

Índice

Introdução	1
Generalidades	2
1. Um pequeno histórico da Teoria dos Grafos	3
1.1. As diferentes escolas e os grupos aplicados	4
2. Noções Básicas	6
3. Como Melhor Podemos Caracterizar um Grafo	8
 Grafos Eulerianos	12
1. Leonhard Euler	13
2. Grafos Eulerianos	13
3. Algoritmo de Fleury	15
4. Como Eulerizar um Grafo	17
5. Aplicações	18
 Grafos Hamiltonianos.....	29
1. Introdução.....	32
2. Willian Rowan Hamilton.....	32
3. O Jogo Icoseano – Viagem pelo Mundo	34
4. Noções Básicas	36
5. Propriedades dos Grafos Hamiltonianos	38
6. Hamilton versus Euler	40
7. Ciclo Hamiltoniano em Grafos Completos	41
8. O Problema do Caixeiro Viajante (PCV ou TSP)	45
8.1. Formulação do Problema do Caixeiro Viajante	45
8.2. Principais Aplicações	45

8.3.	Estratégias para Resolver os Problemas do Caixeiro Viajante.....	47
8.3.1.	Método 1: Algoritmo da Força Bruta	48
8.3.2.	Método 2: Algoritmo do Vizinho Mais Próximo	49
8.3.2.1.	Algoritmo da Força Bruta / Algoritmo do Vizinho Mais Próximo	50
8.3.3.	Algoritmos Aproximados	51
8.3.3.1.	Método 3: O Algoritmo Repetitivo do Vizinho mais Próximo	51
8.3.3.2.	Método 4: Algoritmo da Ligação mais Económica.....	52
9.	Aplicações	55
9.1.	Problema do Cavalo.....	55
9.2.	Assassinato no Castelo de York	56
9.3.	Problema de Armazenamento.....	60
9.4.	A Herança do Califa de Bagdad	61
10.	Exercícios	62
	Conclusão	65
	Bibliografia	66

Introdução

Este trabalho foi realizado no âmbito da disciplina de Fundamentos e Ensino da Álgebra com o tema Teoria de Grafos – Grafos Eulerianos e Grafos Hamiltonianos.

O objectivo deste trabalho é apresentar da forma mais explícita possível este assunto, incidindo especialmente sobre alguns exemplos de aplicação de carácter prático. Estes exemplos permitem uma melhor compreensão dos grafos e a sua utilidade na vida real.

Sendo dois dos objectivos gerais dos programas de ensino a preparação para a vida activa e aprender a aprender acreditamos que a introdução da Teoria de Grafos nos programas de ensino tem vantagens atendendo:

- ◇ às suas aplicações em diferentes áreas do saber;
- ◇ ao seu potencial para desenvolver aspectos como a visualização de situações e a esquematização de raciocínios;
- ◇ a que é um extraordinário meio de comunicação;
- ◇ a que desenvolve capacidades lógicas e de precisão bem como destrezas manuais.

A importância crescente de problemas matemáticos relacionados por exemplo com questões de trânsito ou de negócios, que implicam tomada de decisões leva-nos a considerar que os grafos devem ser um dos tópicos a ser integrados nos programas de Matemática. Estes constituem uma boa ferramenta para conceptualizar situações, para entender esquemas e transferi-los para novas situações para além de exigirem poucas destrezas numéricas e de cálculo. Permitindo trabalhar conceitos numéricos e operações básicas não exigem muitos conhecimentos nem técnicas matemáticas, o que pode levar a que um maior número de alunos os discutam sem dificuldades.

Neste trabalho tivemos o cuidado de escolher os problemas que nos pareceram mais aliciantes e que cobrissem alguns dos conceitos por nós expostos.

Generalidades

1. Um pequeno histórico da Teoria dos Grafos

Podemos dizer, como **Harary**, que a teoria dos grafos foi redescoberta muitas vezes; ou, então, que problemas do interesse de diversas áreas foram estudados separadamente e mostraram características semelhantes. Importante, de qualquer modo, é observar que o período transcorrido entre a demonstração de Euler e a última década do século XIX - mais de 150 anos - viu, apenas, o surgimento de alguns poucos trabalhos. Assim é que, em 1847, **Kirchhoff** utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos eléctricos e ao fazê-lo, criou a teoria das árvores, - uma classe de grafos, para caracterizar conjuntos de ciclos independentes. Dez anos mais tarde, **Cayley** seguiria a mesma trilha, embora tendo em mente outras aplicações, dentre as quais se destaca a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica. Enfim, **Jordan** (1869) se ocupou também das árvores, de um ponto de vista estritamente matemático.

