E_{\lambda_0}$.*

3.7 Espectro essencial. Teorema de Weyl

Nesta secção, H designa um espaço de Hilbert e T é um operador linear limitado auto-adjunto em H . Nestas condições, de acordo com o Teorema 3.47, tem-se $\sigma_r(T) = \emptyset$, logo

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) \cup \sigma_p(T).$$

Definição 3.68. *Chama-se ponto limite do espectro de T a todo o ponto que pertença ao espectro contínuo, ou que seja ponto de acumulação do espectro pontual, ou que seja um valor próprio de T de multiplicidade infinita. O conjunto dos pontos limite do espectro chama-se espectro essencial de T , e designa-se por $\sigma_{ess}(T)$.*

Decorre imediatamente que $\sigma(T)$ admite uma decomposição do tipo

$$\sigma(T) = \sigma_p^f(T) \cup \sigma_{ess}(T)$$

(reunião disjunta), onde $\sigma_p^f(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T)$ é um conjunto constituído apenas pelos pontos isolados do espectro que são valores próprios de multiplicidade finita. Por vezes, a $\sigma_p^f(T)$ também se chama espectro discreto.

A proposição seguinte caracteriza o espectro essencial de um operador limitado auto-adjunto por recurso à família espectral associada, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Teorema 3.69. *Um número real μ é um ponto limite do espectro de T se e só se o operador $E(\Delta) := E_b - E_a$ tem contradomínio com dimensão infinita, qualquer que seja o intervalo $\Delta := (a, b)$ que contém μ no seu interior.*

Demonstração. Suponhamos que μ não é ponto limite do espectro. Então existe um intervalo $\Delta = (a, b)$ contendo μ e que não contém nenhum ponto do

espectro excepto, possivelmente, o próprio μ , que, neste caso, será um valor próprio de multiplicidade finita. Assim, ou em Δ não existem elementos de $\sigma(T)$, logo $E_b = E_a$, o que implica $\mathcal{R}(E(\Delta)) = \{0\}$, de dimensão zero, ou então μ é o único elemento de $\sigma(T)$ (necessariamente elemento de $\sigma_p(T)$) que pertence a Δ , caso em que

$$E(\Delta) = E_b - E_a = E_\mu - E_{\mu^-} ,$$

deduzindo-se então do Teorema 3.66 que $\mathcal{R}(E(\Delta))$ é o subespaço próprio associado ao valor próprio μ e, portanto, $\mathcal{R}(E(\Delta))$ tem dimensão finita.

Reciprocamente, suponha-se que existe um intervalo $\Delta = (a, b)$ contendo μ no seu interior e tal que $E(\Delta)$ tem contradomínio com dimensão finita. Então, por definição de família espectral, $E_\mu - E_a \leq E_b - E_a = E(\Delta)$ e, portanto, entre a e μ só pode existir um número finito de valores próprios de T . Logo μ não pode ser um ponto limite do espectro de T . \square

Teorema 3.70 (Critério de Weyl). *O número real μ é um ponto limite do espectro do operador limitado auto-adjunto T se e só se existe uma sucessão de elementos do domínio de T , $\{f_n\}_{n=0}^\infty$, tal que*

$$\|f_n\| = 1 , \quad f_n \rightharpoonup 0 , \quad (T - \mu I) f_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty) .$$

Demonstração. Suponha-se que μ é um ponto limite do espectro de T . Consideremos uma sucessão de intervalos encaixados, $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$, que contêm μ no seu interior e cujo diâmetro tende para zero. Pelo Teorema 3.69, cada subespaço $Y_n := \mathcal{R}(E(I_n))$ tem dimensão infinita (o operador $E(I_n)$ é definido como no Teorema 3.69) e, portanto, existe uma sucessão ortonormal $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $f_n \in Y_n$ para cada n . Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \|(T - \mu I) f_n\|^2 &= \|(T - \mu I) E(I_n) f_n\|^2 = \int_{I_n} (\lambda - \mu)^2 d\|E_\lambda f_n\|^2 \\ &\leq (\text{diam } I_n)^2 \|f_n\|^2 = (\text{diam } I_n)^2 \rightarrow 0 , \end{aligned}$$

e como toda a sucessão ortonormal num espaço de Hilbert converge fracamente para 0 (consequência da desigualdade de Bessel) conclui-se que a sucessão $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ satisfaz as três propriedades requeridas.

Reciprocamente, suponhamos que existe uma sucessão $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ que satisfaz as três condições anteriores, e prove-se que μ é, necessariamente, um ponto

limite do espectro. De facto, se $\Delta = (a, b)$ é um intervalo que contém μ no seu interior, então para todo o elemento f do domínio de T verifica-se

$$\begin{aligned} \|(T - \mu I) f\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \mu)^2 d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\geq (b - \mu)^2 \int_b^{+\infty} d\|E_\lambda f\|^2 + (a - \mu)^2 \int_{-\infty}^a d\|E_\lambda f\|^2 \\ &= (b - \mu)^2 \|(I - E_b) f\|^2 + (a - \mu)^2 \|E_a f\|^2, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada pelo Lema 3.63. Em particular, para $f = f_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) e tendo em conta a hipótese, decorre que $(I - E_b)f_n \rightarrow 0$ e $E_a f_n \rightarrow 0$. Assim, $(I - E(\Delta))f_n \rightarrow 0$ e, consequentemente, novamente pela hipótese,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E(\Delta) f_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 1.$$

Ora, se μ não fosse ponto limite do espectro, então o subespaço $Y := \mathcal{R}(E(\Delta))$ teria dimensão finita para algum intervalo Δ . Mas, neste caso, a convergência fraca da sucessão $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ para zero implicaria a convergência forte de sucessão $\{E(\Delta) f_n\}_{n=0}^\infty$ para o mesmo limite, o que seria contraditório com o facto de ser $\lim_{n \rightarrow \infty} \|E(\Delta) f_n\| = 1$. \square

Uma das consequências mais importantes do Critério de Weyl é a proposição que a seguir se estabelece.

Teorema 3.71 (Teorema de Weyl). *Se T é um operador limitado auto-adjunto e K é um operador compacto, então*

$$\sigma_{ess}(T + K) = \sigma_{ess}(T).$$

Demonstração. Pelo critério de Weyl, $\mu \in \sigma_{ess}(T)$ se e só se existe $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $\|f_n\| = 1$, $f_n \rightarrow 0$ e $(T - \mu I) f_n \rightarrow 0$. Como K é compacto, $K f_n \rightarrow 0$ (fortemente). Assim, $\mu \in \sigma_{ess}(T)$ se e só se existe $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $\|f_n\| = 1$, $f_n \rightarrow 0$ e $(T + K - \mu I) f_n \rightarrow 0$, se e só se $\mu \in \sigma_{ess}(T + K)$. \square

Concluimos o capítulo estabelecendo um resultado de transformação do espectro essencial de um operador auto-adjunto limitado, cuja prova decorre também do Critério de Weyl.

Teorema 3.72. *Se T é um operador auto-adjunto limitado, então*

$$q(\sigma_{ess}(T)) = \sigma_{ess}(q(T))$$

para qualquer polinómio não nulo q .

Demonstração. Seja $\mu \in q(\sigma_{ess}(T))$. Então $\mu = q(\lambda)$, com $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$. Pelo Critério de Weyl, existe $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $\|f_n\| = 1$, $f_n \rightharpoonup 0$ e $\|Tf_n - \lambda f_n\| \rightarrow 0$. Ora, sendo um polinómio, q admite a representação

$$q(x) - q(y) = r(x, y)(x - y),$$

onde $r(x, y)$ é um polinómio em x e y de grau $k - 1$, se k designar o grau de q . Assim, também

$$q(T) - q(\lambda)I = r(T, \lambda)(T - \lambda I).$$

Como $r(T, \lambda)$ é uma combinação linear de potências de T então é também um operador linear limitado, logo

$$\|q(T)f_n - q(\lambda)f_n\| \leq \|r(T, \lambda)\| \|Tf_n - \lambda f_n\| \rightarrow 0,$$

e deduz-se que $\mu = q(\lambda) \in \sigma_{ess}(q(T))$, atendendo ao Critério de Weyl. Portanto, $q(\sigma_{ess}(T)) \subset \sigma_{ess}(q(T))$. Para provar a inclusão contrária, fixemos $\mu \in \sigma_{ess}(q(T))$. O polinómio $q(x) - \mu$ admite a factorização

$$q(x) - \mu = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k),$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são os zeros da equação algébrica $q(x) = \mu$. Então, também

$$q(T) - \mu I = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_k I). \quad (3.41)$$

Vamos provar que

$$\exists i \in \{1, \dots, k\} : \lambda_i \in \sigma_{ess}(T), \quad (3.42)$$

o que permitirá concluir que $\mu = q(\lambda_i) \in q(\sigma_{ess}(T))$, como se pretende. Suponha-se que (3.42) não se verifica, i.e.,

$$\lambda_i \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{ess}(T), \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}. \quad (3.43)$$

Então, cada λ_i ($i = 1, \dots, n$) ou está em $\sigma_p^f(T)$, ou em $\rho(T)$. Se todos os $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ estão em $\rho(T)$ então os correspondentes operadores resolventes existem e são limitados, e de (3.41) podemos escrever

$$T - \lambda_1 I = f_1(T) (q(T) - \mu I) , \quad (3.44)$$

onde $f_1(T) := (T - \lambda_k I)^{-1} (T - \lambda_{k-1} I)^{-1} \dots (T - \lambda_2 I)^{-1}$, que é um operador linear limitado. Ora, como $\mu \in \sigma_{ess}(q(T))$ então existe $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tal que

$$\|f_n\| = 1, \quad f_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|q(T)f_n - \mu f_n\| \rightarrow 0 . \quad (3.45)$$

Assim, atendendo a (3.44), vem $\|Tf_n - \lambda_1 f_n\| \leq \|f_1(T)\| \|q(T)f_n - \mu f_n\| \rightarrow 0$, o que implica $\lambda_1 \in \sigma_{ess}(T)$, contrariando (3.43). Por conseguinte, pelo menos um dos λ_i terá de pertencer a $\sigma_p^f(T)$. Sem perda de generalidade, suponha-se que os primeiros m λ_i 's (com $1 \leq m \leq k$) estão em $\sigma_p^f(T)$, e os restantes $k - m$ em $\rho(T)$, i.e.,

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \sigma_p^f(T), \quad \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k \in \rho(T) . \quad (3.46)$$

