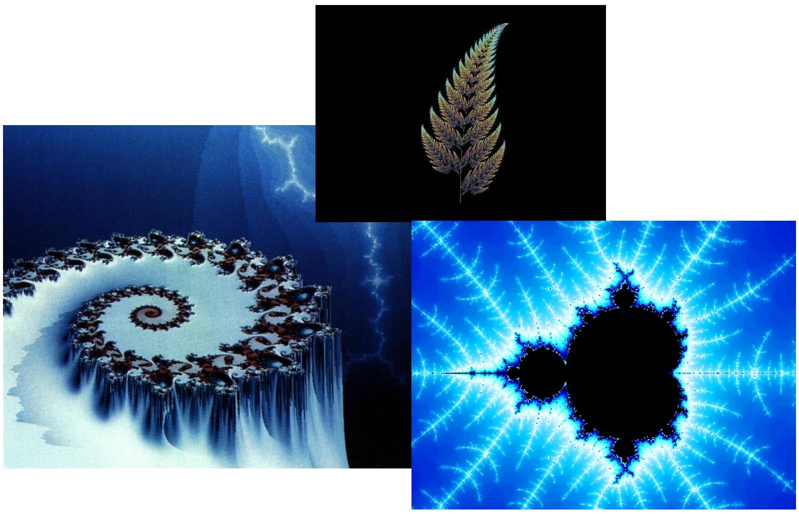
UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Geometria Fractal



Fundamentos e Ensino da Álgebra
2002-2003

ÍNDICE

	Página
Introdução..	3
O "Pai" dos Fractais: Benoit Mandelbrot..	5
O que é um Fractal?..	10
Características de um Fractal...	12
Geometria Euclidiana e Geometria Fractal...	20
Estudo de alguns fractais:	
1. Linha Costeira de uma Região..	23
2. O Floco de Neve de Koch..	25
3. O Triângulo de Sierpinski..	33
4. O Jogo do Caos...	38
5. A Curva de Peano..	40
6. O Conjunto de Mandelbrot...	41
Aplicações da Geometria Fractal..	47
Geometria Fractal no Ensino Secundário...	51
Conclusão..	54
Bibliografia..	56

INTRODUÇÃO

"Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo, e nem o raio viaja em linha recta..."

Benoit Mandelbrot

Existe algo único e distintivo sobre as criações mais belas da Natureza. As montanhas parecem-se sempre com montanhas, mesmo que difiram em pequenos detalhes. O aspecto da montanha tem tanto de indefinido como de indiscutível... E se é válido para montanhas também é válido para nuvens, rios, árvores e por aí em diante...

Nos últimos vinte anos um novo tipo de geometria permitiu ao Homem compreender e reconstruir muitas das imagens complexas da Natureza, estendendo-se desde aspectos macroscópicos das nuvens até aspectos microscópicos do sistema vascular humano.

Durante séculos os objectos e os conceitos da Geometria Euclidiana foram considerados como os que melhor descreviam o mundo em que vivemos. O Homem observou a Natureza concebendo conceitos de formas, figuras planas, corpos, volumes, rectas e curvas. A Lua e o Sol foram representados como discos; o raio de luz deu a ideia de linha recta; as margens de algumas folhas e o arco-íris a ideia de curva; os troncos de algumas árvores e as montanhas deram ideia de formas muito variadas.

Actualmente, surge um novo ramo da geometria que completa as irregularidades da Natureza – Geometria Fractal – que explica certos fenómenos de turbulência em que a Geometria Euclidiana se revelava insuficiente. Figuras que no início do século eram vistas como "monstros" matemáticos, têm hoje um papel notável na interpretação da realidade.

Surge assim a Geometria Fractal, por Benoit Mandelbrot (matemático franco-polaco, nascido na Polónia, que "descobriu" esta geometria no fim década de setenta), quebrando o determinismo matemático e completando a Geometria Euclidiana, possibilitando trabalhar com as imperfeições da Natureza que nos rodeiam.

"Fractais são formas igualmente complexas no detalhe e na forma global." Esta é a definição de fractal de Mandelbrot.

Com a realização deste trabalho (inserido na disciplina de Fundamentos e Ensino da Álgebra) e posterior apresentação pretendemos dar a conhecer este novo tipo de geometria. Como futuros professores, e com a progressiva implementação deste tema no ensino secundário (ao nível do 11º Ano de escolaridade), a importância deste trabalho torna-se obvia. Além disso, o facto da Geometria Fractal ter muitas aplicações fora da Matemática, como na Economia, Meteorologia, Medicina, Computação, Arte, Física, História, Astronomia, Biologia, Ciências Humanas, Arquitectura, torna-a muito importante nos dias de hoje, quer para "matemáticos" quer para o cidadão comum.

O “PAI” DOS FRACTAIS: BENOIT MANDELBROT

"As imagens que calculei com a minha teoria matemática assemelhavam-se curiosamente à realidade: e se eu podia imitar a natureza, era porque provavelmente teria descoberto um dos seus segredos..."

Benoit Mandelbrot

Benoit Mandelbrot nasceu a 20 de Novembro de 1924, em Varsóvia, capital da Polónia. A sua família era judaica e originária da Lituânia; o pai trabalhava como fabricante de roupa.

Em 1936, a família mudou-se para Paris onde um tio paterno, chamado Szolem, ensinava matemática na Universidade. Benoit cresceu entre matemáticos, desenvolvendo um interesse especial pela geometria. O tio, que trabalhava em análise avançada (Cálculo), não aprovou o seu interesse, pois partilhava a opinião de muitos matemáticos da altura que a geometria tinha chegado ao fim e era seguida somente por estudantes principiantes.

Em 1944, Benoit fez exames para entrar em universidades francesas.

Embora nunca tivesse estudado álgebra avançada ou cálculo, Benoit descobriu que a sua familiaridade e dedicação à geometria o tinha ajudado a explicar problemas noutros ramos da matemática em formas familiares.

Na Escola Politécnica de Paris, Mandelbrot encontrou um matemático com um grande espírito de aventura – Paul Lévy – que o ajudou a aprender a olhar para os fenómenos matemáticos na natureza.

Em 1952, Mandelbrot obteve o seu Doutoramento na Universidade de Paris. A sua tese de doutoramento agregou ideias de termodinâmica, da cibernética de Norbert Wiener e da Teoria dos Jogos de John von Neumann. Mais tarde Mandelbrot disse que a tese estava pobremente escrita e mal organizada, mas que reflectia o seu esforço continuado para juntar os novos caminhos do mundo matemático e da física.

Entre 1953 e 1954, Mandelbrot, como muitos dos "refugiados matemáticos", foi para o Instituto de Estudos Avançados em Princeton, onde continuou a explorar campos muito diferentes da Matemática.

Em 1955, voltou para França e casou com Aliete Kagan. O trabalho que agregaria todos os interesses de Mandelbrot começou em 1958 quando ele aceitou uma posição no Departamento de Investigação da "International Business Machines" (IBM).

Mas recuemos no tempo e vejamos como surgiram as primeiras ideias de fractais, embora não ditos como tal. Euclides (famoso matemático grego) enquanto caminhava pela praia notou que a areia, vista como um todo, se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, mas era também composta de pequenos pontos visíveis. A partir daí, Euclides empenhou-se em provar, matematicamente, que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples, como por exemplo cubos, esferas e outras.

Como Euclides estava concentrado nas formas não ligou à dimensão, mas lá estava a chave para o seu pensamento inicial: um grão de areia separadamente, apresenta três dimensões (largura, altura e profundidade) enquanto a superfície arenosa da praia é visualmente plana, ou seja possui apenas duas dimensões.

E foi nisso que Mandelbrot se baseou, descrevendo a ideia de Euclides matematicamente, apenas acrescentando a questão da dimensão. Aí surgiu a denominação de Fractais.

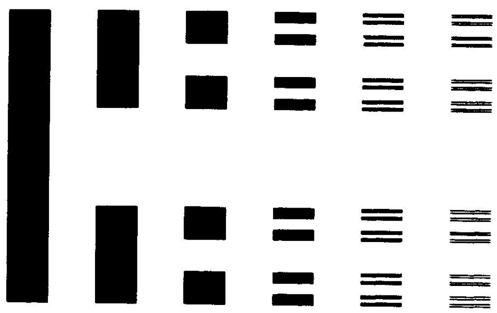
No início dos anos 80, Mandelbrot nomeou – ao invés de descobrir ou inventar – os fractais, para classificar certos objectos que não possuíam dimensão inteira, mas sim fraccionária. Quando estava a preparar a sua primeira obra importante sobre fractais para a publicação de um livro, Mandelbrot sentiu necessidade de encontrar um nome para a sua geometria. Deu consigo a consultar um dicionário de latim do seu filho, onde encontrou o adjectivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar. Criou, então, a palavra **fractal**.

Há no entanto uma série de acontecimentos anteriores, que sem os seus protagonistas o saberem, abriram caminho para que esta iniciativa de Mandelbrot pudesse surgir.

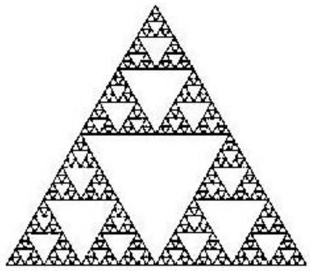
Entre a segunda metade do séc. XIX e a primeira do séc. XX, foram sendo propostos vários objectos matemáticos com características especiais e que foram durante muito tempo considerados "*monstros matemáticos*", já que desafiavam as noções comuns de infinito e para os quais não havia uma explicação objectiva. São exemplos disso:

- Os trabalhos sobre o movimento browniano de Roger Brown (1827), Perrin, Einstein (e outros, em 1910), Wiener (1920) e Paul Lévy;
- A dimensão de Hausdorff (1868-1942) e Besiovitch (1935);
- As poeiras de Cantor (1845-1918);

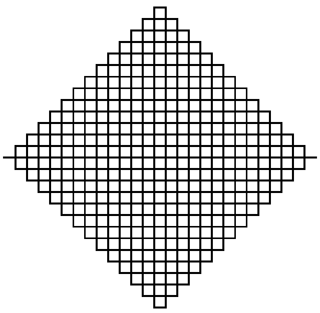
Os 5 primeiros passos da construção do conjunto de Cantor

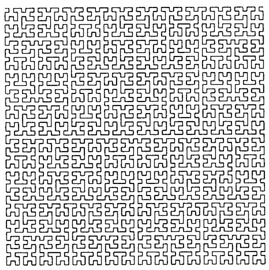


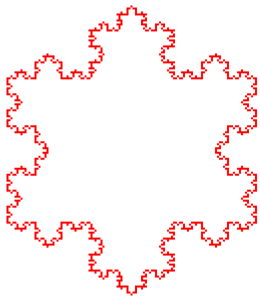
- Poincaré (1854-1912), que foi provavelmente o primeiro a compreender e expor a noção de Caos, bem como um sem número de outros Homens da Ciência que estabeleceram os princípios que estariam na base da descoberta dos fractais;
- Trabalhos sobre previsão meteorológica e turbulência de Lewis Richardson (1881-1953) aproximam-se surpreendentemente do conceito de Geometria Fractal;
- O Triângulo de Sierpinski (1882-1969);



- As curvas de Peano, Hilbert e Koch (início do séc. XX);





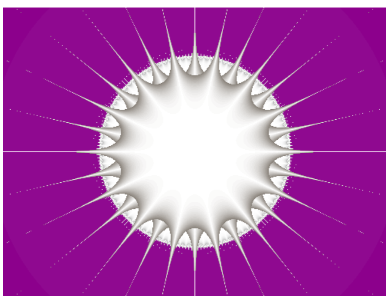


Modelo da Curva de Peano

Modelo da Curva de Hilbert

Modelo da Curva de Koch

Gaston Julia e Pierre Fatou apresentaram, em 1918, um trabalho sobre processos iterativos envolvendo números complexos que mais tarde viriam a ser conhecidos como “Conjuntos de Julia”;



Modelo de um fractal

do Conjunto de Julia

Foi no entanto, a partir da segunda metade deste século, que os acontecimentos se começariam a suceder cada vez mais rapidamente. Edward Lorenz, um meteorologista americano dedicava-se em 1961, apoiado por um computador tanto quanto possível evoluído para a época, à ingrata tarefa de aumentar a fiabilidade das previsões meteorológicas.