Muitos eventos que provaram ser importantes são relacionados com problemas com pouca aplicação prática: **Hamilton**, em 1859, inventou um jogo que consistia na busca de um percurso fechado envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez. É interessante, aliás, observar que os problemas de Hamilton e de Euler encontraram aplicação, respectivamente um e dois séculos mais tarde, no campo da pesquisa operacional. **Kempe** (1879) procurou, sem sucesso, demonstrar a "conjectura das quatro cores", apresentada por **Guthrie** a **De Morgan**, provavelmente em 1850. Este problema, um dos mais importantes já abordados pela teoria dos grafos, oferece interesse apenas teórico: trata-se de provar que todo mapa desenhado no plano e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de quatro cores sem que duas regiões fronteiriças recebam a mesma cor. **Tait** (1880) divulgou também uma "prova", infelizmente baseada numa conjectura falsa e **Heawood** (1890) mostrou que a prova de Kempe estava errada, obtendo no processo uma prova válida para 5 cores; a prova para 4 cores somente foi obtida em 1976. A importância do problema reside nos desenvolvimentos teóricos trazidos pelas tentativas de resolvê-lo, as quais enriqueceram a teoria dos grafos em diversos recursos ao longo da primeira metade do século XX: exemplificando, **Birkhoff** (1912) definiu os polinómios cromáticos; **Whitney** (1931) criou a noção de grafo dual e **Brooks** (1941) enunciou um teorema fornecendo um limite para o número cromático de um grafo.

Outros eventos importantes podem ser citados: **Menger** (1926) demonstrou um importante teorema sobre o problema da desconexão de itinerários em grafos e **Kuratowski** (1930) encontrou uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo. **Turán** (1941) foi o pioneiro do ramo conhecido como teoria extremal de grafos e **Tutte** (1947) resolveu o problema da existência de uma cobertura minimal em um grafo. Vale a pena registrar que o termo grafo foi usado pela primeira vez por **Sylvester** em 1878 e que o primeiro livro específico sobre grafos foi publicado por **Konig** em 1936, uma época na qual, conforme **Wilder**, o assunto era considerado "um campo morto".

A partir de 1956, com a publicação dos trabalhos de **Ford e Fulkerson** (1956), **Berge** (1957) e **Ore** (1962), o interesse pela teoria dos grafos começou a aumentar, crescendo rapidamente no mundo todo: conforme cita **Harary**, em 1969 foi publicada por J. Turner. A imensa maioria dos livros sobre grafos foi publicada depois de 1970, em grande parte sob a influência das obras de Berge e Harary. O desenvolvimento dos computadores levou à publicação de várias obras dedicadas aos algoritmos de grafos, abrindo assim possibilidades crescentes de utilização aplicada da teoria.

1.1. As diferentes escolas e os grupos aplicados

A primeira escola: **a húngara**, originada em Konig e desenvolvida por Erdos, Hajnãl, Turán e outros. Seu interesse derivou da combinatória e alguns de seus autores se dedicaram à teoria extremal - utilizada, frequentemente, na obtenção de limites de fácil cálculo para parâmetros de difícil determinação. Habitualmente, essa escola trabalha com grafos não orientados.

A **escola francesa**, seguindo Berge, tende a considerar que "todo grafo é orientado, podendo-se eventualmente desconsiderar a orientação"; é, talvez, a que mais se tem dedicado às aplicações no campo da pesquisa operacional. Nomes de destaque em pesquisa e divulgação da teoria e de suas aplicações são Ghouila-Houri, Kaufmann, Roucairol, Faure e Minoux.

A **escola americana** sofreu grande influência de Harary: há preferência pelo estudo de grafos não orientados, embora os orientados recebam atenção. Pesquisadores importantes dessa escola são Chartrand, Ore, Hu, Fulkerson e Whitney, entre outros.

A Inglaterra, o Canadá e a ex-União Soviética, com diversos nomes de relevo, contribuem de forma significativa para a literatura mundial no assunto.