(Assume-se que se $m = k$ então nenhum λ_i está em $\rho(T)$.) Nestas condições, para $i \in \{m+1, \dots, k\}$ os operadores $T - \lambda_i I$ são invertíveis e os correspondentes operadores resolventes são limitados e, conseqüentemente, novamente por (3.41), podemos escrever

$$(T - \lambda_m I)(T - \lambda_{m-1} I) \dots (T - \lambda_1 I) = f(T) (q(T) - \mu I) , \quad (3.47)$$

onde $f(T) := (T - \lambda_k I)^{-1} (T - \lambda_{k-1} I)^{-1} \dots (T - \lambda_{m+1} I)^{-1}$, que é um operador linear limitado. Agora, para a sucessão $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ satisfazendo (3.45) é claro que $\|Tf_n - \lambda_1 f_n\| \not\rightarrow 0$ (caso contrário, pelo Critério de Weyl, seria $\lambda_1 \in \sigma_{ess}(T)$). Logo existem $\epsilon_1 > 0$ e uma subsucessão $\{f_{n_j}\}_{j=0}^\infty$ tal que $\|Tf_{n_j} - \lambda_1 f_{n_j}\| \geq \epsilon_1$ para todo o $j = 0, 1, 2, \dots$. Defina-se

$$f_{1,j} := \frac{Tf_{n_j} - \lambda_1 f_{n_j}}{\|Tf_{n_j} - \lambda_1 f_{n_j}\|}, \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Então $\|f_{1,j}\| = 1$ para todo o j . Além disso, tem-se $0 < \epsilon_1 \leq \|Tf_{n_j} - \lambda_1 f_{n_j}\| \leq \|T - \lambda_1 I\|$ para todo o j , logo a sucessão $\{v_j := 1/\|Tf_{n_j} - \lambda_1 f_{n_j}\|\}_{j=0}^\infty$ está bem definida e é limitada inferiormente por $1/\|T - \lambda_1 I\|$ e superiormente por $1/\epsilon_1$.

Em consequência, como $f_n \rightarrow 0$ e $T - \lambda_1 I$ é um operador limitado, deduz-se que $f_{1,j} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow +\infty$). Por outro lado, de (3.47) obtém-se

$$(T - \lambda_m I) \cdots (T - \lambda_2 I) f_{1,j} = v_j (q(T) f_{n_j} - \mu f_{n_j}) \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow +\infty).$$

É claro que $\|T f_{1,n} - \lambda_2 f_{1,n}\| \not\rightarrow 0$ (senão seria $\lambda_2 \in \sigma_{ess}(T)$). Logo existem $\epsilon_2 > 0$ e uma subsucessão $\{f_{1,n_j}\}_{j=0}^\infty$ de $\{f_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ tal que $\|T f_{1,n_j} - \lambda_2 f_{1,n_j}\| \geq \epsilon_2$ para todo o $j = 0, 1, 2, \dots$. Defina-se

$$f_{2,j} := \frac{T f_{1,n_j} - \lambda_2 f_{1,n_j}}{\|T f_{1,n_j} - \lambda_2 f_{1,n_j}\|}, \quad j = 0, 1, 2, \dots.$$

Então, como acima, tem-se $\|f_{2,j}\| = 1$ para todo o j , $f_{2,j} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow +\infty$) e

$$(T - \lambda_m I) \cdots (T - \lambda_3 I) f_{2,j} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow +\infty).$$

E, enfim, prosseguindo sucessivamente com este processo, ao fim de $m-1$ passos podemos garantir a existência de uma sucessão $\{f_{m-1,j}\}_{j=0}^\infty$ tal que $\|f_{m-1,j}\| = 1$ para todo o j , $f_{m-1,j} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow +\infty$) e

$$\|T f_{m-1,j} - \lambda_m f_{m-1,j}\| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow +\infty).$$

Mas, isto implica $\lambda_m \in \sigma_{ess}(T)$, absurdo. Fica assim provado (3.42), o que conclui a demonstração. \square

Capítulo 4

Operadores de Jacobi assimptoticamente periódicos

Neste capítulo introduzimos a classe dos operadores de Jacobi e analisamos a sua forte ligação com a teoria dos polinómios ortogonais. Será dada particular atenção ao estudo de operadores de Jacobi assimptoticamente periódicos, em particular nos seus aspectos que envolvem a teoria espectral. Estabeleceremos uma ligação entre estes operadores e a teoria apresentada no Capítulo 2 envolvendo transformações polinomiais, o que permitirá apresentar uma prova alternativa às existentes na literatura para a caracterização do espectro de tais operadores. As referências bibliográficas mais utilizadas foram a monografia [3], [21] e [18], bem como os artigos [1], [17] e [11].

4.1 Operadores de Jacobi. Aspectos básicos

Como é usual, $\ell^2(\mathbf{C})$ designará o espaço de sucessões

$$\ell^2(\mathbf{C}) := \left\{ (\xi_n)_{n \geq 0} \mid \xi_n \in \mathbf{C} \ (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\},$$

munido com o produto interno

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x = (\xi_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbf{C}), \quad y = (\eta_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbf{C}),$$

o qual induz a norma

$$\|x\| := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (\xi_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbf{C}).$$

Designaremos por $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ a base canónica usual de $\ell^2(\mathbf{C})$, i.e.,

$$e_k := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \quad k \in \mathbf{N}_0$$

(com o “1” a figurar na posição $k + 1$). $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ é um sistema ortonormado maximal (base hilbertiana) em $\ell^2(\mathbf{C})$.

Existe uma classe de operadores em $\ell^2(\mathbf{C})$ que estão intimamente relacionados com sucessões de polinómios ortogonais. Tais operadores foram introduzidos por Jacobi no decurso das suas investigações sobre cálculo variacional, razão pela qual são actualmente designados por operadores de Jacobi. Neste trabalho adoptaremos a seguinte

Definição 4.1. *Um operador linear T em $\ell^2(\mathbf{C})$ diz-se um operador de Jacobi se existirem duas sucessões de números reais $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, com $a_{n+1} > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o $n \in \mathbf{N}_0$, tais que*

$$Tx = (a_{n+1}\xi_{n+1} + b_n\xi_n + a_n\xi_{n-1})_{n \geq 0} \quad (4.1)$$

para todo o $x = (\xi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{D}(T)$, com a convenção $\xi_{-1} = 0$. O domínio de T é definido de forma a ser um “domínio maximal”, i.e.,

$$\mathcal{D}(T) := \{x \in \ell^2(\mathbf{C}) \mid Tx \in \ell^2(\mathbf{C})\}. \quad (4.2)$$

Decorre imediatamente da definição precedente que a matriz de T relativamente à base canónica de $\ell^2(\mathbf{C})$, $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, é

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

J diz-se a matriz de Jacobi (infinita) associada ao operador T . Decorre que, formalmente, para um dado $x \in \mathcal{D}(T)$, Tx é o vector de $\ell^2(\mathbf{C})$ que se obtém multiplicando a matriz J pelo vector x , i.e., calculando Jx segundo a regra usual do produto de matrizes.

Observação 4.2. Normalmente, não faremos distinção entre o operador de Jacobi e a correspondente matriz de Jacobi; em particular, usaremos J quer para representar a matriz de Jacobi, quer para indicar o correspondente operador de Jacobi, T .

Teorema 4.3. Seja T o operador de Jacobi definido por (4.1)-(4.2). Então, T é um operador limitado se e só se as sucessões $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são limitadas. Nestas condições, T é um operador auto-adjunto com domínio $\mathcal{D}(T) = \ell^2(\mathbf{C})$ e, pondo

$$a := \sup_{n \geq 1} a_n, \quad b := \sup_{n \geq 0} |b_n|, \quad (4.4)$$

tem-se $\|T\| \leq 2a + b$ e $\sigma(T) \subset [-2a - b, 2a + b]$.

Demonstração. Sendo T limitado, a desigualdade de Cauchy-Schwarz permite escrever

$$|\langle Te_j, e_k \rangle| \leq \|T\|, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde, em particular,

$$|a_{j+1}| = |\langle Te_j, e_{j+1} \rangle| \leq \|T\| \quad \text{e} \quad |b_j| = |\langle Te_j, e_j \rangle| \leq \|T\|$$

para todo o $j = 0, 1, 2, \dots$, logo as sucessões $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são limitadas. Reciprocamente, suponha-se que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são sucessões limitadas. Então, as quantidades a e b definidas por (4.4) são finitas. Considerem-se em $\ell^2(\mathbf{C})$ os operadores T_1 , T_2 e T_3 definidos por

$$\begin{aligned} T_1((\xi_n)_{n \geq 0}) &:= (a_n \xi_{n-1})_{n \geq 0}, \\ T_2((\xi_n)_{n \geq 0}) &:= (b_n \xi_n)_{n \geq 0}, \\ T_3((\xi_n)_{n \geq 0}) &:= (a_{n+1} \xi_{n+1})_{n \geq 0} \end{aligned}$$

($\xi_{-1} := 0$). Verifica-se facilmente que T_1 , T_2 e T_3 são operadores lineares limitados em $\ell^2(\mathbf{C})$, com $\|T_1\| \leq a$, $\|T_2\| \leq b$ e $\|T_3\| \leq a$. Como $T = T_1 + T_2 + T_3$, segue-se que T é também limitado em $\ell^2(\mathbf{C})$ e $\|T\| \leq \|T_1\| + \|T_2\| + \|T_3\| \leq 2a + b$.

Agora, os Teoremas 3.43 e 3.44 asseguram que $\sigma(T) \subset [-2a - b, 2a + b]$. Finalmente, nas condições da Definição 4.1 facilmente se verifica que T é um operador simétrico, i.e., $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{D}(T)$. Assim, T é auto-adjunto em $\mathcal{D}(T) = \ell^2(\mathbf{C})$, o que conclui a prova. \square

Observação 4.4. *A definição de operador de Jacobi apresentada é suficiente para os propósitos deste capítulo. Refira-se, porém, que a definição pode ser apresentada de forma mais geral, no contexto dos espaços de Hilbert separáveis. Sendo H um tal espaço, um operador $T : \mathcal{D}(T) \subset H \rightarrow H$ diz-se um operador de Jacobi se*

- (i) *existe um sistema ortonormado completo (base hilbertiana) em H , $\{e_n\}_{n=0}^\infty$, tal que $\mathcal{D}(T)$ é um subespaço de H algebricamente gerado por $\{e_n\}_{n=0}^\infty$;*
- (ii) *a matriz do operador T relativamente à base $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ é da forma (4.3), onde $a_n, b_n \in \mathbf{C}$ e $a_n \neq 0$ para todo o n .*

Nas condições desta definição, tomando $e_{-1} = 0$, verifica-se que T satisfaz

$$Te_n = a_n e_{n-1} + b_n e_n + a_{n+1} e_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sucedem, porém, que sem hipóteses adicionais impostas às sucessões $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n\}_{n=0}^\infty$, T pode não ser limitado, nem auto-adjunto e, neste caso, pode admitir mais que uma extensão auto-adjunta. Estes factos tornam consideravelmente mais delicada a análise dos operadores de Jacobi, tomando com ponto de partida esta definição mais geral.