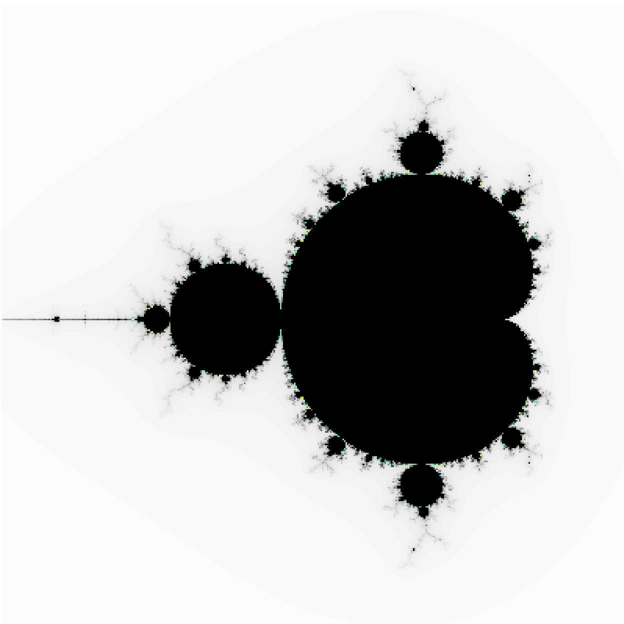
Pouco tempo depois, já na década de 70, James Yorke viria a encontrar nos trabalhos de Lorenz a chave para os problemas sobre os quais se debruçava, dando ao Caos o seu nome e juntamente com outros, como May ou Hoppensteadt, divulgaria esta nova Ciência acabada de criar.

Chegou-se então à altura em que as condições estavam criadas para o aparecimento de um novo conceito: a **Geometria Fractal**, apadrinhada por Benoit Mandelbrot.

O fractal que tem o nome de conjunto de Mandelbrot, talvez seja o mais complexo objecto conhecido pelos matemáticos, como revelam as imagens geradas por computador, à medida que examinam níveis cada vez mais altos de ampliação o observador vê-se diante de um desfile interminável de volutas, rendilhados e formas que se assemelham à totalidade do conjunto.

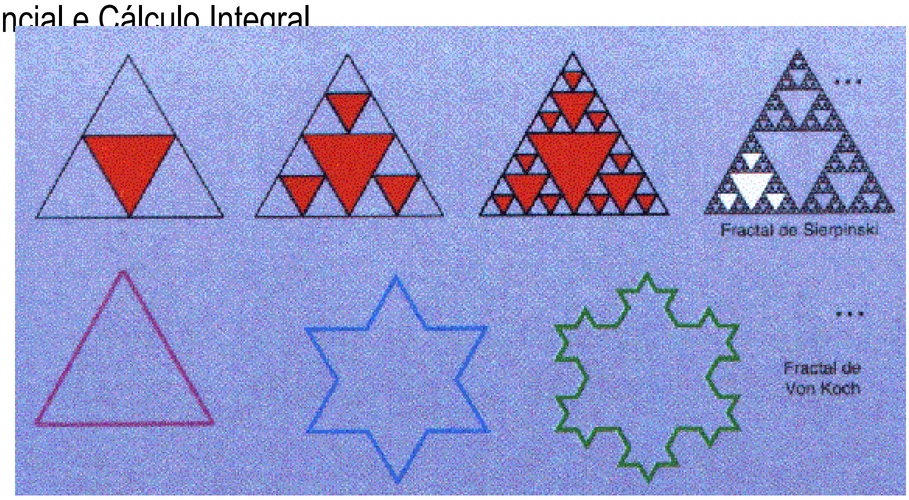
Conjunto

de Mandelbrot

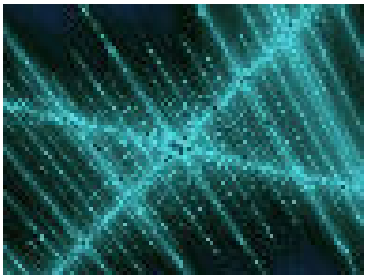


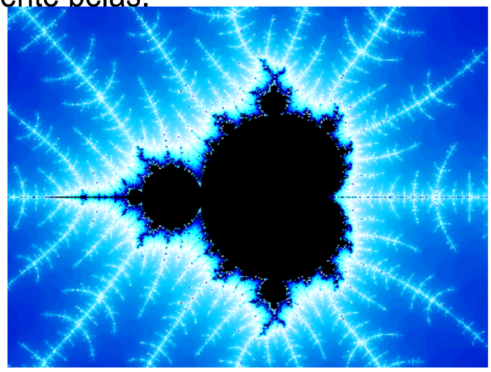
O QUE É UM FRACTAL?

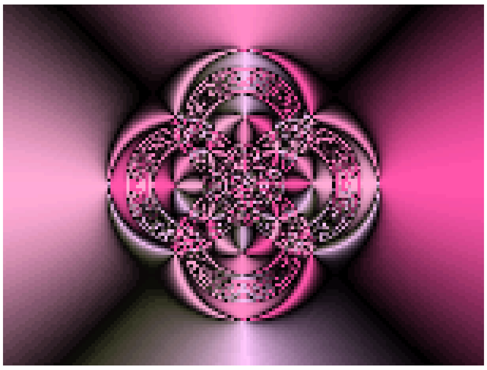
O conceito de sucessão e, especialmente, o de limite, estão na base da Análise Infinitesimal, um dos mais importantes ramos da Matemática, pelas suas prodigiosas aplicações às ciências experimentais. Pode dizer-se que o progresso tecnológico do século XIX e do século XX se deveu, em grande parte, ao desenvolvimento vertiginoso da Análise Infinitesimal nas duas vertentes – Cálculo Diferencial e Cálculo Integral.



De sucessões de imagens como estas, definidas por regras muito simples, conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se, porém, figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora aí entra em cena a enorme capacidade de ampliação dos modernos computadores que torna possível visualizar os termos avançados destas sucessões, fornecendo imagens incrivelmente belas.







O limite de uma sucessão de figuras como as anteriores é um fractal.

De um modo mais formal, um fractal é uma forma geométrica irregular ou fragmentada que pode ser subdividida em partes, e cada parte será (pelo menos aproximadamente) uma cópia reduzida da forma toda. Os fractais são geralmente semelhantes entre si e independentes da escala considerada.

Tecnicamente, um fractal é um objecto que não perde a sua definição formal à medida que é ampliado, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. O mesmo não acontece a uma circunferência, que parece perder a sua curvatura à medida que ampliamos uma das suas partes.

CARACTERÍSTICAS DE UM FRACTAL

As três características principais que caracterizam os fractais são:

- a auto-semelhança;
- a sua dimensão;
- a complexidade infinita.

"...E também o mundo,
Com tudo aquilo que contém,
Com tudo aquilo que nele se desdobra
E afinal é a mesma coisa variada em cópias iguais."

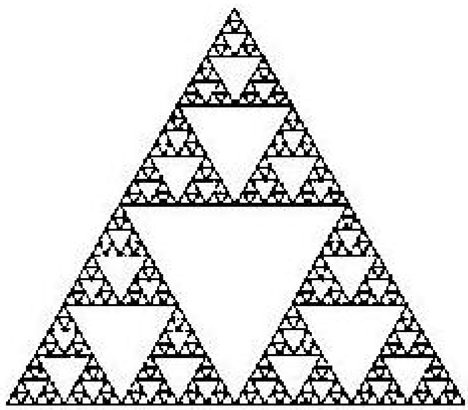
Fernando Pessoa – Poesias de Álvaro de Campos

A **auto-semelhança** de um fractal baseia-se no seguinte pressuposto: o conjunto total é constituído por pequenas réplicas desse mesmo conjunto, ou seja, qualquer que seja a ampliação considerada, obteremos sucessivas cópias do objecto inicial. Convém agora distinguir dois tipos diferentes de auto-semelhança: a exacta e a aproximada (ou estatística).

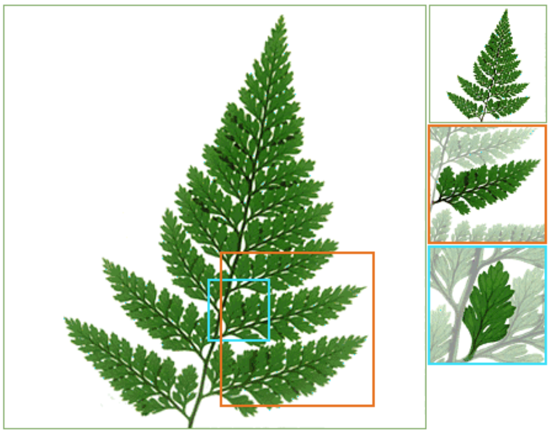
A auto-semelhança exacta é obviamente um conceito artificial, pois não é possível encontrar na Natureza objectos rigorosamente iguais a si próprios. Formalmente, uma figura possui auto-semelhança exacta se, para qualquer dos seus pontos, existe uma vizinhança que contém uma parte da figura semelhante a toda a figura. Apenas em termos abstractos podemos conceber tal situação. O mesmo já não se pode dizer em relação à auto-semelhança aproximada, que não sendo também verdadeiramente real, pois estamos limitados quanto mais não seja pela escala atómica, encontra boas aproximações em formas naturais.

No caso da Carpete de Sierpinski, que estudaremos em pormenor mais à frente, estamos perante uma auto-semelhança exacta.

Triângulo ou Carpete
De Sierpinski



Por exemplo, no caso de determinadas árvores podemos encontrar uma certa semelhança entre as pequenas folhas que constituem um pequeno ramo, que por sua vez, constitui conjuntamente com outros ramos maiores e que assim sucessivamente irão gerar uma árvore que afinal não é muito diferente do raminho inicial. Estamos perante a auto-semelhança aproximada, como podemos observar na seguinte figura:



Uma vez que os fractais são gerados por algoritmos matemáticos (definidos de forma recursiva), são por definição infinitos, uma vez que podem ser tão detalhados quanto quisermos, bastando para isso aumentar o número de iterações a efectuar. Assim, qualquer que seja o número de ampliações de um determinado objecto fractal, nunca obteremos a “imagem final”, uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada.

A partir das noções de auto-semelhança e de detalhe infinito podemos retirar ainda o conceito de invariância de escala. Esta é uma outra característica dos objectos fractais. Não podemos portanto, através de uma simples observação, determinar a sua escala, pois após sucessivas ampliações, o objecto final confundir-se-á com o inicial, uma vez que existe entre os dois uma semelhança estatística.

A dimensão fractal:

O nosso senso comum leva-nos a considerar que os vários objectos que observamos podem ter uma, duas, ou três dimensões, e estamos ainda habituados a considerar o tempo como uma quarta dimensão. Assim, se formos confrontados com a noção de uma dimensão não inteira, digamos 1,6 ou 2,1, o mais natural é que não só não darmos imediatamente conta do que se trata, como podemos sentir até alguma desconfiança. É essa a noção que vamos introduzir.

Na obra "Elementos" de Euclides, podemos encontrar as seguintes expressões:

- *"Um **ponto** é o que não tem parte.";*
- *"Uma **linha** é um comprimento sem largura.";*
- *"Uma **superfície** é o que só tem comprimento e largura.";*
- *"Um **sólido** é o que tem comprimento, largura e profundidade.".*

No que respeita à dimensão muitas são as imprecisões que podemos observar na Geometria Euclidiana. Vejamos uma "simples" linha que se espalha por uma superfície plana sem nunca se cruzar; no limite, ela preenche todo o plano. Pela Geometria Euclidiana esta linha tem dimensão 1, no entanto intuitivamente ela parece ser quase bidimensional.

Para introduzir a ideia de que a dimensão fractal não é necessariamente inteira, Mandelbrot introduziu o seguinte exemplo: a dimensão de um novelo de fio depende do ponto de vista da pessoa: visto de longe, o novelo não é mais do que um ponto, ou seja, tem dimensão zero; visto de mais perto, o novelo parece ocupar um espaço periférico (observamos uma "bola") assumindo assim três dimensões; visto ainda mais de perto e se utilizarmos um microscópio de alta definição, o novelo não passa de um conjunto de pontos – átomos – isolados, o que significa que o novelo tem dimensão zero.

A dimensão dos fractais, ao contrário do que sucede na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um número inteiro. Com efeito, ela pode ser um número fraccionário. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, tendo a ver com o seu grau de irregularidade. Dito de outra forma, a dimensão de uma curva fractal é um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui.

A geometria fractal mostra infinitas possibilidades com as dimensões, podendo apresentar números fraccionários, o que permite um ajuste bem melhor às condições naturais. Um material poroso, por exemplo, levando em conta os vazios, reentrâncias e rugosidades, tem uma dimensão fractal entre 2 e 3, tão ampla quanto a quantidade de números reais fraccionários. Desta maneira, fica mais fácil explicar a natureza e assim os nossos modelos aproximam-se mais do real.