Há ainda a considerar os pesquisadores especificamente aplicados, em particular os dedicados às aplicações em electricidade: **Chen, Seshu, Reed, Johnson** e outros. O seu trabalho se caracteriza pelo uso de um subconjunto bastante característico dos recursos da teoria, de particular interesse para essas aplicações (as origens, evidentemente, estão no trabalho de Kirchhoff). O uso de recursos bem delimitados é característico de muitas áreas aplicadas: a chamada "teoria do equilíbrio estrutural" nas aplicações a psicossociologia, baseada nas ideias de **Moreno**; diversos aspectos da teoria das árvores nas aplicações à computação e, enfim, o uso da teoria dos fluxos em redes nas aplicações de pesquisa operacional em transportes e comunicações.

No nosso trabalho vamos seguir a Escola Americana.

2. Nocões Básicas

- ❖ **Grafo:** $G = (V, E)$ é um conjunto não-vazio V , cujos elementos são chamados *vértices*, e um conjunto E de *arestas*. Uma aresta é um par não-ordenado (v_i, v_j) , onde v_i e v_j são elementos de V . Normalmente, utiliza-se uma representação gráfica de um grafo.

Exemplo:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

onde

$$a_1 = (v_1, v_2), a_2 = (v_1, v_3), a_3 = (v_1, v_3), a_4 = (v_2, v_3),$$

$$a_5 = (v_2, v_5), a_6 = (v_5, v_5), a_7 = (v_3, v_5), a_8 = (v_3, v_4).$$

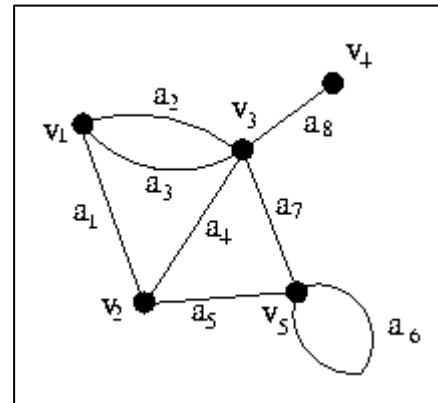
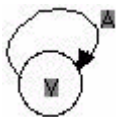


Fig. 1

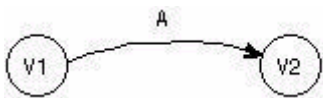
- ❖ **Arco:** é uma aresta que possui indicação de sentido (uma seta).
 ❖ **Linha:** é uma aresta que não possui indicação.

As principais características desta estrutura são:

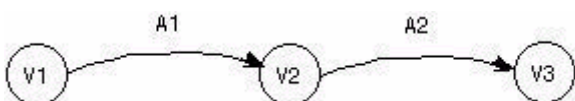
1. toda aresta fechada de E tem apenas um ponto de V ;



2. toda aresta aberta de E tem exactamente dois pontos de V ;



3. As arestas de E não têm pontos comuns excepto os elementos do conjunto V .



- ❖ **Laço:** é uma aresta que começa e termina no mesmo vértice.

❖ **Grafo Dirigido ou Dígrafo:** é um grafo que possui arcos.

Exemplo:

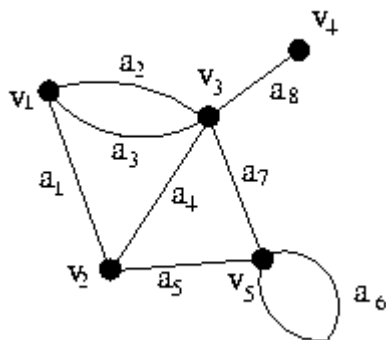


❖ **Arestas Múltiplas ou Multiarestas:** são repetições de pares de arestas.

❖ **Grafo Simples:** é aquele em que para cada par de vértices distintos existe no máximo uma aresta incidente em ambos.

❖ **Pseudografo:** é aquele que possui no mínimo um laço.

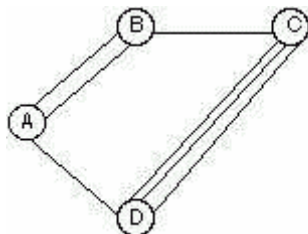
Exemplo:



A aresta a_6 é um laço.

❖ **Multigrafo:** é aquele que possui arestas múltiplas.

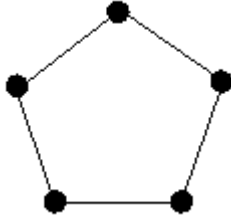
Exemplo:



3. Como Melhor Podemos Caracterizar um Grafo

- ❖ **Cardinalidade:** de um conjunto de vértices, V , é igual à quantidade dos seus elementos. É também chamada de ordem.