O exemplo seguinte refere-se a um operador de Jacobi de grande importância no estudo deste tipo de operadores.

Exemplo 4.5. *Seja $J_0 : \ell^2(\mathbf{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{C})$ o operador de Jacobi definido por*

$$J_0 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

J_0 satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) J_0 é limitado e auto-adjunto.
- (ii) $\|J_0\| = 2$.
- (iii) $\sigma(J_0) = [-2, 2]$.
- (iv) $\sigma_p(J_0) = \emptyset$, i.e., J_0 não tem valores próprios.

Provemos estas afirmações. É claro, pelo Teorema 4.3, que (i) se verifica. Este teorema justifica ainda que $\|J_0\| \leq 2$, pelo que para provar (ii) resta mostrar que também $\|J_0\| \geq 2$. Seja $x = (\xi_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbf{C})$. Então $J_0x = (\eta_n)_{n \geq 0}$, onde

$$\eta_n := \xi_{n-1} + \xi_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

($\xi_{-1} = 0$). Assim, para $x_N := \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}}_{N \text{ vezes}}, 0, 0, \dots \right) \in \ell^2(\mathbf{C})$, tem-se

$$\|x_N\| = 1, \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \|J_0x_N\|^2 = 4 - \frac{5}{N} \nearrow 4 \quad (N \rightarrow +\infty),$$

donde $\|J_0\| := \sup_{\|x\|=1} \|J_0x\| \geq 2$. Para provar (iii), notemos primeiramente que, novamente pelo Teorema 4.3, é $\sigma(J_0) \subset [-2, 2]$. Além disso, tem-se $\sigma(J_0) = [-2, 2]$. Uma justificação simples deste facto consiste em notar que $\frac{1}{2}J_0$ é a matriz de Jacobi associada aos polinómios de Chebyshev de segunda espécie e, portanto, de acordo com o Teorema 4.9 (que será estabelecido adiante), o espectro e o suporte da medida coincidem. Como, pelo Teorema 1.38, o suporte da medida associada a estes polinómios é $[-1, 1]$, segue-se que $\sigma(J_0) = [-2, 2]$. Adiante apresentaremos uma prova alternativa deste facto, utilizando uma técnica diferente baseada numa construção adequada de um isomorfismo entre ℓ^2 e o espaço de Hardy H^2 . Finalmente, justifique-se que J_0 não tem valores próprios. Seja $x = (\xi_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbf{C})$. Então $J_0x = \lambda x$ se e só se

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda \xi_0 \\ \xi_{n-1} + \xi_{n+1} = \lambda \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Então, pelo Teorema 1.38 deduz-se que

$$\xi_n = U_n \left(\frac{\lambda}{2} \right) \xi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

logo, pondo $\lambda = 2 \cos \theta \in [-2, 2]$, com $0 < \theta < \pi$ (note-se que isto não é restrição, pois, por (iii), se existirem valores próprios de J_0 terão que pertencer ao intervalo $[-2, 2]$), vem

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n|^2 = |\xi_0|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| U_n \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 = |\xi_0|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \right|^2,$$

e como $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \right|^2$ é uma série divergente, se fosse $\xi_0 \neq 0$ ter-se-ia $x \notin \ell^2(\mathbf{C})$, contrariando a escolha inicial de x . Mas, é óbvio que $\xi_0 = 0$ implica $x = 0$. Portanto, J_0 não pode ter valores próprios.

Proposição 4.6. *Se as entradas ao longo das diagonais da matriz de Jacobi J , definida por (4.3), forem convergentes para zero, i.e.,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \quad (4.6)$$

então J é um operador compacto em $\ell^2(\mathbf{C})$.

Demonstração. Seja $x = (\xi_i)_{i \geq 0} \in \ell^2(\mathbf{C})$. Então $Jx = (\eta_i)_{i \geq 0}$, com

$$\eta_i := a_i \xi_{i-1} + b_i \xi_i + a_{i+1} \xi_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

onde se considera $\xi_{-1} = 0$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, defina-se o operador J_n em ℓ^2 por

$$J_n x = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}, 0, 0, 0, \dots).$$

A hipótese (4.6) implica que as sucessões $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ e $\{b_j\}_{j=0}^{\infty}$ são limitadas, logo decorre do Teorema 4.3 que J_n é limitado em $\ell^2(\mathbf{C})$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Prove-se agora que $J_n \rightarrow J$ em $\mathcal{L}(\ell^2)$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Então, atendendo a (4.6), existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$|a_n| < \varepsilon/3 \quad \text{e} \quad |b_n| < \varepsilon/3$$

para todo o número inteiro $n \geq n_0$, e atendendo à definição de $J_n - J$, deduz-se imediatamente do Teorema 4.3 que para $n \geq n_0$ se verifica $\|J_n - J\| \leq \varepsilon$. Assim, podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|J_n - J\| \leq \varepsilon,$$

o que significa que $J_n \rightarrow J$ em $\mathcal{L}(\ell^2)$. Pelo Teorema 3.9, conclui-se que J é um operador compacto. \square

4.2 Operadores de Jacobi *versus* polinômios ortogonais

O operador de Jacobi T introduzido na Definição 4.1 (ou, equivalentemente, a matriz de Jacobi J em (4.3)), determina automaticamente uma SPO ortonormal, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, caracterizada pela relação de recorrência

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

($a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n), com condições iniciais

$$p_{-1}(x) = 0 \quad \text{e} \quad p_0(x) = 1. \quad (4.8)$$

Observe-se que, atendendo à definição de T ,

$$Te_n = a_n e_{n-1} + b_n e_n + a_{n+1} e_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.9)$$

Lema 4.7. *Nas condições da Definição 4.1, tem-se*

$$e_n = p_n(T)e_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

onde $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a SPO caracterizada por (4.7)-(4.8).

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n . Como $p_0(T) = I$ (operador identidade em H), então é claro que $e_0 = p_0(T)e_0$. Além disso considerando $n = 0$ em (4.9) tem-se $Te_0 = b_0 e_0 + a_1 e_1$, donde $a_1 e_1 = (T - b_0 I)e_0 = a_1 p_1(T)e_0$ e, portanto, como $a_1 \neq 0$, obtém-se $e_1 = p_1(T)e_0$, e fica provado (4.10) para $n = 1$. Suponhamos agora que se verifica (4.10) para $n = k$ e $n = k - 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, usando (4.9) e (4.7), vem

$$\begin{aligned} a_{k+1}e_{k+1} &= Te_k - a_k e_{k-1} - b_k e_k \\ &= (Tp_k(T) - a_k p_{k-1}(T) - b_k p_k(T))e_0 \\ &= a_{k+1}p_{k+1}(T)e_0, \end{aligned}$$

donde $e_{k+1} = p_{k+1}(T)e_0$, o que conclui a prova de (4.10). \square

Observação 4.8. *Uma SPO $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por (4.7)-(4.8), com $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para todo o n , determina uma matriz de Jacobi, J , e, portanto, um operador de Jacobi, T . Para um tal operador é válida a relação (4.10). Assim, o estudo da teoria dos operadores de Jacobi conduz ao estudo da teoria dos polinômios ortogonais (caso definido-positivo), e reciprocamente.*

Se $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ é uma SPO definida por (4.7) e (4.8), com $b_n \in \mathbb{R}$ e $a_n > 0$ para todo o n , então o Teorema de Favard (conjuntamente com o Teorema de representação) assegura a existência de uma única função de distribuição, ψ , com suporte infinito e com todos os momentos finitos, relativamente à qual $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal. O nosso objectivo, aqui, é mostrar que ψ é determinada pela família espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ associada ao operador de Jacobi J definido por (4.3), supondo J limitado. Esta representação permitirá obter uma relação entre o espectro de um operador de Jacobi (auto-adjunto) limitado (com entradas reais nas condições acima descritas) e o suporte da correspondente função de distribuição (medida de ortogonalidade).

Teorema 4.9. *Seja J um operador de Jacobi limitado, i.e., J é caracterizado pela matriz de Jacobi (4.3) com $a_n > 0$ e b_n real para todo o n , e*

$$\sup_{n \geq 1} a_n + \sup_{n \geq 0} |b_n| < +\infty .$$

Seja $\{p_n\}_{n \geq 0}$ a SPO ortonormada associada a J , definida por (4.7) e (4.8). Nestas condições,

- (i) *a função de distribuição ψ a respeito da qual $\{p_n\}_{n \geq 0}$ é ortogonal é dada por*

$$\psi(\lambda) := \langle E_\lambda e_0, e_0 \rangle = \|E_\lambda e_0\|^2, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

- (ii) *o suporte de ψ coincide com o espectro de J , i.e.,*

$$\text{supp}(\psi) = \sigma(J) .$$

Demonstração. Sob as hipóteses consideradas, e de acordo com o Teorema 4.3, J é um operador auto-adjunto limitado em $\ell^2(\mathbb{C})$. Pelo Teorema espectral, para todo o polinómio p , tem-se

$$p(J)x = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) dE_\lambda x, \quad x \in \ell^2(\mathbb{C}) . \quad (4.11)$$

É consequência imediata das propriedades da família espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ que a função $\psi(\lambda) := \langle E_\lambda e_0, e_0 \rangle$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) é não decrescente, contínua à direita e satisfaz $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \psi(\lambda) = 0$ e $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \psi(\lambda) = 1$. Isto significa que ψ é uma

função de distribuição (de probabilidade). Assim, usando (4.11) e o Lema 4.7, deduz-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda) d\psi(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda) d\langle E_\lambda e_0, e_0 \rangle = \langle p_n(T)p_m(T)e_0, e_0 \rangle \\ &= \langle p_n(T)e_0, p_m(T)e_0 \rangle = \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}, \end{aligned}$$

para todos os $m, n = 0, 1, 2, \dots$, o que prova (i). Prove-se agora (ii). Fixemos um número real $\lambda_0 \notin \sigma(J)$. Pelo Teorema 3.66 (ou Observação 3.67) existe um par de números reais (λ_1, λ_2) tal que $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ e

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\langle E_\lambda e_0, e_0 \rangle = 0.$$

Seja $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbf{C})$ (espaço das funções complexas de variável real, contínuas e com suporte compacto) com suporte de f contido em (λ_1, λ_2) . Então

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\psi(\lambda) \right| \leq \sup_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]} |f(\lambda)| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\|E_\lambda e_0\|^2 = 0. \quad (4.12)$$