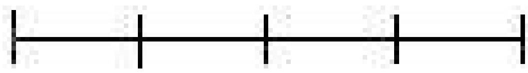
Para se poder generalizar o conceito de dimensão vamos seguir o seguinte raciocínio:

Considere-se um segmento de recta, um quadrado e um cubo. Divida-se cada um dos seus lados em quatro partes geometricamente iguais (coeficiente de redução $\frac{1}{4}$, isto é, cada parte que nós obtemos na divisão é igual ao objecto original multiplicado por um factor de $\frac{1}{4}$).

Tentaremos estabelecer uma relação entre a dimensão do objecto e o número de partes iguais em que este fica dividido.

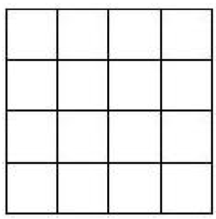
Dimensão 1:

Considere-se um segmento de recta; após a redução fica-se com 4 ($=4^1$) partes iguais.



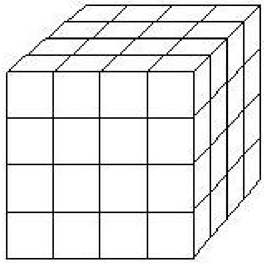
Dimensão 2:

Efectuando o mesmo processo para o quadrado, dividir cada um dos lados em 4 partes iguais, fica-se com 16 ($= 4^2$) partes iguais.



Dimensão 3:

Procedendo-se de igual modo para o cubo, obtém-se 64 (=4^3) partes iguais.



Resultados análogos se obteriam para qualquer outro coeficiente de redução.

Designando por **N** o número de partes e por **r** o coeficiente de redução, para a dimensão 1 (segmento de recta) obtém-se a igualdade

$$N = \frac{1}{r^1}$$

Para o quadrado e para o cubo (dimensão 2 e 3) obtém-se respectivamente

$$N = \frac{1}{r^2} \quad \text{e} \quad N = \frac{1}{r^3}$$

Para este tipo de figuras não fractais, a dimensão é o expoente que aparece nesta igualdade relacionando a redução e o número de partes congruentes correspondentes.

Sendo **d** a dimensão do objecto, **N** o número de partes iguais obtidas e **r** o coeficiente de redução, tem-se:

$$N = \frac{1}{r^d}$$

Este raciocínio é válido para qualquer redução efectuada em objectos com auto-semelhança exacta, e um raciocínio análogo é também válido para ampliações.

Não devemos esquecer que os objectos que vamos estudar possuem auto-semelhança exacta, e só neste caso é possível fazer este tipo de considerações.

Podemos também escrever a igualdade anterior do seguinte modo:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^{d}$$

E aplicando logaritmos a ambos os membros obtém-se,

$$☼ \longrightarrow \boxed{d = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}}$$

Podemos então concluir que:

A dimensão **d** de figuras com auto-semelhança exacta, fractais ou não fractais é dada pela fórmula ☼ , com **N** e **r** definidos como anteriormente.

Confirmemos agora, aplicando a fórmula anterior, a dimensão do segmento de recta, do quadrado e do cubo:

- **Segmento de recta**

$r = \frac{1}{4}$

$N = 4$

$$d = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{4}}} = \frac{\log 4}{\log 4} = 1$$

- **Quadrado**

$r = \frac{1}{4}$

$N = 16 = 4^2$

$$d = \frac{\log 4^2}{\log 4} = \frac{2\log 4}{\log 4} = 2$$

- **Cubo**

$r = \frac{1}{4}$

$N = 64 = 4^3$

$$d = \frac{\log 4^3}{\log 4} = \frac{3\log 4}{\log 4} = 3$$

Estes resultados confirmam o valor da dimensão atribuída a estes "objectos" por Euclides.

Como já referimos, esta fórmula pode apenas ser aplicada em casos de auto-semelhança exacta. Em fractais com auto-semelhança aproximada, existem vários métodos de calcular a sua dimensão, dos quais destacamos os seguintes:

1. **A definição de dimensão D de Hausdorff-Besicovitch** diz que uma curva pode ser medida encontrando-se o número N(δ) de segmentos de comprimento δ que a formam. Para uma curva qualquer tem-se, tomando um comprimento inicial L_0 e seu comprimento total L:

$$\mathrm{L} = \mathrm{N}(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \mathrm{L}_0 \delta^0 \tag{1}$$

Ou seja, no limite a medida L torna-se assimptoticamente igual ao comprimento da curva e é independente de δ. A área associada seria portanto:

$$\mathrm{A} = \mathrm{N}(\delta)\delta^2 \xrightarrow[\delta \to 0]{} \mathrm{L}_0 \delta^1 \tag{2}$$

Para estabelecer uma medida de tamanho sobre um conjunto de pontos, tomamos uma função teste

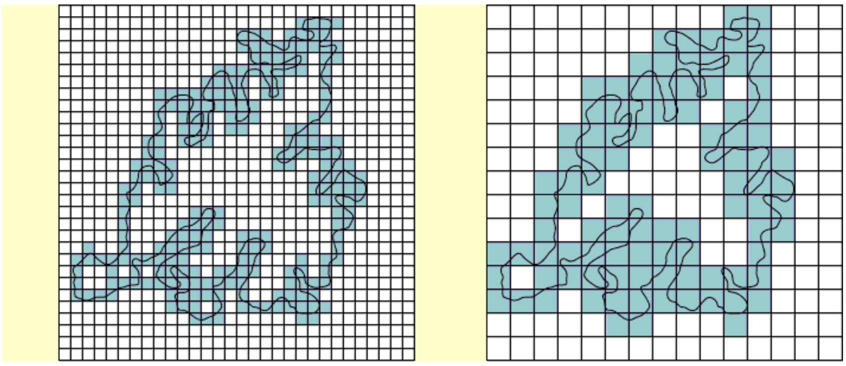
$$\mathrm{h}(\delta) = \gamma(\mathrm{d})\delta^{\mathrm{d}} \tag{3}$$

onde $\gamma(\mathrm{d})$ é um factor geométrico igual a 1 para linhas, quadrados e cubos, $\pi/4$ para discos e $\pi/6$ para esferas. Observando isto e que a relação entre perímetro/(área)$^{1/2}$ para curvas fechadas é constante, tem-se:

$$\delta_{\mathrm{D}} = \frac{[\mathrm{L}(\delta)]^{1/\mathrm{D}}}{[\mathrm{A}(\delta)]^{1/2}} \tag{4}$$

Onde L(δ), A(δ) e D são perímetro, área a Dimensão Fractal, respectivamente.

2. **O método box-counting**: Considerando-se uma figura qualquer coberta por um conjunto de quadrados de lado δ, deve-se contar o número de quadrados necessários para cobrir a figura N(δ). De acordo com a definição (4), encontramos a dimensão fractal da figura determinando a inclinação (ou declive) da recta obtida (designada por *recta de regressão linear*) traçando-se log[N(δ)] contra log 1/δ. Esta dimensão fractal D assim obtida é chamada *box counting dimension* ou *box dimension*.



A **complexidade infinita** prende-se com o facto do processo gerador dos fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações.

GEOMETRIA EUCLIDIANA E GEOMETRIA FRACTAL

"Porquê usar palavras?

A geometria existia antes de nós. É eterna como o espírito de Deus, é o próprio Deus. A geometria com suas esferas, cones, hexágonos e espirais deu a Deus um modelo para a criação e foi implantada no Homem como imagem e semelhança de Deus."

Kepler,1610

"Há alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou a sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo, e nem o raio viaja em linha recta..."

Mandelbrot,1983

Como já referimos, durante muito tempo os objectos e os conceitos da geometria euclidiana foram considerados como os que melhor descreviam o mundo em que vivemos. A descoberta de geometrias não-euclidianas introduziu novos objectos que representam certos fenómenos do Universo, tal como se passou com os fractais.

Para melhor se entender algumas das características da Geometria Fractal, comecemos por analisar resumidamente aquilo em que esta se opõe à Geometria Euclidiana.

Euclides (330–260 a.C.) é reconhecido como o matemático mais importante da Grécia clássica. Dele unicamente se sabe que ensinou e fundou uma escola em Alexandria, por volta do ano 300 a.C. e os seus trabalhos matemáticos chegaram-nos quase completos, porque foram inicialmente traduzidos para árabe, depois para latim e a partir destes dois idiomas foram traduzidas para outras línguas europeias.

A Geometria Euclidiana existe há mais de 2000 anos enquanto que a Fractal, com os seus princípios estabelecidos, tem pouco mais que 25 anos.

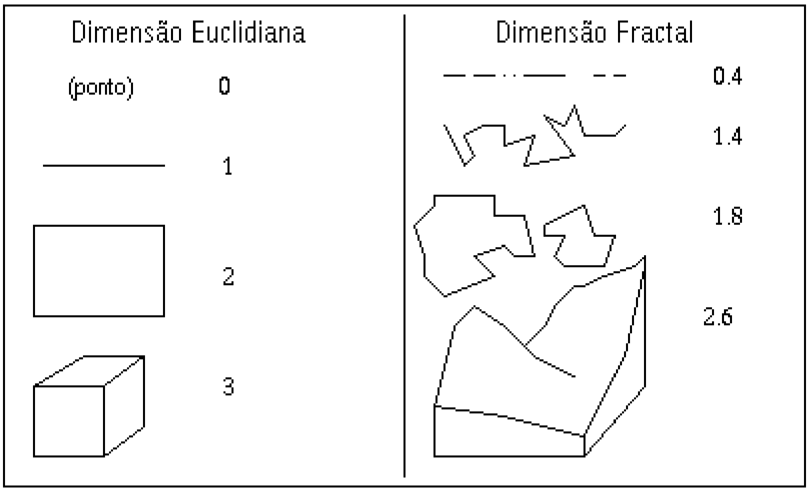
Um outro aspecto importante está relacionado com o facto da Geometria Fractal se adaptar bem à representação de objectos naturais. Assim, ao contrário dos objectos criados pelo Homem que são caracterizados por possuírem linhas, ângulos rectos, círculos perfeitos, etc., os objectos naturais estão repletos de irregularidades, assimetrias e “imperfeições”, factos que a Geometria Fractal tanto tem em conta.

Enquanto que a Geometria Euclidiana se serve normalmente de fórmulas e equações para se exprimir, a Geometria Fractal, prefere os algoritmos recursivos e as fórmulas iterativas, pelo que está intimamente ligada à utilização dos computadores como ferramenta indispensável.

A seguinte tabela faz a comparação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Fractal:

Geometria Euclidiana	**Geometria Fractal**
Tradicional (mais 2000 anos)	Moderna (aproximadamente 25 anos)
Baseada em tamanho ou escala definida	Sem tamanho ou escala específica
Apropriada a objectos feitos pelo Homem	Apropriada para formas naturais
Descrita por fórmulas e equações	Algoritmos recursivos
Dimensão no conjunto {0, 1, 2, 3}	Dimensão no conjunto [0, 3]

Em termos de dimensões temos, por exemplo:



ESTUDO DE ALGUNS FRACTAIS

1. Linha costeira de uma região

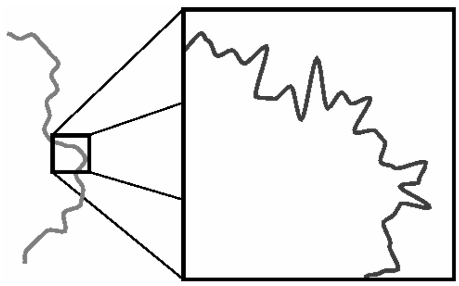
Um exemplo clássico de um fractal é a linha da costa de um país da qual se conhece sempre apenas um valor aproximado.

Considerando um pedaço de linha costeira numa região acidentada, vamos tentar determinar qual é o seu comprimento efectivo. É evidente que essa linha é, no mínimo, igual à distância em linha recta entre as duas extremidades da linha costeira que considerámos. Assim, se a costa fosse direita, o problema estaria resolvido neste primeiro passo. Contudo, uma verdadeira costa natural é extremamente sinuosa e, por conseguinte, muito mais longa que a dita distância em linha recta.

A linha da costa é em geral calculada a partir de fotografias de satélite. Mas se as fotografias fossem tiradas de uma avioneta, as irregularidades seriam mais visíveis e obter-se-ia um outro valor.

Se em vez de fotografia fossem medidas directamente todas as saliências e reentrâncias, obter-se-ia um valor muito maior. Se, em seguida, fosse usada uma régua de um decímetro e repetindo a tarefa, obter-se-ia maior precisão nas medidas dos contornos rochosos, começando a ter em conta a irregularidade das pedras, e o comprimento final obtido seria ainda maior.

Ampliação de uma parte de uma linha costeira



Poder-se-ia repetir esta tarefa indefinidamente, mas sempre reduzindo a escala de medição da costa, que o seu comprimento iria aumentar.

Em conclusão, o comprimento da costa de um país tende para infinito, embora a área que a limita seja finita.

Mandelbrot começou muitas vezes as suas conferências sobre Geometria fractal pela pergunta: " Quanto é o comprimento da linha de costa da Grã-Bretanha?"

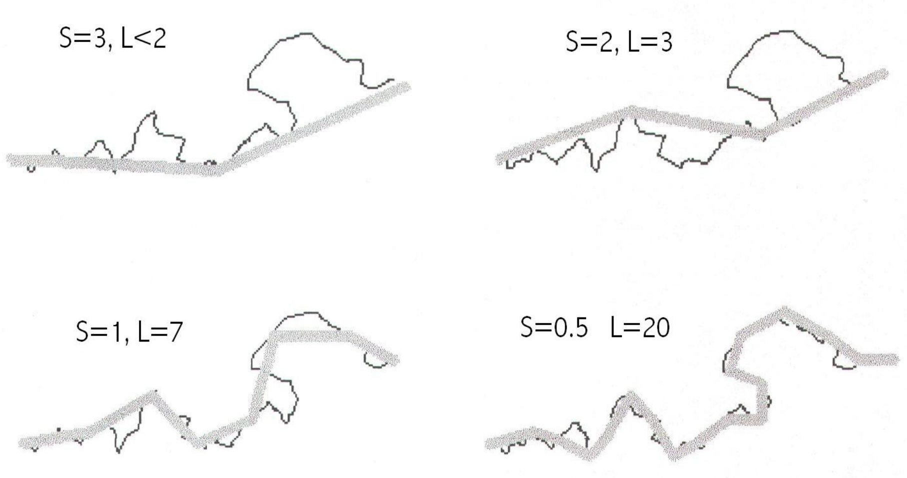
Esta questão é decididamente simples: Se olharmos para o mapa da Grã-Bretanha num atlas e colocarmos uma régua ao longo da costa para formar segmentos de recta, podemos desenhar 8 de tais linhas representando 200 milhas cada – para um comprimento total de 1600 milhas. Mas se usarmos segmentos mais curtos de 25 milhas cada que se ajustam em ziguezagues ao litoral mais exactamente, podemos obter 102 segmentos para um comprimento total de 2550 milhas. Se obtivermos então mapas locais e começarmos a medir o litoral em cada região, o comprimento total aumentará consoante as medidas sejam menores e mais precisas; eventualmente poderemos andar na praia e medir a orla da praia entre os contrafortes e bancos de areia. Quanto mais nos aproximarmos disso, mais detalhes vemos.

Como a dimensão de uma curva fractal é o número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida em que a escala diminui, podemos defini-la de um modo um pouco diferente, mais conveniente para estudar uma linha costeira. Assim, temos

$$d = \frac{\log\left(\frac{L_2}{L_1}\right)}{\log\left(\frac{S_2}{S_1}\right)}$$

onde L_1 e L_2 são as medidas dos comprimento das curvas (em unidades) e S_1 e S_2 são os tamanhos das unidades (ou seja, as escalas) usadas na medição.

A figura seguinte representa a linha costeira de uma região, onde foram utilizadas unidades de medida de tamanhos diferentes (S) para estimar o comprimento (L) do litoral.



Para este litoral, as medidas de S=1 e S=0.5 resultam nos comprimentos L=7 e L=20, respectivamente. Então:

$$d = \frac{\log\left(\frac{20}{7}\right)}{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)} \approx 1.51$$

De modo análogo, a transição de S=1 para S=2 leva-nos à menor estimativa aproximada de d≈1,22 e de S=2 para S=3, d≈1,13.

O litoral é um fractal: em vez de ter somente uma dimensão (como uma linha num mapa) tem uma dimensão fractal que varia entre 1 e 2, consoante as unidades de medida escolhidas(isto é, consoante a aproximação que fazemos).

2. O Floco de Neve de Koch

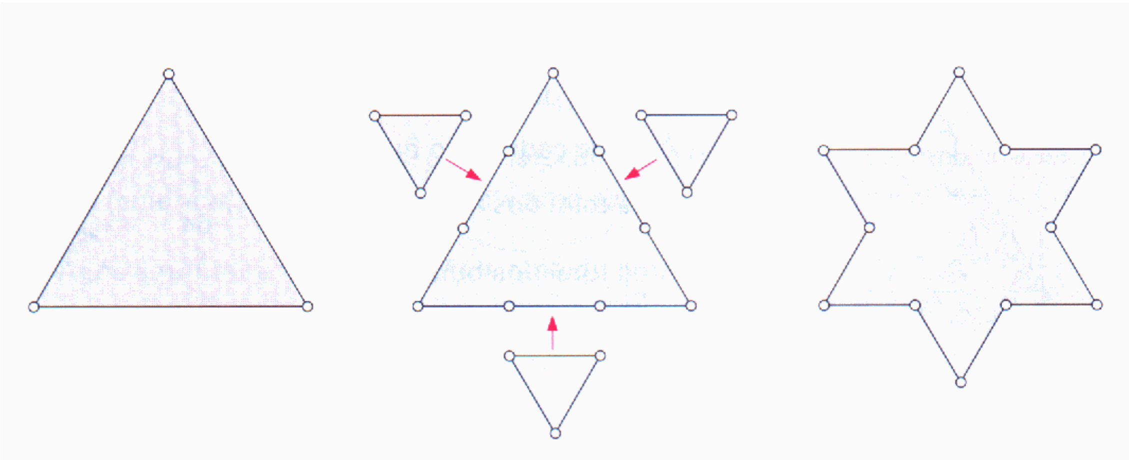
Em 1904 o matemático sueco Helge von Koch apresentou a construção de uma curva que ficou conhecida por Floco de Neve de Koch. A sua construção baseia-se num processo recursivo:

Figura Inicial – A figura de partida é um triângulo equilátero (sólido);

Passo 1 – Procedimento FNK – A primeira transformação consiste na divisão em três partes iguais de cada um dos lados de um triângulo, construindo-se sobre cada um dos segmentos médios um novo triângulo equilátero; Obtém-se a "Estrela de David", com 12 lados;

Passo 1

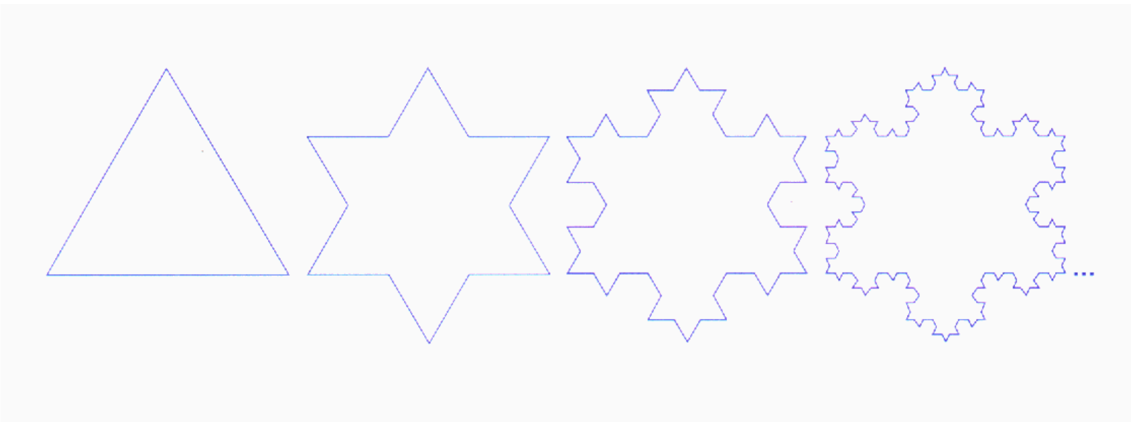
Figura inicial Procedimento FNK "Estrela de



Passo 2 – Repete-se o procedimento FNK a cada um dos 12 lados da "Estrela de David"; O resultado é uma figura com 48 lados;

....

Passo N – Aplicar o procedimento FNK a cada um dos lados da figura obtida no passo N-1, até ao infinito; Obtém-se assim o Floco de Neve de Koch.



Em cada passo desta construção, a figura vai mudando de forma, e há medida que os passos avançam essas modificações tornam-se cada vez menos visíveis. Quando estas mudanças se tornam invisíveis a olho nu, diz-se que o processo se tornou visualmente estável.

A maior vantagem dos processos recursivos é que eles permitem uma descrição muito simples de alguns objectos, mesmo quando estes são bastante complicados. Neste caso, o floco de neve de Koch pode ser descrito em duas linhas usando o que chamamos de **Regra de Substituição Recursiva** – a regra que especifica como substituir uma peça por outra.

REGRA DE SUSBTITUIÇÃO RECURSIVA PARA O FLOCO DE NEVE DE KOCH
Comece com um triângulo equilátero sólido ▲
Quando vir um segmento fronteiro________ substitua-o por___▲___ .

Vamos agora estudar alguns aspectos do floco de neve de Koch. Desprezemos o interior da figura e consideremos apenas a curva limite do floco de neve. Tendo em conta o seu processo de construção, é fácil de perceber que à medida que se vão fazendo transformações o número de lados da curva aumenta, mas o comprimento de cada um deles diminui.

Como varia o número de lados da curva com as transformações?

Por cada nova transformação que se faz, cada lado dá origem a quatro lados. Assim, temos o seguinte quadro:

Passos	Número de lados				
Figura de partida			3	=	3×4^0
1	3x4	=	12	=	3×4^1
2	12x4	=	48	=	3×4^2
3	48x4	=	192	=	3×4^3
4	192x4	=	768	=	3×4^4
5	768x4	=	3072	=	3×4^5

Podemos então concluir que o número de lados de cada figura em função do número de transformações é dado pela progressão geométrica $M_n = 3 \times 4^n$. É evidente que esta sucessão é monótona crescente e que, há medida que o número de transformações cresce (isto é, $n \to +\infty$) a sucessão também tende para $+\infty$. Isto significa que a curva vai ter um número infinito de lados.

Como varia o comprimento dos lados da curva com as transformações?

Suponhamos (para facilitar os cálculos) que o lado do triângulo inicial mede uma unidade. Os lados de cada nova figura são três vezes mais pequenos que os da figura anterior.

Passos	Medida de cada lado				
Figura de partida	1				
1	$1/3$	=	$1/3^1$	=	3^{-1}
2	$1/9$	=	$1/3^2$	=	3^{-2}
3	$1/27$	=	$1/3^3$	=	3^{-3}
4	$1/81$	=	$1/3^4$	=	3^{-4}

5	$\frac{1}{243}$	=	$\frac{1}{3^5}$	=	3^{-5}

A medida dos lados de cada figura em função do número de transformações é dado pela progressão geométrica de termo geral $N_n = 3^{-n}$. Esta sucessão é monótona decrescente e quando o número de transformações n tende para $+\infty$, a sucessão tende para zero. Isto significa que a medida de cada lado da curva tende para zero.

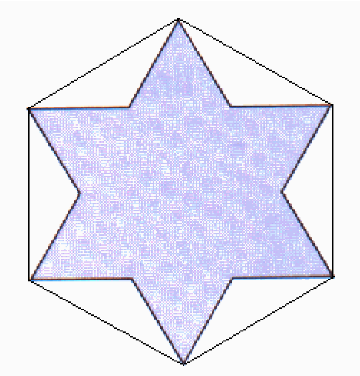
Como varia o perímetro da curva com as transformações?

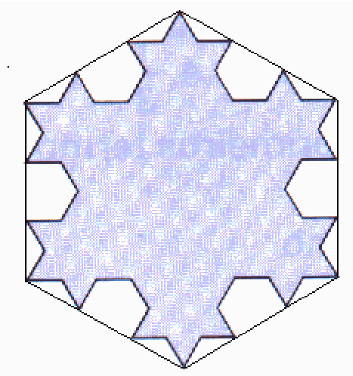
Podemos definir a sucessão dos perímetros P_n à custa das duas sucessões anteriores. Assim $P_n = M_n \times N_n = (3 \times 4^n) \times (3^{-n}) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Esta sucessão é uma progressão geométrica de primeiro termo 3 (exactamente o perímetro do triângulo inicial) e de razão $\frac{4}{3}$. Quando n tende para $+\infty$, a sucessão tende para $+\infty$ (pois o primeiro termo é positivo e a razão é maior do que um) logo o perímetro do floco de neve de Koch é infinito.