Isto implica que $\lambda_0 \notin \text{supp}(\psi)$. De facto, se fosse $\lambda_0 \in \text{supp}(\psi)$, escolhendo f convenientemente, por exemplo, f não negativa e contínua e tal que $f(\lambda) = 0$ para $\lambda \notin [\lambda_1, \lambda_2]$ e $f(\lambda) = 1$ para $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$, com $\delta > 0$ escolhido de modo que $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta] \subset]\lambda_1, \lambda_2[$, ter-se-ia

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\psi(\lambda) \right| \geq \psi(\lambda_0 + \delta) - \psi(\lambda_0 - \delta) > 0,$$

contrariando (4.12). Conclui-se que $\text{supp}(\psi) \subset \sigma(J)$. Reciprocamente, seja $\lambda_0 \notin \text{supp}(\psi)$. Sejam λ_1 e λ_2 tais que

$$\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2, \quad [\lambda_1, \lambda_2] \cap \text{supp}(\psi) = \emptyset.$$

Então, e atendendo também aos Lemmas 3.64 e 4.7, tem-se

$$\langle (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) e_n, e_m \rangle = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p_n(\lambda)p_m(\lambda) d\psi(\lambda) = 0$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}_0$, donde se deduz que $\langle (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) x, y \rangle = 0$ para quaisquer $x, y \in \ell^2(\mathbf{C})$. Assim $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$, e decorre do Teorema 3.66 (ou Observação 3.67) que $\lambda_0 \notin \sigma(J)$. Logo, $\sigma(J) \subset \text{supp}(\psi)$, o que conclui a prova. \square

Corolário 4.10. *Nas condições do Teorema 4.9, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ é um sistema ortonormado completo (base hilbertiana) do espaço de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mu)$, onde μ é a medida de probabilidade associada à função de distribuição ψ .*

Demonstração. Sejam α e β números reais, com $\alpha < \beta$. Então, usando as propriedades da família espectral, tem-se

$$\langle E_{\alpha}e_0, e_0 \rangle = \langle E_{\beta}E_{\alpha}e_0, e_0 \rangle = \langle E_{\alpha}e_0, E_{\beta}e_0 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle E_{\alpha}e_0, e_k \rangle \langle E_{\beta}e_0, e_k \rangle, \quad (4.13)$$

sendo a última igualdade justificada pela identidade de Parseval. Por outro lado, para $k \in \mathbb{N}_0$, usando sucessivamente (para justificar cada uma das igualdades abaixo) a relação (4.10), o facto de T ser auto-adjunto, e o Teorema espectral, tem-se

$$\begin{aligned} \langle E_{\alpha}e_0, e_k \rangle &= \langle E_{\alpha}e_0, p_k(T)e_0 \rangle = \langle p_k(T)E_{\alpha}e_0, e_0 \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} p_k(\lambda) d\langle E_{\lambda}E_{\alpha}e_0, e_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\alpha} p_k(\lambda) d\langle E_{\lambda}e_0, e_0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} p_k d\mu. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, usando (4.13) e (4.14), podemos escrever

$$\langle E_{\alpha}e_0, e_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\alpha} d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\alpha} p_k d\mu \int_{-\infty}^{\beta} p_k d\mu. \quad (4.15)$$

Sejam χ_{α} e χ_{β} as funções características dos conjuntos $(-\infty, \alpha]$ e $(-\infty, \beta]$, respectivamente. Então $\chi_{\alpha}, \chi_{\beta} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mu)$, pois μ é limitada, e (4.15) pode reescrever-se na forma

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\alpha} \chi_{\beta} d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\alpha} p_k d\mu \int_{\mathbb{R}} \chi_{\beta} p_k d\mu.$$

Desta relação, e uma vez que toda a função escalonada é combinação linear de funções características, decorre que para quaisquer funções escalonadas f e g verifica-se

$$\int_{\mathbb{R}} f \bar{g} d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f p_k d\mu \overline{\int_{\mathbb{R}} g p_k d\mu}, \quad (4.16)$$

e por densidade das funções escalonadas decorre que (4.16) é igualmente válida para $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mu)$. Finalmente, observando que a relação (4.16) é uma identidade de Parseval para o sistema $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, conclui-se que $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ é um sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mu)$. \square

4.3 O operador $J_{0,k}$

O objectivo, nesta secção, é estabelecer um lema útil para a descrição do espectro de um operador de Jacobi periódico (o qual será analisado na secção seguinte), envolvendo um operador, $J_{0,k}$, que generaliza o operador $J_0 \equiv J_{0,1}$ introduzido no exemplo 4.5. Antes, porém, é conveniente introduzir a classe de Hardy, H^2 , que consiste no espaço de Hilbert das séries de potências

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad (c_j)_{j \geq 0} \in \ell^2,$$

munido com norma

$$\|f\| := \left(\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Observamos que, se $f \in H^2$ então $f(z)$ é holomorfa na bola unitária caracterizada por $|z| < 1$; para $|z| = 1$ define-se ainda (veja-se [18], e.g.)

$$f(z) := \lim_{r \nearrow 1} f(rz) \quad , \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt.$$

Lema 4.11. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e designe $J_{0,k}$ o operador definido em ℓ^2 por*

$$J_{0,k} = \begin{bmatrix} 0_k & I_k & 0_k & \dots \\ I_k & 0_k & I_k & \dots \\ 0_k & I_k & 0_k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

(matriz infinita, tridiagonal por blocos), onde 0_k e I_k designam, respectivamente, a matriz nula e a matriz identidade de ordem k . Então

- (i) $J_{0,k}$ é limitado e auto-adjunto em $\ell^2(\mathbb{C})$.

- (ii) $\|J_{0,k}\| = 2$.
 (iii) $\sigma(J_{0,k}) = \sigma_{ess}(J_{0,k}) = [-2, 2]$.

Demonstração. Notemos, primeiramente, que o operador $J_{0,k}$ é caracterizado por $J_{0,k}x = (\eta_j)_{j \geq 0}$, onde, para $x = (\xi_j)_{j \geq 0} \in \ell^2$,

$$\eta_j := \begin{cases} \xi_{k+j} & \text{se } 0 \leq j \leq k-1 \\ \xi_{j-k} + \xi_{k+j} & \text{se } j \geq k. \end{cases} \quad (4.18)$$

A afirmação (i) é fácil de justificar, e a prova de (ii) pode fazer-se adoptando uma técnica semelhante à que foi utilizada no exemplo 4.5, mas agora considerando

$$x_N = \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ vezes}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ vezes}}, 0, 0, 0, \dots \right)}_{N \text{ vezes}} \right), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Para provar (iii), vamos usar o isomorfismo entre ℓ^2 e a classe de Hardy, H^2 , definido por

$$x \equiv (\xi_j)_{j \geq 0} \in \ell^2 \mapsto f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \xi_j z^j \in H^2.$$

Por meio deste isomorfismo, $J_{0,k}$ é representado em H^2 por

$$(J_{0,k}f)(z) = \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right) f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^{j-k}, \quad f \in H^2. \quad (4.19)$$

Aqui, $J_{0,k}f$ representa a função de H^2 correspondente (pelo isomorfismo descrito) à sucessão $(\eta_j)_{j \geq 0}$ definida por (4.18), sendo $(\xi_j)_{j \geq 0}$ a sucessão correspondente (pelo isomorfismo) à função f dada em H^2 . Para justificar (4.19)

basta atender a que

$$\begin{aligned}
(J_{0,k}f)(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \eta_j z^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \xi_{k+j} z^j + \sum_{j=k}^{+\infty} \xi_{j-k} z^j \\
&= z^k \sum_{j=0}^{+\infty} \xi_j z^j + z^{-k} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \xi_j z^j - \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j z^j \right) \\
&= \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right) f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j z^{j-k} \\
&= \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right) f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^{j-k} .
\end{aligned}$$

Por definição de espectro, $\lambda \in \sigma(J_{0,k})$ se o operador $J_{0,k} - \lambda I$ não tem inversa limitada. Se $\lambda \notin [-2, 2]$ então $\lambda \notin \sigma(J_{0,k})$. De facto, como $J_{0,k}$ é auto-adjunto e $\|J_{0,k}\| = 2$, então $\sigma(J_{0,k}) \subset [-2, 2]$. De seguida daremos uma prova alternativa deste facto. As ideias contidas nesta demonstração alternativa serão úteis para mostrar que, efectivamente, $\sigma(J_{0,k}) = [-2, 2]$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Fixemos arbitrariamente $g \in H^2$ e consideremos a equação

$$(J_{0,k} - \lambda I) f = g ,$$

para $f \in H^2$. De acordo com (4.19), esta equação pode ser reescrita na forma

$$\left(z^k + \frac{1}{z^k} - \lambda \right) f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^{j-k} = g(z) ,$$

donde

$$f(z) = \frac{z^k g(z) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j}{z^{2k} - \lambda z^k + 1} . \quad (4.20)$$

Cada raiz z de

$$z^{2k} - \lambda z^k + 1 = 0 \quad (4.21)$$

é tal que $w = z^k$ é raiz de

$$w^2 - \lambda w + 1 = 0. \quad (4.22)$$

Designem w^- e w^+ as duas raízes de (4.22) e $\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_k^-, \xi_1^+, \xi_2^+, \dots, \xi_k^+$ as $2k$ raízes de (4.21), com $(\xi_m^-)^k = w^-$ e $(\xi_m^+)^k = w^+$. As raízes $\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_k^-$

são todas distintas entre si, e o mesmo sucede às raízes $\xi_1^+, \xi_2^+, \dots, \xi_k^+$, pois as primeiras k são as k raízes de índice k da equação $z^k = w^-$, e as restantes k são as k raízes de índice k de $z^k = w^+$.