Qual é a área do floco de neve de Koch?

Consideremos, para facilitar os cálculos, que a área do triângulo inicial que serve de ponto de partida para a construção da curva de Koch tem uma unidade de medida. Será que a área do floco de neve também cresce para o infinito?...

Comecemos por estimar a área da curva de Koch traçando um hexágono envolvendo a Estrela de David (Passo 1). Ao continuar-se a construção, constata-se que a figura resultante do passo 2 ainda está contida no hexágono. É imediato verificar que isso vai acontecer em todos os passos, e que portanto no limite também



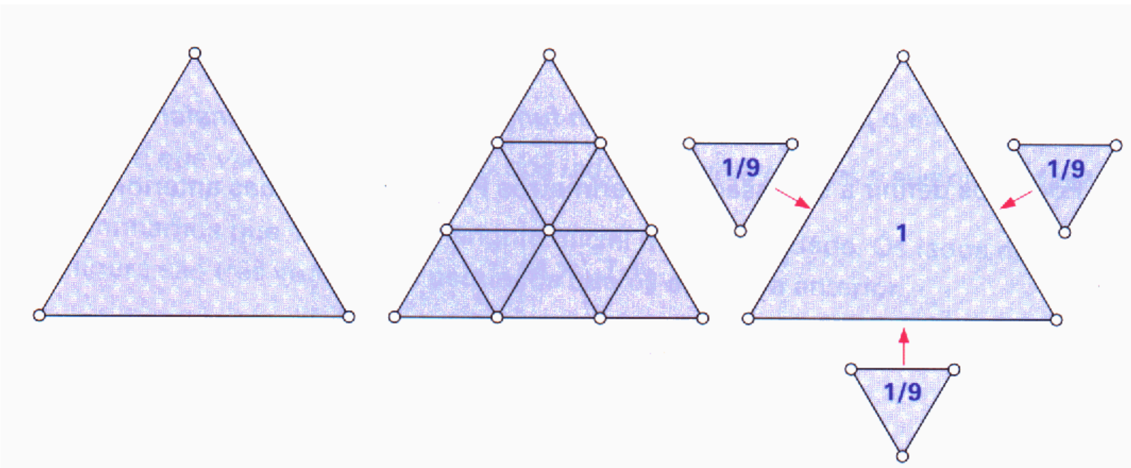


Pode-se então concluir que a área da curva de Koch é inferior à área do hexágono (a qual é igual ao dobro da área do triângulo inicial, ou seja, dois).

Como a área do triângulo inicial é 1, a área da curva estará compreendida entre 1 e 2. Determinemos o seu verdadeiro valor; sabe-se que a área do polígono, em cada passo, obtém-se adicionando à área do polígono do passo anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes quantas o número de lados do polígono anterior.

Como foi dito anteriormente, no passo 0 (na figura inicial) o triângulo tem área igual a 1. Ou seja, $A_0 = 1$.

Pela semelhança de figuras planas, sabe-se que, se o lado de um polígono sofre uma redução de razão $\frac{1}{3}$, a área sofre uma redução de $\frac{1}{9}$.



Sendo assim tem-se:

- No passo 1

$$A_1 = 1 + 3 \times \left(\frac{1}{9}\right) \times 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

- No passo 2, como se obtém 3×4 segmentos de recta, vem

A2 = $1+\frac{1}{3}+(3\times 4)\times\left(\frac{1}{9}\right)^2$ = $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}$

- No passo 3, como se obtém 3×4^2 segmentos de recta, vem

A3 = $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+(3\times 4^2)\times\left(\frac{1}{9}\right)^3$ = $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2$

Continuando, sucessivamente, no passo n + 1, obtém-se

A_{n+1} = $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n$

que é a soma de 1 com os termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é $\frac{1}{3}$ e a razão é $\frac{4}{9}$.

Então $A_{n+1} = 1 + S_n$, sendo Sn = $\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$.

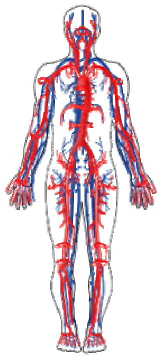
Calculando S_n quando n tende para infinito tem-se lim S_n = $\lim\left(\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right)=\frac{3}{5}$.

Então, a área total limitada pela Curva de Koch é $1+\frac{3}{5}=1{,}6$.

Podemos então concluir que, embora o perímetro do floco de neve de Koch seja infinito, a sua área é finita, nunca excedendo 1,6 unidades. Isto quer dizer que se a área do triângulo inicial for A, a área do floco de neve de Koch daí resultante será 1,6×A.

O facto de termos um perímetro infinito a "*fechar*" uma área finita pode parecer contrário à nossa intuição geométrica, mas é característico de muitas formas importantes na Natureza. O sistema vascular das veias e artérias no corpo humano, por exemplo, ocupa uma pequena fracção do corpo e tem um volume relativamente pequeno, mas tem um enorme comprimento: de ponta a ponta, as veias, artérias e capilares de um único corpo humano atingem cerca de 65 mil quilómetros.

Modelo do Sistema Circulatório Humano →



Qual é a dimensão do floco de neve de Koch?

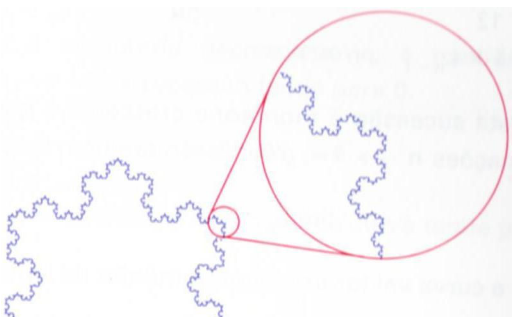
Em qualquer um dos passos da construção da curva de Koch, o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{3}$ (de cada um dos segmentos de recta do passo anterior), sendo o número de partes iguais obtidas em cada segmento de recta N=4.

A dimensão da curva de Koch será então (atendendo ao passo 1 da construção):

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$$

Isto significa que a curva de Koch, por ser mais "enrugada", ocupa mais espaço do que uma simples linha recta (dimensão 1), mas menos espaço do que uma superfície (que tem dimensão 2).

O floco de neve de Koch possui auto-semelhança exacta.



3. O Triângulo de Sierpinski

No início do século XX o matemático polaco Waclav Sierpinski (1882-1969) estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski ou Fractal de Sierpinski, que se obtém como limite de um processo recursivo:

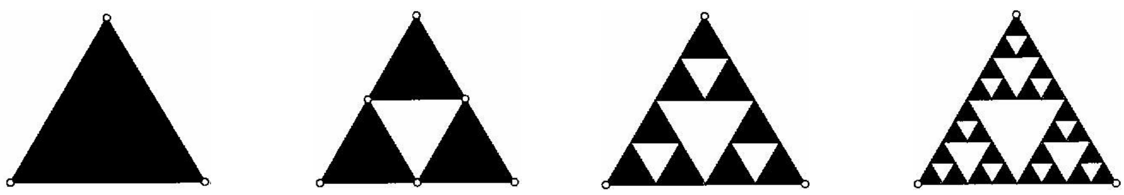
Figura Inicial (Passo 0) – A figura de partida é um triângulo equilátero (sólido);

Passo 1 – **Procedimento TS –** A primeira transformação consiste em determinar os pontos médios de cada um dos lados de um triângulo; une-se por segmentos esses pontos médios (2 a 2) e considera-se os 4 triângulos resultantes; retira-se o triângulo central; Ficamos assim com 3 triângulos sólidos;

Passo 2 – Aplica-se o procedimento TS a cada um dos 3 triângulos resultantes; Obtemos 9 triângulos sólidos;

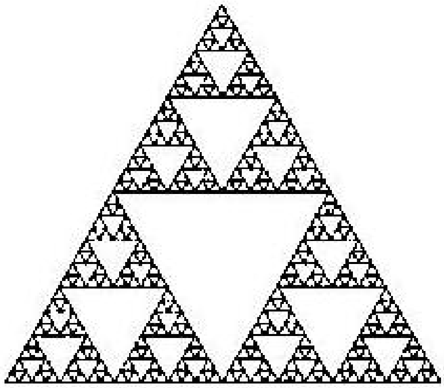
....

Passo N – Aplicar o procedimento TS a cada um dos triângulos sólidos obtidos no passo N-1, até ao infinito; Obtém-se assim o Triângulo de Sierpinski.



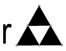
Passo O   Passo 1   Passo 2   Passo3

O triângulo de Sierpinski é a figura limite deste processo e não qualquer um dos passos finitos referidos anteriormente.



REGRA DE SUSBTITUIÇÃO RECURSIVA PARA O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Comece com um triângulo equilátero sólido 

Quando vir um triângulo sólido  substitua-o por  .

Área do Triângulo de Sierpinski:

Consideremos A como sendo a área do triângulo inicial (passo 0) e vejamos como varia a área ao longo dos primeiros passos:

- Passo 0 $\rightarrow$ Área = A
- Passo 1 $\rightarrow$ Área = $\frac{3}{4}$ ×A
- Passo 2 $\rightarrow$ Área = $\frac{9}{16}$ ×A = $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ×A
- Passo 3 $\rightarrow$ Área = $\frac{27}{64}$ ×A = $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ ×A

....

- Passo n $\rightarrow$ Área = $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ×A

Então, no passo n, a figura terá área dada por $A_n = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Obtemos uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$ (maior do que zero e menor do que um) e primeiro termo positivo (pois A designa uma área logo é positiva) o que significa que a progressão geométrica tende para zero quando $n \to +\infty$. Então a área do triângulo de Sierpinski tende para zero.

Como a área "*esburacada*" é dada por $B_n = A - A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, esta vai tender para A.

O número de triângulos em cada passo da Carpete de Sierpinski é dado pela sucessão de termo geral $T_n = 3^n$ (logo o número de triângulos tende obviamente para o infinito).

Perímetro do Triângulo de Sierpinski:

Consideremos o triângulo inicial (passo 0) com perímetro igual a *P* e vejamos como varia o perímetro ao longo dos primeiros passos:

- Passo 0 $\rightarrow$ Perímetro = *P*
- Passo 1 $\rightarrow$ Perímetro = $P \times \frac{3}{2}$
- Passo 2 $\rightarrow$ Perímetro = $3^2 \times \frac{P}{2^2} = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$
- Passo 3 $\rightarrow$ Perímetro = $3^3 \times \frac{P}{2^3} = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

  ....

- Passo n $\rightarrow$ Perímetro = $P \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Então, no passo n, a figura terá perímetro dado por $P_n = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Obtemos uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$ (maior do que um) e primeiro termo *P* positivo (pois é um perímetro), o que significa que a progressão geométrica tende para infinito quando $n \to +\infty$. Então o perímetro do triângulo de Sierpinski tende para infinito.

Dimensão do triângulo de Sierpinski:

Em qualquer um dos passos da construção do triângulo de Sierpinski, o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{2}$ (do comprimento do segmento de recta do passo anterior) sendo o número de triângulos obtidos o triplo do obtido no passo anterior, isto é, N=3.

A dimensão do triângulo de Sierpinski será então (atendendo ao passo 1 da construção):

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}59$$

Repare-se que se considerássemos, por exemplo, o passo 3, obteríamos o mesmo resultado. O coeficiente de redução é $r = \frac{1}{8}$ (do comprimento do segmento de recta inicial) sendo o número de triângulos obtidos N=27. Assim:

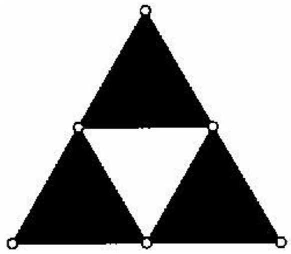
$$d = \frac{\log 3^3}{\log 2^3} = \frac{3\log 3}{3\log 2} \approx 1{,}59.$$

O triângulo de Sierpinski e o triângulo de Pascal:

Pascal (1623-1662) estudou e demonstrou, no "*Tratado do Triângulo Aritmético*" publicado em 1654, diversas propriedades do triângulo que ficou conhecido com o seu nome e aplicou-as também no estudo das Probabilidades.

Antes de Pascal, já Tartaglia (1499-1557) usara o triângulo aritmético e, muito antes, também os matemáticos Árabes (séc. XIII) e Chineses (séc. XIV) o utilizavam.

Consideremos o passo 1 do triângulo de Sierpinski:



Consideremos também as quatro primeiras linhas do triângulo de Pascal:

1

1 1

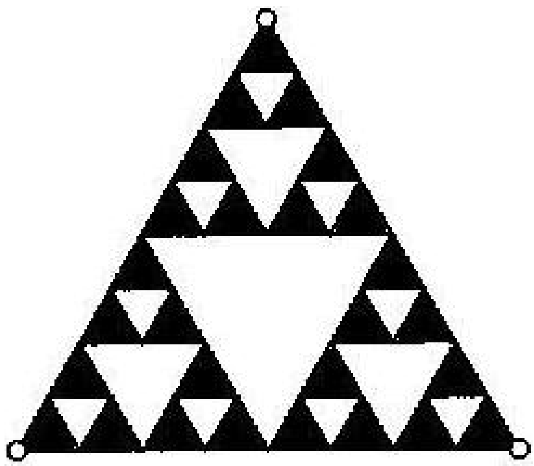
1 2 1

1 3 3 1

Além da semelhança geométrica, podemos reparar que sobrepondo estes dois triângulos, os números ímpares, do triângulo de Pascal, ficam sempre sobre os triângulos pretos do triângulo de Sierpinski, enquanto os números pares ficam sobre os triângulos retirados no processo de construção.

Resta questionar o facto da propriedade enunciada anteriormente se manter quando ampliado os dois triângulos. Vejamos que sim.

Consideremos o passo 3 do triângulo de Sierpinski e consideremos também as oito primeiras linhas do triângulo de Pascal:



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

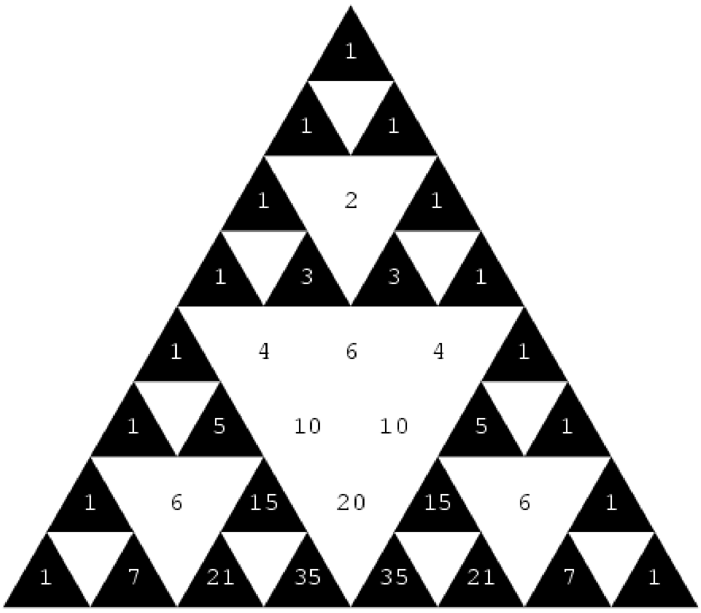
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

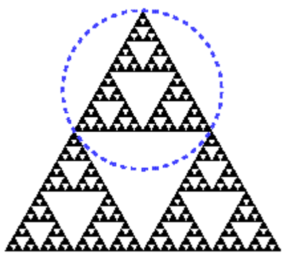
1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Sobrepondo um triângulo no outro concluí-se o pretendido.



Resta ainda dizer que o triângulo de Sierpinski possui auto-semelhança exacta.



4. O Jogo do Caos

Este exemplo envolve as leis do acaso. Começamos com um triângulo arbitrário de vértices A, B e C, e um dado não viciado (figura inicial). A cada um dos vértices do triângulo atribuímos duas das seis possibilidades resultantes de atirar o dado. Por exemplo, A é o “vencedor” se sair um ou dois, B é o “vencedor” se sair três ou quatro, e C é o “vencedor” se sair cinco ou seis. Estamos agora prontos para jogar o jogo do caos.

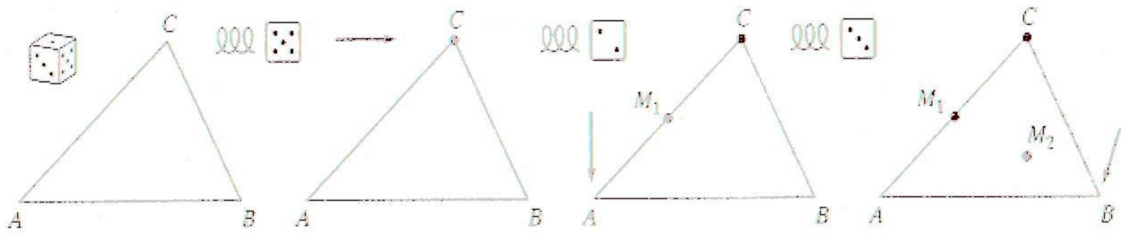


Figura Inicial Passo 0 Passo 1 Passo 2

Passo 0 – Atira-se o dado. Começa-se pelo vértice "vencedor". Suponhamos que calhou cinco. Então começamos pelo vértice C;

Passo 1 – Atira-se novamente o dado. Suponhamos que calha dois. Então o "vencedor" é o vértice A. Agora mudamos directamente da posição anterior para o vértice "vencedor", mas paramos a meio. Marca-se a nova posição M_1;

Passo 2 – Atira-se novamente o dado e move-se directamente da última posição para o vértice "vencedor", e paramos a meio. (Por exemplo se sair o três paramos em M_2 que é o ponto médio do segmento que une M_1 a B). Marcamos nova posição;

Passo 3, 4,... – Continua-se a atirar o dado, movendo-se para o ponto médio do segmento que une a última posição e o vértice vencedor.

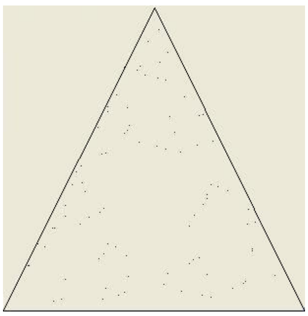


Figura 1

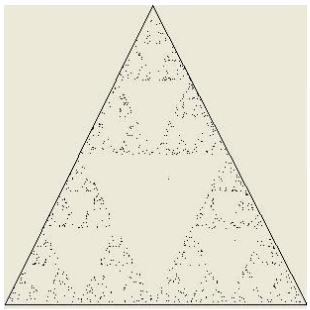
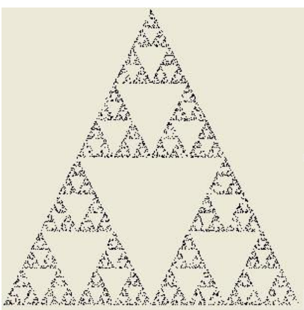


Figura 2



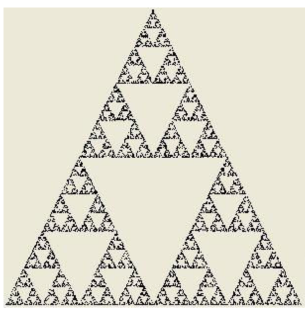


Figura 3 Figura 4

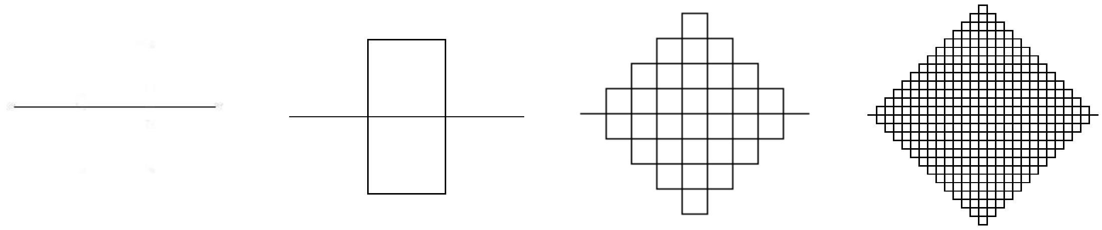
A figura 1 mostra-nos a posição dos pontos depois de atirarmos o dado cem (100) vezes – obtemos assim um “monte” de pontos dentro do triângulo. A figura 2 mostra-nos a posição dos pontos depois atirarmos o dado mil (1000) vezes. A figura 3 mostra-nos a posição dos pontos depois de atirarmos o dado cinco mil vezes. O padrão obtido é inconfundível – O triângulo de Sierpinski. Após atiramos dez mil vezes o dado, é impossível (a olho nu) ver as diferenças entre o conjunto dos pontos obtidos e o triângulo de Sierpinski, como demonstra a figura 4. Sendo o padrão de pontos criado pelo jogo do caos regido pelas leis do acaso, não seria de esperar que esse mesmo padrão fosse previsível. Apesar disso, obtemos uma aproximação do triângulo de Sierpinski, e quanto mais jogamos o jogo do caos, melhor a aproximação fica.

5. A Curva de Peano

A curva de Peano, apresentada em 1890, é um exemplo de um fractal que preenche todo o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma determinada área, acabando por, gradualmente, a ocupar na totalidade.

O ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento. No primeiro passo, o segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial, e colocados como indica a figura. Esses 9 segmentos constituem o primeiro passo da construção recursiva da curva de Peano. Depois, o processo recursivo aplica-se a cada um dos 9 segmentos, até ao infinito.

Os três primeiros passos da construção da curva de Peano



Passo 0 Passo 1 Passo 2 Passo 3

Observe-se que as curvas obtidas nas diferentes iterações da recursão, a partir da primeira, intersectam-se a si próprias, nos vértices dos pequenos quadrados que se vão formando em cada iteração. Pode-se demonstrar que no limite, isto é, na curva de Peano, se passa o mesmo, dando-se o preenchimento do plano.

A curva de Peano é o exemplo de uma curva, dimensão 1 segundo a Geometria Euclidiana, que preenche uma superfície de dimensão 2.

Em qualquer um dos passos da construção da curva de Peano, o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{3}$ (do comprimento do segmento de recta do passo anterior), sendo o número de partes obtidas N=9. A dimensão da curva de Peano será então (considerando o cálculo para o passo 1):

$$\mathbf{d} = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{2\log 3}{\log 3} = \mathbf{2}$$

Temos assim uma curva cuja dimensão é dois, podemos dizer que a curva de Peano é bidimensional.

6. Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot foi a primeira pessoa a estudar extensivamente este conjunto, apreciando totalmente a importância e beleza deste objecto matemático tão complexo.

O Conjunto de Mandelbrot pode ser descrito matematicamente através de um processo muito simples envolvendo somente números complexos. A nossa construção irá começar com um número complexo (um ponto do plano) e a partir dele criar uma sequência infinita de números (pontos) que dependem do número inicial. Esta sequência de números chamar-se-á sequência de Mandelbrot, e o ponto inicial chamar-se-á "semente" da sequência. A regra recursiva base da sequência de Mandelbrot é que cada número da sequência é igual ao número anterior dessa sequência ao quadrado mais a semente.

Semente Passo 1 Passo 2 Passo 3

$$s \Rightarrow s^2+s = s_1 \Rightarrow {s_1}^2+s = s_2 \Rightarrow {s_2}^2+s = s_3 \quad \ldots\ldots$$

A sequência de Mandelbrot pode ser facilmente descrita por meio de uma regra recursiva, como fizemos no Floco de Neve de Koch e no Triângulo de Sierpinski:

REGRA DE SUSBTITUIÇÃO RECURSIVA PARA A SEQUÊNCIA DE MANDELBROT

Comece com a semente ***s***.

Se x é um termo da sequência então o termo seguinte é x^2+s.

Ou seja, a sequência de Mandelbrot pode ser definida pela sucessão z_n de números complexos definida recursivamente pela lei $z_n = {z_{n-1}}^2 + s$.

A escolha do nome "semente" para o valor inicial de cada sequência dá-nos uma metáfora conveniente: cada semente, quando plantada, produz uma sequência diferente de números (a árvore). A regra de substituição recursiva funciona como uma regra que diz à árvore como crescer de uma estação para a seguinte.

Vejamos alguns exemplos de sequências de Mandelbrot:

Exemplo 1:

A figura seguinte mostra-nos os primeiros quatro passos da sequência de Mandelbrot com a semente $s=1$.

Semente		Passo 1		Passo 2		Passo 3		Passo 4
$s=1$	$\Rightarrow$	$s_1 = 1^2+1=2$	$\Rightarrow$	$s_2 = 2^2+1=5$	$\Rightarrow$	$s_3 = 5^2+1=26$	$\Rightarrow$	$s_4 = 26^2+1=677$

Escolhendo esta semente, os números da sequência de Mandelbrot tornam-se cada vez maiores. Os pontos correspondentes afastam-se cada vez mais da semente. Todas as de sementes que dão origem a sequências deste tipo designam-se por pontos de divergência. Nestas sequências, o ponto do plano identificado pela semente não será um ponto negro.

Exemplo 2:

A próxima figura mostra-nos os primeiros três passos da sequência de Mandelbrot com a semente $s=-1$.