Suponha-se que $\lambda \notin [-2, 2]$. Então as raízes w^- e w^+ de (4.22) são distintas, uma das quais tem módulo inferior a um e a outra módulo superior a um, digamos, $|w^-| < 1$ e $|w^+| > 1$ ⁽¹⁾, o que implica que as $2k$ raízes de (4.21) são também todas distintas, k das quais têm módulo menor que um e as restantes k têm módulo maior que um, i.e.,

$$|\xi_m^-| < 1 \quad \text{e} \quad |\xi_m^+| > 1, \quad m = 1, \dots, k.$$

Uma vez que $f \in H^2$, f tem que ser analítica para $|z| < 1$, logo cada zero ξ_m^- do denominador de (4.20) tem que ser compensado por um zero do numerador. Assim, deve verificar-se

$$(\xi_m^-)^k g(\xi_m^-) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (\xi_m^-)^j = 0, \quad m = 1, \dots, k. \quad (4.23)$$

Estas m igualdades constituem um sistema linear com k equações e k incógnitas (nas incógnitas $\frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ para $j = 0, 1, \dots, k-1$). Este sistema é possível e determinado, uma vez que o determinante do sistema é o determinante de Vandermond

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1^- & (\xi_1^-)^2 & \dots & (\xi_1^-)^{k-1} \\ 1 & \xi_2^- & (\xi_2^-)^2 & \dots & (\xi_2^-)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_k^- & (\xi_k^-)^2 & \dots & (\xi_k^-)^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (\xi_i^- - \xi_j^-),$$

que é diferente de zero porque $\xi_j^- \neq \xi_i^-$ para $i \neq j$. Do exposto deduz-se que dado $g \in H^2$, pode determinar-se de forma única $f \in H^2$ tal que

$$f(z) = \frac{z^k g(z) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j}{z^{2k} - \lambda z^k + 1},$$

¹ Com efeito, se alguma das raízes tivesse módulo igual a 1, digamos, $|w^-| = 1$, então também seria $|w^+| = 1$, pois $w^+ w^- = 1$, logo viria $|\lambda| = |w^- + w^+| \leq |w^-| + |w^+| = 2$, i.e., $\lambda \in [-2, 2]$, absurdo. Assim, $|w^-| \neq 1$, digamos $|w^-| < 1$, e como $w^- w^+ = 1$, necessariamente $|w^+| > 1$.

sendo o vector $(f^{(j)}(0)/j!)_{j=0}^{k-1}$ obtido como sendo a única solução do sistema (4.23). Consequentemente, o operador $J_{0,k} - \lambda I$ é bijectivo e, portanto, pelo teorema da aplicação aberta $J_{0,k} - \lambda I$ tem inversa limitada. Logo $\lambda \notin \sigma(J_{0,k})$. Note-se que o que acabámos de mostrar apenas prova que se $\lambda \notin [-2, 2]$ então $\lambda \notin \sigma(J_{0,k})$, i.e., $\sigma(J_{0,k}) \subset [-2, 2]$, o que já sabíamos!

Suponhamos, agora, que $\lambda \in [-2, 2]$. Neste caso as raízes w^- e w^+ de (4.22) têm valor absoluto igual a um ⁽²⁾, logo o mesmo sucede às raízes de (4.21), i.e.,

$$|\xi_m^-| = 1 = |\xi_m^+|, \quad m = 1, \dots, k.$$

Vamos provar que, neste caso, $\lambda \in \sigma(J_{0,k})$. Para tal, basta mostrar que pelo menos um zero do denominador de (4.20) (o qual é raiz de (4.21)) não é compensado pelo numerador, i.e., para uma escolha apropriada de g (por exemplo $g \equiv 1$) não existe f tal que $(J_{0,k} - \lambda I)f = g$. De facto, suponha-se primeiramente que

$$\xi_r^+ \neq \xi_s^-, \quad \forall r, s \in \{1, \dots, k\}, \quad r \neq s.$$

Como $\xi_1^-, \dots, \xi_k^-, \xi_1^+, \dots, \xi_k^+$ têm de ser zeros do numerador de (4.20) então deve verificar-se

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (\xi_m^-)^j = - (\xi_m^-)^k g(\xi_m^-), \quad m = 1, \dots, k, \quad (4.24)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (\xi_m^+)^j = - (\xi_m^+)^k g(\xi_m^+), \quad m = 1, \dots, k. \quad (4.25)$$

Aplicando a regra de Cramer aos sistemas (4.24) e (4.25), com $g \equiv 1$, obtemos (resp.)

$$f(0) = (-1)^k \xi_1^- \dots \xi_k^- \quad \text{e} \quad f(0) = (-1)^k \xi_1^+ \dots \xi_k^+,$$

donde

$$\xi_1^- \dots \xi_k^- = \xi_1^+ \dots \xi_k^+. \quad (4.26)$$

Como os pontos ξ_1^-, \dots, ξ_k^- são números complexos localizados numa circunferência de raio unitário, e igualmente espaçados uns dos outros ao longo da circunferência, e o mesmo sucede a ξ_1^+, \dots, ξ_k^+ , concluímos que existem $\alpha, \theta \in [0, 2\pi)$

² De facto, se $\lambda \in [-2, 2]$ então $w^- = \frac{\lambda - i\mu}{2}$ e $w^+ = \frac{\lambda + i\mu}{2}$, com $\mu := \sqrt{4 - \lambda^2}$.

tais que, a menos de reordenação,

$$\xi_m^- = e^{i\alpha+(m-1)\frac{2\pi}{k}} \quad \text{e} \quad \xi_m^+ = e^{i\theta+(m-1)\frac{2\pi}{k}}, \quad m = 1, \dots, k. \quad (4.27)$$

Daqui e de (4.26) deduz-se $e^{ik\theta} = e^{ik\alpha}$, o que implica que $\alpha = \theta$ e, portanto, $\xi_m^- = \xi_m^+$ para $m = 1, \dots, k$, o que é uma contradição. Suponha-se agora que

$$\exists r, s \in \{1, \dots, k\} : \xi_r^- = \xi_s^+.$$

Como $|\xi_r^-| = |\xi_s^+| = 1$, (4.27) implica que, a menos de reordenação, $\xi_m^- = \xi_m^+$ para todo o $m = 1, \dots, k$. Logo, pondo $\xi_m \equiv \xi_m^- = \xi_m^+$ ($m = 1, \dots, k$), segue-se que os ξ_m ($m = 1, \dots, k$) são zeros duplos do denominador de (4.20) e, conseqüentemente, deve verificar-se

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \xi_m^j + \xi_m^k g(\xi_m) = 0, \quad m = 1, \dots, k, \quad (4.28)$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} j \xi_m^{j-1} + k \xi_m^{k-1} g(\xi_m) + \xi_m^k g'(\xi_m) = 0, \quad m = 1, \dots, k. \quad (4.29)$$

Tendo em conta que ξ_1, \dots, ξ_k são raízes de índice k da unidade, temos $\xi_m^k = 1$ para todo o $m = 1, \dots, k$. Aplicando então a regra de Cramer ao sistema (4.28) concluímos que $f'(0) = 0$. Por outro lado se aplicarmos a regra de Cramer ao sistema formado pelas primeiras $k - 1$ equações de (4.29) obtemos $f'(0) = -k(-1)^k \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1}$. Decorre que $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} = 0$, o que é absurdo. Isto conclui a prova de que $\sigma(J_{0,k}) = [-2, 2]$. Omitimos a prova de que também $\sigma_{ess}(J_{0,k}) = [-2, 2]$, a qual se pode fazer usando argumentos que serão apresentados na secção seguinte. \square

4.4 Operadores de Jacobi periódicos

Fixemos um número inteiro $k \geq 2$. No que vai seguir-se, J_{per} designará a matriz de Jacobi periódica de período k definida por

$$J_{\text{per}} := \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ são sucessões de números k -periódicas, i.e.,

$$a_{mk+j} = a_j \quad \text{e} \quad b_{mk+j} = b_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (4.31)$$

para todo o $m = 0, 1, 2, \dots$, com $b_0 := b_k$. Assume-se também

$$a_j > 0, \quad b_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Pelo Teorema 4.3, J_{per} define um operador linear limitado e auto-adjunto em $\ell^2(\mathbb{C})$, com a operação usual de multiplicação de matrizes, tendo-se

$$\|J_{\text{per}}\| \leq 2 \max_{1 \leq j \leq k} a_j + \max_{1 \leq j \leq k} |b_j|.$$

O nosso objectivo é descrever o espectro, bem como o espectro essencial do operador J_{per} . Estas descrições foram realizadas por A. Matée, P. Nevai e W. Van-Assche em [17], bem como por A. Almendral-Vásquez em [1]. No que se segue, vamos proceder do seguinte modo: primeiro apresentamos as duas descrições acabadas de referir, e em seguida veremos como o espectro deste operador pode ser determinado usando o Teorema 4.9 e os resultados do Capítulo 2 sobre transformações polinomiais.

4.4.1 Descrição do espectro essencial de J_{per}

Os resultados desta secção estão contidos em [1]. Para cada $m = 0, 1, 2, \dots$, consideremos a sucessão de polinómios $\{P_n^{(m)}\}_{n \geq 0}$ gerada pela relação de recorrência a três termos

$$P_{n+1}^{(m)}(z) = (z - b_{n+m})P_n^{(m)}(z) - a_{n+m}^2 P_{n-1}^{(m)}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

condições iniciais $P_{-1}^{(m)}(z) = 0$ e $P_0^{(m)}(z) = 1$. Observe-se que $\{P_n^{(m)}\}_{n \geq 0}$ não é outra senão a sucessão dos polinómios associados (mónicos) de ordem m correspondente à SPO ortonormada associada à matriz de Jacobi J_{per} . Seja

$$q_k(z) := (a_1 a_2 \cdots a_k)^{-1} \left(P_k^{(0)}(z) - a_k^2 P_{k-2}^{(1)}(z) \right). \quad (4.32)$$

Qualquer combinação linear de potências de J_{per} também define um operador linear limitado em $\ell^2(\mathbb{C})$, logo $q_k(J_{\text{per}}) \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$.

Lema 4.12. *Seja J_{per} a matriz de Jacobi definida por (4.30)-(4.31) e seja q_k o polinómio dado por (4.32). Então*

$$q_k(J_{\text{per}}) = \begin{bmatrix} A_k & I_k & 0_k & \dots \\ I_k & 0_k & I_k & \dots \\ 0_k & I_k & 0_k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

onde A_k , I_k e 0_k denotam matrizes de ordem k , com I_k a identidade e 0_k a matriz nula.