Semente		Passo 1		Passo 2		Passo 3
$s=-1$	$\Rightarrow$	$s_1 = (-1)^2+(-1)=0$	$\Rightarrow$	$s_2 = 0^2+(-1)=-1$	$\Rightarrow$	$s_3 = (-1)^2+(-1)=0$

Com a semente escolhida deste modo os números da sequência alternam entre -1 e 0. Dizemos neste caso que a sequência de Mandelbrot é periódica, e os pontos que dão origem a este tipo de sequência chamar-se-ão pontos de periodicidade. Para esta sequência, o ponto no plano identificado com a semente será sempre um ponto negro.

Exemplo 3:

A figura seguinte mostra-nos os primeiros quatro passos da sequência de Mandelbrot com a semente $s = -0{,}75$.

Semente Passo 1 Passo 2 Passo 3 Passo 4 ....

$s = -0{,}75$ ⇨ $s_1 = (-0{,}75)^2 - 0{,}75$ | $s_2 = (-0{,}1875)^2 - 0.75$ | $s_3 = (-0{,}714844)^2 - 0{,}75$ | $s_4 = (-0{,}238998)^2 - 0{,}75$

$s_1 = -0{,}1875$ | $s_2 = -0{,}714844$ | $s_3 = -0{,}238998$ | $s_4 = -0{,}69288$ ....

Neste caso o padrão que surge não é óbvio, e termos adicionais da sequência tornam-se necessários. Alargando esta sequência a vinte passos, verificamos que os valores da sequência se aproximam de – 0,5. Todas as sementes que dão origem a sequências que se aproximam de um determinado valor designam-se por pontos de convergência. Neste caso o ponto no plano identificado como sendo a semente será sempre um ponto negro (como nas sequências periódicas).

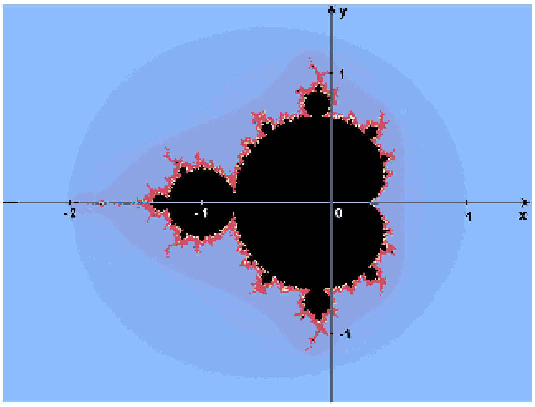
Neste ponto, a definição de conjunto de Mandelbrot parece-nos simples: o conjunto de Mandelbrot consiste em considerar todos os pontos do plano (números complexos) como sementes negras da sequência de Mandelbrot. Assim, ficamos reduzidos à seguinte sequência lógica:

- Cada ponto no plano cartesiano é um número complexo e pode ser usado como semente na sequência de Mandelbrot.
- Se a sequência de Mandelbrot é periódica ou tem como semente um ponto de convergência, o ponto faz parte do conjunto de Mandelbrot e será representado por um ponto negro. Se a sequência tiver como semente um

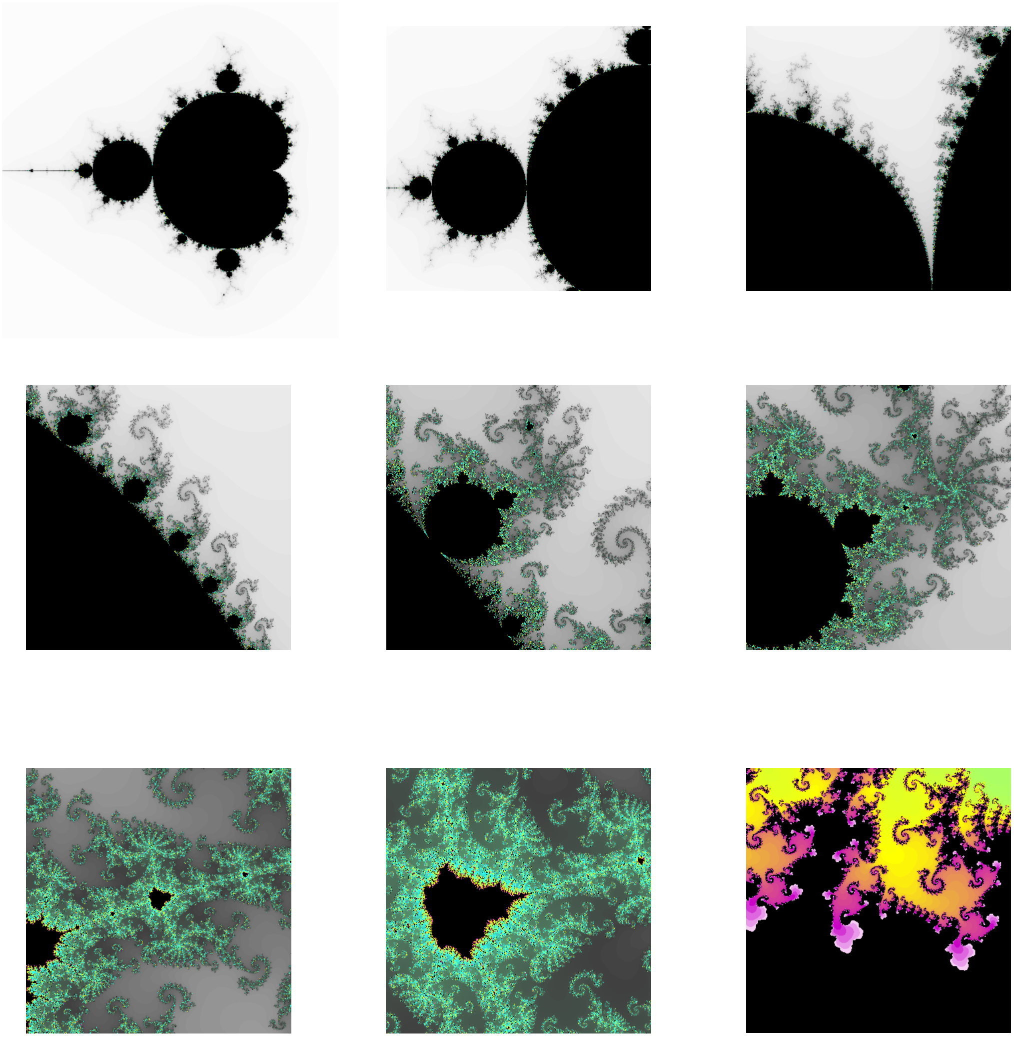
ponto de divergência, o ponto não está no conjunto de Mandelbrot. Neste caso, o ponto pode tomar diferentes cores, dependendo da semente de divergência (por exemplo cores quentes como o vermelho, amarelo ou cor de laranja, se divergir lentamente e cores frias, como o azul, se diverge rapidamente).

Resumindo, para construir o conjunto de Mandelbrot, basta marcar a negro os pontos que correspondem às “sementes” de convergência ou quando originam sequências periódica, deixando os restantes a branco ou numa graduação de cores de acordo com a rapidez com que aumentam de valor.

Representando o conjunto de Mandelbrot no plano complexo, obtemos a seguinte figura:



Mas a simplicidade termina aqui. Descobrir as formas que a fronteira do conjunto de Mandelbrot encerra é quase como desbravar as costas de um novo continente – e o exagero é puramente aparente, porque ampliam-se de tal forma parte do conjunto, para descobrir os seus detalhes, que se se observasse o conjunto completo a essa ampliação, este seria maior que o sistema solar! E pelo meio de formas fascinantes que nos fazem lembrar cavalos-marinhos, ondas ou plantas exóticas (a nossa imaginação é o único limite...) encontramos um número infinito de cópias do próprio conjunto numa diversidade impressionante de escalas. É a auto-semelhança levada ao seu extremo mais belo, como se pode observar pelas sucessivas ampliações do conjunto de Mandelbrot:

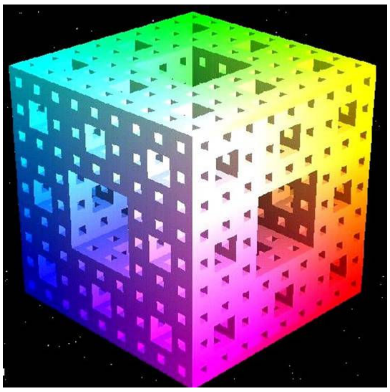


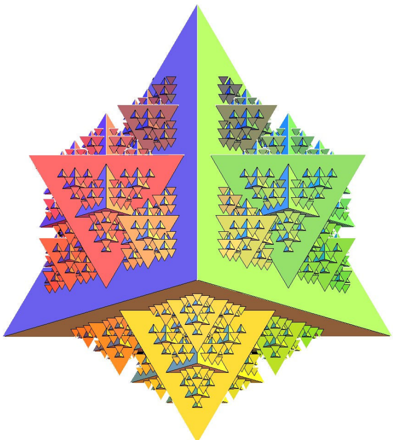
Em qualquer destas ampliações (e em qualquer outras), podemos descobrir réplicas do conjunto de Mandelbrot original, rodeadas por novas e impressionantes imagens, que mudam infinitamente. O conjunto de Mandelbrot tem uma forma muito particular de auto-semelhança aproximada – existe uma repetição infinita do conjunto mas também uma infinita variedade de formas rodeando esse conjunto, se o ampliarmos suficientemente.

O conjunto de Mandelbrot é descrito como *"o objecto mais complexo alguma vez concebido pelo Homem*", apesar de só depois da introdução dos computadores ampliações como as anteriores puderam ser geradas.

Para finalizar o capítulo "Estudo de Alguns Fractais", devemos ainda dizer é também possível a construção de fractais em três dimensões, o que não é surpreendente uma vez que a geometria fractal é a geometria da Natureza, do "caos". Esses são os casos do Fractal do Cubo e do Fractal do Tetraedro.

Fractal do Cubo





Fractal do Tetraedro

APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL

"*O Mundo que nos cerca é caótico mas podemos tentar imitá-lo no computador. A Geometria Fractal é uma linguagem muito versátil que nos ajuda com os fenómenos caóticos e imprevisíveis.*"

Mandelbrot

O primeiro contacto que as pessoas têm com fractais é, em geral, insuspeito.

Podemos observá-los em filmes, montagens fotográficas, "*screensavers*", em imagens de grande beleza mas que nunca conseguimos compreender. Quem não se lembra dos filmes *"StarWars"*. Várias imagens de planetas que aparecem nesses filmes são geradas com fractais.

Muitas pessoas ficariam surpreendidas por saber que o corpo humano tem em si muitos órgãos que têm características fractais. São inúmeros os exemplos de objectos fractais na Natureza: árvores, couve-flor, brócolos, nuvens, linhas de costa e existe até uma nova teoria que sugere que a expansão do Universo se processa segundo um modelo fractal. Os fractais dão-nos respostas para compreender a geometria da Natureza, uma área em que a geometria Euclidiana não pode ser aplicada.

Este novo tipo de Geometria aplica-se a quase tudo o que nos rodeia. Mandelbrot depressa percebeu a possibilidade de usar fractais para resolver complexos problemas matemáticos.

Na Biologia, a geometria fractal, principalmente o conceito de dimensão não necessariamente inteira, tem sido usada no estudo da rugosidade de alguns microorganismos.

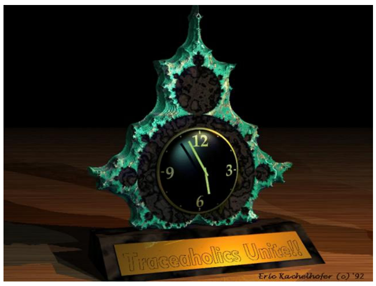
Na Economia, a análise das bolsas tem indicado que os valores das acções se comportam de forma aparentemente aleatória a curto prazo, mas que apresentam um certo padrão a médio e a longo prazo. É de notar que, se olharmos para a evolução da bolsa no período de um mês, uma semana, um dia ou algumas horas, o gráfico não perde o seu detalhe, tal como o fractal. Foi precisamente na Economia que o primeiro trabalho sobre fractais de Mandelbrot incidiu, embora na altura a designação "*fractal*" não existisse.