Demonstração. Note-se que para $m = 0, 1, \dots$, a m -ésima potência de J_{per} é uma matriz simétrica. Assim, para $0 \leq m \leq k$, cada potência $(J_{\text{per}})^m$ pode escrever-se como uma matriz tridiagonal por blocos da forma

$$(J_{\text{per}})^m = \begin{bmatrix} s_m & (x_m)^t & 0_k & \dots \\ x_m & y_m & (x_m)^t & \dots \\ 0_k & x_m & y_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

onde x_m , y_m e s_m são matrizes de ordem k , com y_m simétrica e x_m triangular superior. (A notação z^t indica a transposta da matriz z .) Além disso os elementos da diagonal principal de x_m são zero excepto possivelmente para $m = k$. Em particular, para $m = 1$, tem-se

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_k \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots \\ a_1 & b_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_2 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Considere-se a matriz de ordem k definida por $J_k := x_1 + y_1 + (x_1)^t$. Prove-se por indução matemática que

$$J_k^m = x_m + y_m + (x_m)^t, \quad m = 0, 1, \dots, k. \quad (4.36)$$

Para $m = 0$ e $m = 1$ a igualdade verifica-se, obviamente. Suponha-se que o resultado é válido para um inteiro m tal que $0 \leq m \leq k - 1$ e prove-se que,

então, também é válido para $m + 1$. De facto, como $(J_{\text{per}})^{m+1} = (J_{\text{per}})^m J_{\text{per}}$, deduz-se

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m y_1 + y_m x_1 \\ (x_{m+1})^t &= y_m (x_1)^t + (x_m)^t y_1 \\ y_{m+1} &= x_m (x_1)^t + (x_m)^t x_1 + y_m y_1, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x_{m+1} + (x_{m+1})^t + y_{m+1} & \\ &= x_m y_1 + y_m x_1 + y_m (x_1)^t + (x_m)^t y_1 \\ &\quad + x_m (x_1)^t + (x_m)^t x_1 + y_m y_1. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Por outro lado, usando a hipótese de indução, vem

$$\begin{aligned} J_k^{m+1} &= J_k^m J_k = \left(x_m + y_m + (x_m)^t \right) \left(x_1 + y_1 + (x_1)^t \right) \\ &= x_m y_1 + y_m x_1 + y_m (x_1)^t + (x_m)^t y_1 \\ &\quad + x_m (x_1)^t + (x_m)^t x_1 + y_m y_1, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada pelo facto de x_m ser uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal iguais a zero, o que implica $x_m x_1 = (x_m)^t (x_1)^t = 0_k$. Assim, comparando a expressão obtida para J_k^{m+1} com (4.37) obtém-se $J_k^{m+1} = x_{m+1} + (x_{m+1})^t + y_{m+1}$, o que completa a prova de (4.36). Seja agora $p(\xi) \equiv \sum_{m=0}^k r_m \xi^m$ um polinómio qualquer de grau $\leq k$. Então

$$p(J_{\text{per}}) = \sum_{m=0}^k r_m (J_{\text{per}})^m = \begin{bmatrix} s & x^t & 0_k & \cdots \\ x & y & x^t & \cdots \\ 0_k & x & y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

onde x , y e s são matrizes de ordem k , com x triangular superior e y simétrica, que satisfazem

$$p(J_k) = x + y + x^t. \quad (4.39)$$

Designe J'_{per} a matriz tridiagonal periódica de dimensão infinita que se obtém de J_{per} substituindo a_k por $-a_k$. Então

$$p(J'_{\text{per}}) = \sum_{m=0}^k r_m (J'_{\text{per}})^m = \begin{bmatrix} s & -x^t & 0_k & \cdots \\ -x & y & -x^t & \cdots \\ 0_k & -x & y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

onde x , y e s são as mesmas matrizes de (4.38). Mas, se $J'_k := -x_1 + y_1 - (x_1)^t$, então verifica-se

$$-x + y - x^t = p(J'_k). \quad (4.40)$$

Constata-se facilmente (usando propriedades elementares dos determinantes) que os polinômios característicos de J_k e J'_k são iguais a (resp.)

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_k - J_k) &= -2a_1 \cdots a_k + Q_k(\lambda) \\ \det(\lambda I_k - J'_k) &= 2a_1 \cdots a_k + Q_k(\lambda), \end{aligned}$$

onde $Q_k(\lambda) := P_k^{(0)}(\lambda) - a_k^2 P_{k-2}^{(1)}(\lambda)$, logo, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$\begin{aligned} Q_k(J_k) &= 2a_1 \cdots a_k I_k \\ Q_k(J'_k) &= -2a_1 \cdots a_k I_k. \end{aligned}$$

Agora, tomando $p = Q_k$ em (4.39) e (4.40) obtém-se

$$\begin{aligned} Q_k(J_k) &= 2a_1 \cdots a_k I_k = x + y + x^t \\ Q_k(J'_k) &= -2a_1 \cdots a_k I_k = -x + y - x^t. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Daqui, somando, obtém-se $y = 0_k$, logo, como x é triangular superior, deduz-se também de (4.41) que $x = a_1 \cdots a_k I_k$, e a igualdade pretendida (4.33) decorre então de (4.38), tomando $p = q_k \equiv (a_1 \cdots a_k)^{-1} Q_k$. \square

O teorema seguinte foi estabelecido por A. Almendral-Vásquez [1]. (Destacamos que a prova se adapta ao contexto mais geral das matrizes de Jacobi com entradas complexas.)

Teorema 4.13. *Seja J_{per} o operador de Jacobi definido por (4.30). Então*

$$q_k(\sigma(J_{\text{per}})) = \sigma(q_k(J_{\text{per}})) = \sigma_p^f(q_k(J_{\text{per}})) \cup [-2, 2], \quad (4.42)$$

onde $\sigma_p^f(q_k(J_{\text{per}}))$ é um conjunto que contém apenas pontos isolados de $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$, os quais são valores próprios de multiplicidade finita do operador $q_k(J_{\text{per}})$. Em particular,

$$\sigma_{\text{ess}}(J_{\text{per}}) = \{z \in \mathbb{R} : q_k(z) \in [-2, 2]\}. \quad (4.43)$$

Demonstração. Seja $J := q_k(J_{\text{per}}) - J_{0,k}$. Então, $J \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$. Além disso, de acordo com a definição de $J_{0,k}$ e o Lema 4.12, $\dim \mathcal{R}(J) < \infty$, logo J é um operador compacto em $\ell^2(\mathbb{C})$. Assim, usando o Teorema de Weyl, tem-se

$$\sigma_{\text{ess}}(q_k(J_{\text{per}})) = \sigma_{\text{ess}}(J + J_{0,k}) = \sigma_{\text{ess}}(J_{0,k}) = [-2, 2], \quad (4.44)$$

sendo a última igualdade justificada pelo Lema 4.11. Por outro lado, pelo teorema de transformação do espectro (Teorema 3.40), tem-se

$$\begin{aligned} q_k(\sigma(J_{\text{per}})) &= \sigma(q_k(J_{\text{per}})) \\ &= \sigma_p^f(q_k(J_{\text{per}})) \cup \sigma_{\text{ess}}(q_k(J_{\text{per}})) \\ &= \sigma_p^f(q_k(J_{\text{per}})) \cup [-2, 2]. \end{aligned}$$

Isto prova (4.42). A relação (4.43) é consequência de (4.44) e do Teorema 3.72. \square

4.4.2 Descrição do espectro do operador J_{per}

O teorema seguinte, que caracteriza o espectro de J_{per} , foi estabelecido por A. Máté, P. Nevai e W. Van-Assche [17].

Teorema 4.14. *Seja J_{per} o operador de Jacobi definido por (4.30). Então, com possível exceção de um número finito de números reais, $\sigma(J_{\text{per}})$ é o conjunto dos números reais λ tais que*

$$|D_{0,k-1}(\lambda) - a_k^2 D_{1,k-2}(\lambda)| < 2 \prod_{j=1}^k a_j, \quad (4.45)$$

onde

$$D_{m,n} = \begin{vmatrix} b_m - \lambda & a_{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{m+1} & b_{m+1} - \lambda & a_{m+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} - \lambda & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n - \lambda \end{vmatrix} \quad (4.46)$$

se $m \leq n$, e $D_{m,n} = 1$ para $n < m$.

Observação 4.15. *Uma vez que o espectro é um conjunto fechado, aparentemente poderia pensar-se que $\sigma(J_{\text{per}})$ poderia ser descrito, de forma alternativa, como o conjunto dos números reais λ tais que*

$$|D_{0,k-1}(\lambda) - a_k^2 D_{1,k-2}(\lambda)| \leq 2 \prod_{j=1}^k a_j. \quad (4.47)$$

Acontece, porém, que o conjunto dos números reais λ descrito por (4.47) não é o fecho do conjunto dos números reais λ descrito por (4.45), uma vez que o conjunto descrito por (4.47) pode conter pontos isolados. É claro que pontos λ que não pertençam ao conjunto descrito por (4.45), mas pertençam ao seu fecho, são pontos do espectro, mas como existem no máximo $2k$ pontos λ que não pertencem ao conjunto descrito por (4.45) mas pertencem ao seu fecho, esses pontos (que pertençam, eventualmente, ao espectro) já estão contabilizados no enunciado do teorema.⁽³⁾

Demonstração do Teorema 4.14. Tal como para o estudo do operador $J_{0,k}$ anteriormente considerado (cf. seção 4.3), vamos fazer uso do espaço de Hardy H^2 . Seja $f \in H^2$. Então, f admite a representação

$$f(z) = \sum_{j=0}^{k-1} z^j f_j(z^k),$$

onde $z^j f_j(z^k)$ “recolhe” os termos com expoente congruente com $j \pmod{k}$ que figuram na série de potências que representa $f(z)$. Assim, o operador de Jacobi J_{per} pode ser representado em H^2 por

$$(J_{\text{per}}f)(z) = \sum_{j=0}^{k-1} (a_j z^{j-1} + b_j z^j + a_{j+1} z^{j+1}) f_j(z^k) - a_k z^{-1} f_0(0), \quad (4.48)$$

onde $a_0 := a_k$. Assim, para λ arbitrário, real ou complexo, tem-se

$$\begin{aligned} & ((J_{\text{per}} - \lambda I) f)(z) \\ &= (b_0 - \lambda) f_0(z^k) + a_1 f_1(z^k) + z^k a_0 f_{k-1}(z^k) \\ & \quad + \sum_{j=1}^{k-2} z^j (a_j f_{j-1}(z^k) + (b_j - \lambda) f_j(z^j) + a_{j+1} f_{j+1}(z^k)) \\ & \quad + z^{k-1} (-z^{-k} a_0 f_0(0) + z^{-k} a_0 f_0(z^k) \\ & \quad + a_{k-1} f_{k-2}(z^k) + (b_{k-1} - \lambda) f_{k-1}(z^k)) . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Seja $g \in H^2$, e ponha-se $g(z) = \sum_{j=0}^{k-1} z^j g_j(z^k)$. Considere-se a equação

$$(J_{\text{per}} - \lambda I) f = g . \quad (4.50)$$

³ Esta observação está contida em [17]; adiante faremos alguns comentários sobre estas questões.

De acordo com (4.49), esta equação pode escrever-se na forma matricial

$$M_k(\lambda, z)f(z^k) = \mathbf{g}(z^k) + z^{-k}a_k f_0(0)\mathbf{e}_{k-1}, \quad (4.51)$$

onde \mathbf{e}_j designa o vector coluna de \mathbb{R}^k cuja componente $j+1$ tem o valor 1 e cujas restantes componentes têm o valor 0 (para $0 \leq j \leq k-1$), $\mathbf{f} := [f_0, f_1, \dots, f_{k-1}]^t$, $\mathbf{g} := [g_0, g_1, \dots, g_{k-1}]^t$ e $M_k(\lambda, z)$ é dada por

$$M_2(\lambda, z) := \begin{bmatrix} b_0 - \lambda & z^2 a_2 + a_1 \\ z^{-2} a_2 + a_1 & b_1 - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{se } k = 2,$$

e

$$M_k(\lambda, z) := \begin{bmatrix} b_0 - \lambda & a_1 & 0 & \cdots & 0 & z^k a_k \\ a_1 & b_1 - \lambda & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{k-2} - \lambda & a_{k-1} \\ z^{-k} a_k & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & b_{k-1} - \lambda \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

se $k > 2$. Ora, $\lambda \notin \sigma(J_{\text{per}})$ se e só se a equação (4.51) admite uma única solução f (determinada por \mathbf{f}) em H^2 . (Observe-se que esta afirmação decorre essencialmente do Teorema da aplicação aberta; um argumento análogo foi descrito aquando do estudo do operador $J_{0,k}$ atrás analisado.) A equação (4.51) tem certamente soluções f , mas estas soluções podem ser funções com certas singularidades. A questão que se coloca é saber se as singularidades situadas no interior do círculo unitário fechado podem ser compensadas escolhendo $f_0(0)$ adequadamente, facto que determinará se a solução pertence ou não ao espaço H^2 . As singularidades da solução do sistema (4.51) resultam do facto de o determinante $\det(M_k(\lambda, z))$ deste sistema ter certos zeros. No entanto, dado $g_j \in H^2$, se encontrarmos uma solução única de (4.51) com $f_0 \in H^2$ então podemos também determinar $f_j \in H^2$ para $1 \leq j \leq k-1$, uma vez que podemos determinar estes f_j 's substituindo f_0 no sistema de equações dado em (4.51) e eliminando a primeira equação. Uma vez que o menor da matriz $M_k(\lambda, z)$ obtido após serem retiradas as 1ª linha e 1ª coluna é constante e não singular excepto para um número finito de valores de λ , então as soluções assim obtidas pertencerão a H^2 . (Note-se que o termo envolvendo z^{-k} no segundo membro da última equação do sistema (4.51) não dá origem a singularidades, pois este termo cancela com um termo semelhante que figura no primeiro membro.) Estes valores de λ (em

número finito) podem originar valores próprios de J_{per} , e constituem o eventual conjunto finito de valores do espectro $\sigma(J_{\text{per}})$ que não são dados por (4.45), como se refere no enunciado do teorema (que ainda não provámos!).

Agora, observe-se que

$$\begin{aligned} \det(M_k(\lambda, z)) \\ = (-1)^{k-1} (z^k + z^{-k}) \prod_{j=1}^k a_j - a_k^2 D_{1,k-2}(\lambda) + D_{0,k-1}(\lambda). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Fixemos $\lambda \in \mathbb{R}$ (pode excluir-se a análise do caso $\lambda \notin \mathbb{R}$, pois $\sigma(J_{\text{per}}) \subset \mathbb{R}$). Por um lado, se λ satisfaz (4.45), deduz-se de (4.53) que a equação

$$\det(M_k(\lambda, z)) = 0 \quad (4.54)$$

tem duas raízes para z^k (i.e., $2k$ raízes para z) sobre a circunferência do círculo unitário. De facto, se (4.54) se verificar então

$$z^k + z^{-k} = \frac{D_{0,k-1}(\lambda) - a_k^2 D_{1,k-2}(\lambda)}{(-1)^k \prod_{j=1}^k a_j} =: C_\lambda;$$

logo, como λ é real e (4.45) se verifica tem-se $z^k + z^{-k} = C_\lambda$, com $C_\lambda \in \mathbb{R}$ e $|C_\lambda| < 2$, logo fazendo $z^k = w$ deduz-se que a equação $w^2 - C_\lambda w + 1 = 0$ admite como soluções w_λ^- e w_λ^+ , definidas por

$$w_\lambda^\pm := \frac{C_\lambda \pm i\sqrt{4 - C_\lambda^2}}{2},$$

e conclui-se que, de facto, $|w_\lambda^\pm| = 1$. Por outro lado, se λ não satisfaz (4.47), então tem-se $z^k + z^{-k} = C_\lambda$, com $C_\lambda \in \mathbb{R}$ e $|C_\lambda| > 2$, logo a equação (4.54) tem duas raízes para z^k , uma no interior (topológico) do intervalo $[-1, 1]$ e a outra no exterior deste intervalo (a que correspondem k raízes para z no interior do círculo unitário, e outras k no exterior deste círculo). De facto, fazendo $z^k = w$ deduz-se que a equação $w^2 - C_\lambda w + 1 = 0$ admite como soluções w_λ^- e w_λ^+ , definidas por

$$w_\lambda^\pm := \frac{C_\lambda \pm \sqrt{C_\lambda^2 - 4}}{2},$$

logo $w_\lambda^+ > 1 \wedge -1 < w_\lambda^- < 1$ se $C_\lambda > 2$, e $w_\lambda^- < -1 \wedge -1 < w_\lambda^+ < 1$ se $C_\lambda < -2$.

Suponhamos que λ é real e tal que (4.47) não se verifica. Considere-se a solução para a componente f_0 do sistema (4.51). Usando a regra de Cramer, tem-se

$$f_0(z) = \frac{\det(\widetilde{M}(\lambda, z))}{\det(M_k(\lambda, z))}, \quad (4.55)$$

onde $\widetilde{M}(\lambda, z)$ é a matriz que se obtém de $M_k(\lambda, z)$ substituindo a primeira coluna de $M_k(\lambda, z)$ pelo vector coluna

$$[g_0(z^k), g_1(z^k), \dots, g_{k-1}(z^k) + z^{-k}a_k f_0(0)]^t.$$

Agora, observamos que

$$\begin{aligned} \det(\widetilde{M}(\lambda, z)) &= f_0(0) \left((-1)^{k-1} z^{-k} \prod_{j=1}^k a_j - a_k^2 D_{1,k-2}(\lambda) \right) \\ &\quad + g_0(z^k) D_{1,k-1}(\lambda) + L(g_1(z^k), \dots, g_{k-1}(z^k)), \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde $L(g_1, \dots, g_{k-1})$ é uma combinação linear de g_0, \dots, g_{k-1} . Seja ξ_1^k uma raiz para z^k da equação (4.54), pertencente ao interior do círculo unitário. Então, a não ser que λ satisfaça

$$(-1)^{k-1} \xi_1^{-k} \prod_{j=1}^k a_j - a_k^2 D_{1,k-2}(\lambda) = 0, \quad (4.57)$$

podemos escolher $f_0(0)$ de modo único tal que ξ_1^k é zero para z^k do polinómio $\det(\widetilde{M}(\lambda, z))$. Deste modo, f_0 definido por (4.55) pertence a H^2 , pelo que podemos determinar $f_1, f_2, \dots, f_{k-1} \in H^2$ tais que (4.51) se verifica. Conclui-se que se λ é real e tal que (4.47) não se verifica, então $\lambda \notin \sigma(J_{\text{per}})$, excepto para um número finito de valores de λ .

Mostre-se agora que a equação (4.57) só pode ser satisfeita por, no máximo, um número finito de valores (reais) de λ , desde que ξ_1 seja raiz de (4.54). Com efeito, as equações (4.54) (com $z = \xi_1$) e (4.57) implicam

$$(-1)^{k-1} \xi_1^k \prod_{j=1}^k a_j + D_{0,k-1}(\lambda) = 0. \quad (4.58)$$

De (4.58) e (4.57) obtém-se

$$\left(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\right)^2 = -D_{1,k-2}(\lambda)D_{0,k-1}(\lambda). \quad (4.59)$$

Esta é uma equação polinomial em λ e, portanto, conclui-se que (4.57) só é satisfeita para um número finito de valores (reais) de λ .

Finalmente, suponha-se que λ satisfaz (4.45) e prove-se que, neste caso, $\lambda \in \sigma(J_{\text{per}})$. Uma vez que o espectro é fechado e o conjunto descrito por (4.45) é aberto, pode ignorar-se um número finito de valores de λ , pelo que pode assumir-se que $D_{1,k-1}(\lambda) \neq 0$. Sejam ξ_1^k e ξ_2^k com $|\xi_1^k| = |\xi_2^k| = 1$ as duas raízes para z^k da equação (4.54). Tem-se $\xi_1^k \neq \xi_2^k$ como vimos atrás. Suponha-se que g_0 é um polinómio em z e $g_j \equiv 0$ para $1 \leq j \leq k-1$. Atendendo a (4.56), é impossível escolher $f_0(0)$ de modo que $f_0(z)$ dado por (4.55) pertença a H^2 para toda a escolha de g_0 . De facto, a expressão

$$f_0(0) \left((-1)^{k-1} z^{-k} \prod_{j=1}^k a_j - a_k^2 D_{1,k-2}(\lambda) \right) + g_0(z^k) D_{1,k-1}(\lambda)$$

teria que ter zeros para $z^k = \xi_1^k$ e $z^k = \xi_2^k$. Mas, pode sempre escolher-se g_0 tal que esta condição não seja verificada para toda a escolha de $f_0(0)$ (basta considerar $g(\xi_1^k) = g(\xi_2^k)$) e, portanto, a equação (4.51) não tem solução em H^2 . Logo $\lambda \in \sigma(J_{\text{per}})$, o que conclui a prova. \square

4.4.3 O espectro de J_{per} via transformações polinomiais

Nos dois parágrafos precedentes, caracterizámos o espectro essencial $\sigma_{\text{ess}}(J_{\text{per}})$ do operador J_{per} (Teorema 4.13) e descrevemos o espectro $\sigma(J_{\text{per}})$ a menos de um conjunto (de cardinalidade finita) excepcional de pontos (Teorema 4.14). Neste parágrafo veremos que estes resultados decorrem naturalmente do estudo apresentado no Capítulo 2, tendo em conta a ligação existente entre o espectro de um operador de Jacobi auto-adjunto limitado e o suporte da função de distribuição a respeito da qual é ortogonal a SPO ortonormada associada a este operador de Jacobi (Teorema 4.9). Com efeito, o nosso objectivo, aqui, é mostrar que $\sigma(J_{\text{per}})$ pode ser descrito por uma transformação polinomial do tipo estudado no Capítulo 2. O resultado seguinte refere-se apenas ao caso $k = 3$, mas o procedimento implícito na prova aplica-se para k arbitrário. Além disso, a técnica aqui utilizada (via uma transformação polinomial) permite identificar

exactamente o conjunto excepcional de pontos do espectro referido no Teorema 4.14 (e também no Teorema 4.13). A observação fundamental para esta via de aproximação ao problema consiste em notar que, a menos de factores constantes, os polinómios q_k e $D_{0,k-1} - a_k^2 D_{1,k-2}$ considerados nos Teoremas 4.13 e 4.14 coincidem com o polinómio T introduzido no Capítulo 2 (Teorema 2.1) na situação particular em que os coeficientes de recorrência são sucessões periódicas.