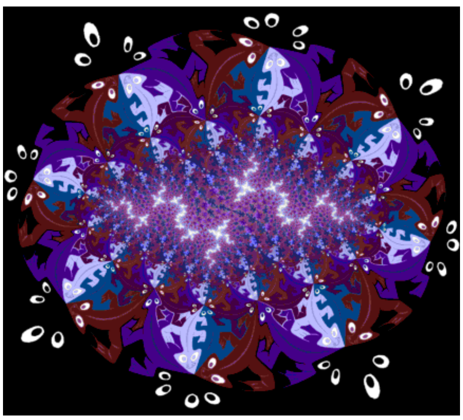
Na Medicina, reconhecem-se características fractais em fenómenos cardíacos e pulmonares. De facto, alguns estudos revelam que um coração saudável coração saudável bate a um ritmo fractal e, que um batimento cardíaco quase periódico, é um sintoma de insuficiência cardíaca. Além disso, novas formas de terapia do cancro estão a ser estudadas e novos processos de diagnóstico estão a ser considerados, utilizando a Geometria Fractal.

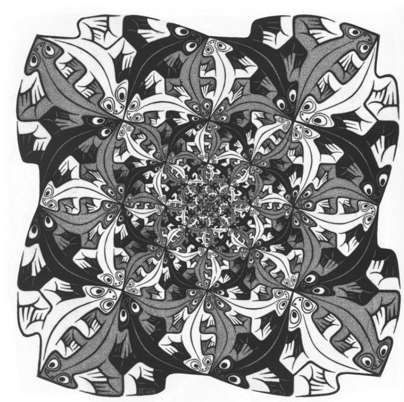
No campo da Informática, pode-se aproveitar as características fractais de certas imagens para tornar possível a sua compressão, codificando em algumas regras simples toda a informação que contêm. Michael Barnsley desenvolveu sistemas que permitem compressões com razões até 10000 para 1 demonstrando esses mesmos sistemas através de uma sequência de 40 minutos de imagens, contida numa disquete de 1,44 MB.

A superfície dos eléctrodos de uma bateria, com a sua porosidade, possui em termos gerais, uma característica tipicamente fractal que é a de manterem uma "auto-semelhança" para diferentes escalas de ampliação. Tal facto vai afectar as interacções químicas e físicas que se processem em contacto com essa superfície modificando as leis tradicionais, tornando-se necessário o recurso a técnicas fractais.

Na Arte, as influências estéticas são ainda difíceis de determinar, tal é a ruptura com os padrões clássicos que estas descobertas potenciam. A Geometria Fractal revolucionou o realismo visual, sendo usada na criação de imagens espectaculares e de mundos bizarros para jogos, animações e filmes, com detalhe variável de acordo com a escala evitando a pixelização. E é impossível determinar os avanços que os meios computacionais cada vez mais potentes auguram. Este realismo sem precedentes inspira artistas de todas as áreas, introduzindo novos símbolos que acompanham as novas mentalidades. Neste campo, está presente uma forma especial de auto-semelhança, conhecida como <u>Regresso Infinito</u> – uma sequência infinita de versões cada vez mais pequenas da mesma imagem.







Estas pinturas foram feitas pelo famoso artista alemão M.C. Escher, sem dúvida o artista mais conhecido do século na pintura inspirada na simetria.

Podemos referir também o uso da Geometria Fractal na análise de imagens por satélite, pois estas são muito complexas, e a geometria fractal (sendo a geometria da Natureza) é a única que consegue identificar certos padrões que não se enquadram em nenhum modelo de geometria convencional, como o contorno de uma floresta, por exemplo.

A Geometria Fractal é ainda usada no estudo de diversos fenómenos geológicos (nomeadamente na cartografia de falhas sísmicas) e na linguística (pois os linguistas começam a aplicar a teoria dos fractais na evolução dos dialectos).

Estes são apenas alguns exemplos das aplicações da Geometria Fractal. Uma vez que esta geometria é recente, parece-nos que estamos apenas no começo de compreender toda a utilidade e extensão da Geometria Fractal.

GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO SECUNDÁRIO

Neste capítulo, vamos procurar responder à seguinte pergunta: *Porquê trabalhar com fractais com alunos do Ensino Secundário?*

Em primeiro lugar, o facto já referido de a forma e dimensão fractais estarem muito presentes na natureza é, por si só, uma motivação válida para professores e alunos e as propriedades da recursividade e auto-semelhança são facilmente entendidas pelos educandos se visualizadas, por exemplo, na folha de um feto, ou na estrutura de uma couve-flor. Para além disso, dada a aplicabilidade do estudo dos fractais num número cada vez mais crescente de áreas da ciência e da tecnologia, pode ser um factor motivante para o seu estudo. Por fim (mas não menos importante), é incrível a quantidade de conceitos que podem ser abordados ou trabalhados quando se realizam actividades de exploração de fractais, quantidade essa que pode ser tanto maior quanto mais avançado for o nível dos alunos. Esses conteúdos podem ser abordados de uma forma mais ou menos objectiva, mais ou menos evidente, consoante a tarefa em si e a percepção que o aluno vai tendo das operações e dos conceitos matemáticos envolvidos.

Para se iniciar o estudo da Geometria Fractal, são dados actualmente um conjunto de actividades práticas de modo que os alunos se sintam mais motivados para o estudo deste novo tema. A título de exemplo, temos a seguinte actividade:

Actividade: Construção de um Fractal numa Folha de Papel

Material:

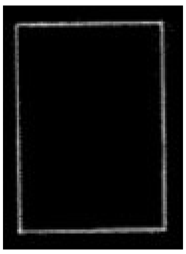
Folha de papel A4;

Tesoura;

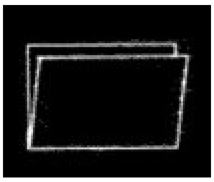
Instruções:

1. Meça o comprimento da folha (= **a**);
2. Meça a largura da folha (= **b**);
3. Dobre a folha de papel ao meio;
4. Faça 2 cortes de comprimento $\frac{a}{4}$ afastados de cada lado do papel $\frac{b}{4}$:
5. Dobre segundo o segmento criado pelos dois cortes;
6. Repita os passos 1 a 5, mas agora para a parte da folha que acabou de dobrar;
7. Continue este processo o máximo de vezes possíveis;
8. Dobre a folha A4 formando um ângulo recto;
9. Dobre a parte da folha obtida no passo 5, de modo a formar um ângulo recto com a dobra do passo 8;
10. Repita o passo 9 para as outras partes da folha.

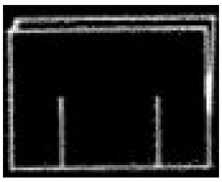
Passos 1 e 2



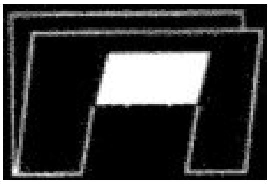
Passo 3



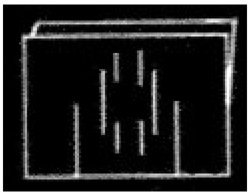
Passo 4



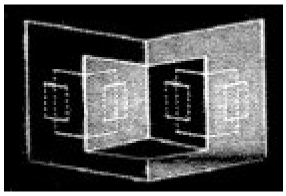
Passo 5



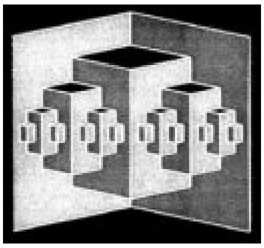
Passos 6 e 7



Passo 8



Passos 9 e 10



Questões:

1. Conte os elementos em cada iteração e faça uma tabela.

2. Identifique o padrão de crescimento e indique a sucessão que permite calcular o número de elementos para a n-ésima geração.

3. Qual a área total (isto é, depois de uma infinidade de dobras) da superfície dos elementos? (Sugestão: Escolha um valor conveniente para a área do primeiro elemento).

4. Investigue o que acontece, se fizer um corte diferente, alterar o tamanho do corte ou aumentar o número de cortes.

CONCLUSÃO

A descoberta, o estudo e a estrutura geométrica dos fractais tornou-se num dos tópicos mais falados na Matemática nos últimos vinte anos. É uma parte da Matemática que combina teorias complexas e interessantes, bonitos gráficos, e com extrema relevância no mundo real.

Existe uma grande diferença entre os tipos de formas que estudámos neste trabalho e a geometria tradicional, sendo difícil confundir as duas. As formas da geometria tradicional e os objectos construídos a partir dessas formas podem ser feitos pelo Homem, enquanto que as formas da Natureza têm aspecto completamente diferente, sendo muito difícil de recriar pelo Homem.

Mandelbrot ("pai" da geometria fractal) foi o primeiro a perceber as fundações do aspecto dos objectos da Natureza, sob a forma de auto-semelhança, e que a construção destes objectos têm como princípio esta característica. Hoje, os princípios da geometria fractal são usados em muitas áreas, já referidas nas aplicações dos fractais.

A Geometria como a conhecemos no passado foi desenvolvida pelos Gregos à 2000 mil anos e quase não foi modificada ao longo do tempo. Foi (e ainda é) um grande triunfo para a mente humana, e permitiu-nos desenvolver muitas das nossas tecnologias, engenharias, arquitecturas, e por aí em diante. Contudo, como ferramenta e linguagem para modelar e representar a Natureza, a geometria "grega" falhou.

A descoberta da geometria fractal parece ter dado à ciência a linguagem matemática correcta para ultrapassar esta falha, e promete ser uma das grandes descobertas do século XX na matemática. Podemos dizer que estamos cada vez mais a caminhar no sentido de definir o indefinido, mesmo que seja por processos infinitos.

Com a introdução da Geometria Fractal criou-se um espaço intermédio entre a regularidade e o caos, considerado na mitologia Grega como o nada donde todas as coisas surgiam. Cada vez mais elementos ou sistemas ditos caóticos "passam" para a classe dos objectos fractais, pois é encontrada regularidade em movimentos aparentemente aleatórios.

A elaboração deste trabalho foi uma experiência muito enriquecedora para nós, tanto a nível de cultura geral como a nível do nosso conhecimento matemático. O facto deste tema ser desconhecido para nós levou-nos a uma pesquisa mais profunda de modo a abordarmos o tema de uma forma mais completa e segura. Inicialmente, o tema proposto parecia-nos pouco interessante, mas à medida que fomos compreendendo os vários conceitos nele envolvidos e fomos sendo capaz de os sintetizar e de os apresentar de forma ordenada, a curiosidade sobre a geometria fractal cresceu exponencialmente. Para isso muito contribuiu o constatar que a geometria fractal está patente em tantos lugares (sobretudo em objectos e em seres naturais) e que formas tão complexas e por vezes tão bonitas podem ser criadas, ou simuladas, por processos matemáticos muito simples.

Outra surpresa para nós foi a grande aplicabilidade do estudo da Geometria Fractal, nomeadamente dos conceitos de estrutura e de dimensão fractal a um campo tão vasto de áreas, desde as ciências naturais às económico-sociais e à tecnologia.

Procurámos abordar o tema de um modo simples e rigoroso do ponto de vista científico, de modo que não sejam necessários grandes conhecimentos para o compreender.

Contudo, e dada a novidade do tema, é possível (e provável...) que se encontrem alguns erros neste trabalho. Todas as críticas são, por isso, bem-vindas, e desde já as agradecemos.

BIBLIOGRAFIA

Gulick, Denny, "*Encounters with Chaos*", McGraw-Hill International Editions – Mathematics and Statistics Series, 1992.

Mandelbrot, Benoit B., "*The Fractal Geometry of Nature*" – 19th Edition, W.H. Freeman & Company, 2000.

Tannenbaum, Peter, e Arnold, Robert, "*Excursions in Modern Mathematics*" – 4th Edition, Prentice Hall, 2001.

Na **Internet** (pesquisa realizada em Setembro de 2002):

http://educom.sce.fct.unl.pt/~eb23qmar/fractais/

http://library.thinkquest.org/3493/frames/fractal.html

http://math.rice.edu/~lanius/fractals/

http://tatooine.fortunecity.com/stephenson/51/matematica/geofractal.html

http://www.albertomesquita.net/am/fractais/

http://www.cetesbr.org/fractais1.htm

http://www.dcc.online.pt/~c9507043/texto/node2.html

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fractais.htm

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/

http://www.educacao.sp.gov.br/projetos/mundoinf/escolas/christino_cabral/

http://www.ees.nmt.edu/~davew/P362/boxcnt.htm

http://www.fractal.art.br/ha.html

http://www.fractales.org/

http://www.fractalwisdom.com/FractalWisdom/fractal.html

http://www.insite.com.br/rodrigo/misc/fractal

http://www.manuelgrilo.com/rui/complexidade/iii1.html

http://www.mat.ufpr.br/~biloti/fractal.html

http://www.terravista.pt/mussulo/1362/deffractal.htm

http://www.victoriamx.com/fractales

http://wwwalu.por.ulusiada.pt/21503998/fractais.htm