Teorema 4.16. *Considere-se o operador de Jacobi definido por (4.30) com período $k = 3$. Definam-se os polinómios*

$$\begin{aligned}\theta_2(x) &= (x - b_0)(x - b_1) - a_1, \\ T(x) &= (x - b_0)(x - b_1)(x - b_2) - (a_1 + a_2 + a_3)(x - b_2) \\ &\quad + a_2(b_0 - b_2) + a_3(b_1 - b_2),\end{aligned}$$

designem z_1 e z_2 os zeros de θ_2 ,

$$\Sigma := T^{-1}([-2\sqrt{a_1 a_2 a_3}, 2\sqrt{a_1 a_2 a_3}])$$

(Σ é uma reunião de três intervalos fechados), e ponha-se

$$m_1 := 1 - \min \left\{ 1, \frac{a_2 b_0 - z_1}{a_3 b_1 - z_1} \right\}, \quad m_2 := 1 - \min \left\{ 1, \frac{a_2 b_0 - z_2}{a_3 b_1 - z_2} \right\}.$$

Então

$$\sigma_{ess}(J_{\text{per}}) = \Sigma$$

e

$$\sigma(J_{\text{per}}) = \begin{cases} \Sigma & \text{se } m_1 = 0, m_2 = 0; \\ \Sigma \cup \{z_2\} & \text{se } m_1 = 0, m_2 > 0; \\ \Sigma \cup \{z_1\} & \text{se } m_1 > 0, m_2 = 0; \\ \Sigma \cup \{z_1, z_2\} & \text{se } m_1 > 0, m_2 > 0. \end{cases}$$

Demonstração. É consequência imediata do Teorema 4.9 e dos resultados do Capítulo 2, nomeadamente, da Observação 2.10 (consequência do Teorema 2.9) e do Lema 2.8 (atender também a (2.26)). \square

Observação 4.17. *O resultado precedente mostra que para $k = 3$ o espectro de J_{per} é constituído pelo valores reais λ que satisfazem (4.47) juntamente com dois*

eventuais pontos, que são os zeros do polinómio θ_2 . Isto sugere que, para k arbitrário, não existem pontos isolados do espectro que satisfaçam (4.47). Por outro lado, os possíveis pontos adicionais do espectro deverão ser os zeros de θ_{k-1} , os quais pertencerão a $\sigma(J_{\text{per}})$ sempre que o valor da correspondente “massa” (que figura na medida de ortogonalidade) seja não nulo. Isto é consistente com os factos provados na demonstração do Teorema 4.14. De facto, decorre desta demonstração que entre os possíveis pontos excepcionais (em número finito) de $\sigma(J_{\text{per}})$ estão os números reais λ que satisfazem a equação (4.59), e é fácil de justificar que esta equação é satisfeita pelos zeros de $\theta_{k-1}(\lambda)$. Com efeito, tendo em conta a definição (4.46) de $D_{m,n}(\lambda)$, deduz-se de (1.29) e (1.31) que

$$D_{0,k-2}(\lambda)D_{1,k-1}(\lambda) - D_{0,k-1}(\lambda)D_{1,k-2}(\lambda) = \prod_{j=1}^{k-1} a_j^2,$$

e basta agora observar que $\theta_{k-1}(\lambda) = D_{0,k-2}(\lambda)$, pelo que a equação (4.59) é equivalente a

$$\theta_{k-1}(\lambda)D_{1,k-1}(\lambda) = 0.$$

As questões acabadas de referir foram objecto de discussão em [17, pg. 520], e parece-nos claro que estas questões, bem como as mencionadas na Observação 4.15, podem ser analisadas com a abordagem aqui apresentada, via transformações polinomiais.

4.5 Operadores de Jacobi assintoticamente periódicos

Para concluir esta monografia, vamos discutir o caso em que no operador de Jacobi (4.1) as entradas (da matriz infinita (4.3)) formam sucessões periódicas em limite, i.e., vamos analisar o operador

$$J_{\text{aper}} := \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_1 & 0 & \cdots \\ \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots \\ 0 & \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

onde as sucessões $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\tilde{b}_n\}_{n=0}^\infty$ são assintoticamente periódicas de período k , no seguinte sentido: existem números $a_j > 0$ e $b_j \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{a}_{mk+j} = a_j \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{b}_{mk+j} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (4.61)$$

(Claro, considera-se também $\tilde{a}_{mk+j} > 0$ e $\tilde{b}_{mk+j} \in \mathbb{R}$ para todos os valores de $m = 0, 1, 2, \dots$ e $j = 1, 2, \dots, k$.) Este operador J_{aper} é chamado **operador de Jacobi assintoticamente periódico**.

O espectro de J_{aper} foi essencialmente descrito por Ya. L. Geronimus [9], em termos de frações contínuas. De seguida apresentamos a descrição (segundo [17]) deste espectro, usando o Teorema de Weyl, uma vez que J_{aper} pode ser considerado como uma perturbação compacta do operador J_{per} (matriz periódica, dada como em (4.30) com as entradas a_j e b_j ($j = 1, \dots, k$) definidas por (4.61)).

Teorema 4.18. *Seja J_{aper} o operador de Jacobi assintoticamente periódico caracterizado por (4.60) e (4.61), e seja J_{per} o operador de Jacobi periódico caracterizado por (4.30), cujas entradas são dadas pelos valores dos limites em (4.61). Então*

$$\sigma_{\text{ess}}(J_{\text{aper}}) = \sigma_{\text{ess}}(J_{\text{per}}), \quad (4.62)$$

e $\sigma(J_{\text{aper}})$ consiste na reunião do fecho do conjunto dos números reais λ que satisfazem (4.45) com um conjunto limitado e numerável (cujos pontos de acumulação pertencem a $\sigma(J_{\text{aper}})$).

Demonstração. O operador J_{aper} pode escrever-se como a soma de dois operadores de Jacobi,

$$J_{\text{aper}} = J_{\text{per}} + J_K,$$

onde

$$J_K := \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 - b_0 & \tilde{a}_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \tilde{a}_1 - a_1 & \tilde{b}_1 - b_1 & \tilde{a}_2 - a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \tilde{a}_2 - a_2 & \tilde{b}_2 - b_2 & \tilde{a}_3 - a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_3 - a_3 & \tilde{b}_3 - b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Atendendo ao Teorema 4.3, este operador J_K é limitado e auto-adjunto. Além disso, por (4.61) e pela Proposição 4.6, J_K é compacto. A conclusão decorre

então do Teorema de Weyl e do Teorema 4.14, e tendo em conta a definição de espectro essencial de um operador. \square

Bibliografía

- [1] A. ALMENDRAL-VÁZQUEZ: The spectrum of a periodic complex Jacobi matrix revisited, *Journal of Approximation Theory* **105** (2000) 344-351.
- [2] R. ÁLVAREZ-NODARSE, J. PETRONILHO, N.R. QUINTERO: On some tridiagonal k -Toeplitz matrices: algebraic and analytical aspects. Applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **184** (2005) 518-537.
- [3] L. ARBEY-GOMES: *Análisis funcional, polinomios ortogonales y un teorema de Markoff*, Universidad Nacional de Colombia, 1987.
- [4] J. CHARRIS, M.E.H. ISMAIL, S. MONSALVE: On sieved orthogonal polynomials X: general blocks of recurrence relations, *Pacific Journal of Mathematics* **163** (1994) 237-267.
- [5] J. CHARRIS, G. SALAS, V. SILVA: Polinomios ortogonales relacionados com problemas espectrales, *Revista Colombiana de Matemáticas* **27** (1991) 35-80.
- [6] T.S. CHIHARA: *An Introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [7] C.M. DA FONSECA, J. PETRONILHO: Explicit inverse of a tridiagonal k -Toeplitz matrix, *Numerische Mathematik* **100** (2005) 156-182.
- [8] J. GERONIMO, W. VAN ASSCHE: Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping, *Transactions of the American Mathematical Society* **308** (1988) 559-581.
- [9] YA.L. GERONIMUS: Sur quelques équations aux différences finies et les systèmes correspondants des polynômes orthogonaux, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academ. Sci. l'URSS* **29** (1940) 536-538.

- [10] M.E.H. ISMAIL: On Sieved Orthogonal Polynomials III: Orthogonality on Several Intervals, *Transactions of the American Mathematical Society* **249** (1986) 89-111.
- [11] E. KOELINK: Spectral theory and special functions, *Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions*, 45-84, Adv. Theory Spec. Funct. Orthogonal Polynomials, Nova Sci. Publ., Hauppauge, New York, 2004.
- [12] E. KREYSZIG: *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, 1989.
- [13] F. MARCELLÁN, J. PETRONILHO: Eigenproblems for tridiagonal 2–Toeplitz matrices and quadratic polynomial mappings, *Linear Algebra and Its Applications* **260** (1997) 169-208.
- [14] F. MARCELLÁN, J. PETRONILHO: Orthogonal polynomials and cubic polynomial mappings I, *Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions* **8** (2000) 88-116.
- [15] F. MARCELLÁN, J. PETRONILHO: Orthogonal polynomials and cubic polynomial mappings II: the positive-definite case, *Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions* **9** (2001) 11-20.
- [16] F. MARCELLÁN, J. PETRONILHO: Orthogonal polynomials and quadratic transformations, *Portugaliæ Mathematica* **56**(1) (1999) 81-113.
- [17] A. MÁTÉ, P. NEVAI, W. VAN-ASSCHE: The supports of measures associated with orthogonal polynomials and the spectra of the related self-adjoint operators, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **21** (1) (1991) 501-527.
- [18] E.M. NIKISHIN, V.N. SOROKIN: *Rational approximations and orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, 92, AMS, Rhode Island, 1991.
- [19] F. RIESZ, B. SZ-NAGY: *Functional Analysis*, Dover, New York, 1990 (traduzido da edição original: Berlin, 1956).
- [20] J.A. SAMPAIO MARTINS: *Elementos de Análise Funcional*, Coimbra, 1988.
- [21] M.H. STONE: *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, AMS Coll. Publ., 15, New York, 1932.
- [22] W. VAN-ASSCHE: Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind, *Jornal of Computational and Applied Mathematics* **37** (1991) 237-249.