Exemplo:



A cardinalidade deste grafo é igual a 5, ou seja, $C(V)=5$.

- ❖ **Aresta Incidente:** é aquela que liga dois vértices distintos.
- ❖ **Arestas Adjacentes:** são aquelas que estão ligadas a um mesmo vértice e não são arestas múltiplas.
- ❖ **Vértices Adjacentes:** são aqueles que estão ligados por uma mesma aresta.
- ❖ **Grau do Vértice:** é o número de arestas incidentes a um vértice v_i (contando duas vezes os laços) denota-se por $d(v_i)$.

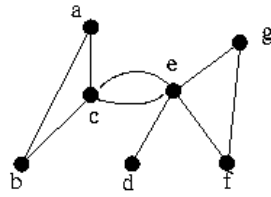
Exemplo:

Na Fig1, temos $d(v_1)=3$, $d(v_5)=4$ e $d(v_4)=1$.

- ❖ **Caminho:** é uma sucessão de vértices e arestas tal que cada aresta liga o vértice que a precede ao vértice que a segue, não repetindo arestas.
- ❖ **Caminho Fechado:** é aquele que começa e termina no mesmo vértice.
- ❖ **Ciclo:** é um caminho fechado
- ❖ **Trilho:** é um caminho onde pode haver repetição de vértices mas não de arestas.
- ❖ **Passeio:** é um caminho onde pode haver repetição de arestas e de vértices.
- ❖ **Ponte:** é uma aresta cuja remoção reduz a conexidade do grafo.

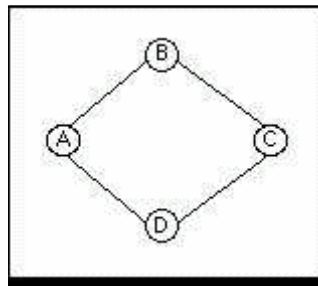
Exemplo:

A aresta (d,e) é uma ponte.



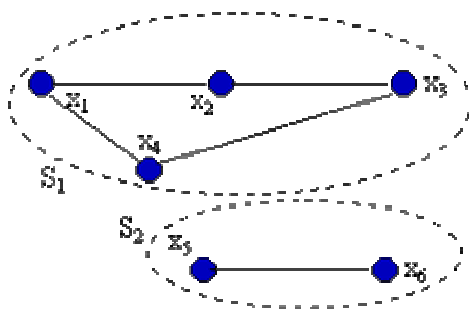
- ❖ **Subgrafo de um Grafo G:** é aquele cujo o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas são subconjuntos do conjunto de vértices e de arestas, respectivamente, de G.
- ❖ **Grafo Completo:** é aquele em que todos os vértices são adjacentes.
- ❖ **Grafo Bipartido:** é aquele em que o conjunto dos seus vértices admite uma partição $\{V_1; V_2\}$ de tal maneira que toda a aresta de G une um vértice de V_1 a um vértice de V_2 .
- ❖ **Grafo Conexo:** é aquele onde entre qualquer par de vértices existe sempre um caminho que os une.

Exemplo:



- ❖ **Grafo Desconexo:** é aquele que não é conexo.
- ❖ **Componentes Conexas:** de um grafo desconexo, são subgrafos conexos, disjuntos em relação aos vértices e maximais em relação à inclusão.

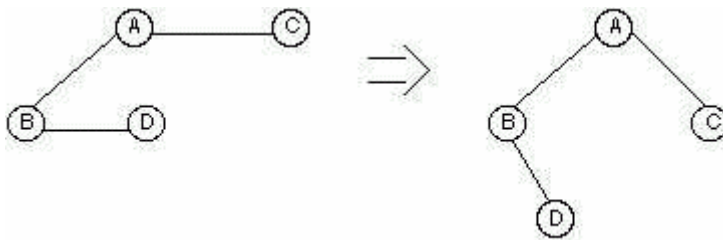
Exemplo:



❖ **Grafo-árvore** é aquele que possui uma das seguintes características:

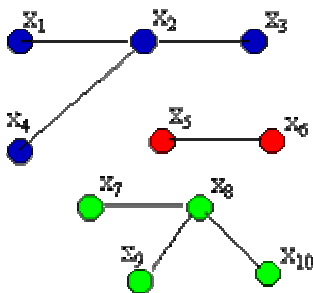
1. é conexo e sem ciclos;
2. é conexo e tem n vértices e $n-1$ linhas;
3. sem ciclos e tem n vértices e $n-1$ linhas;
4. sem ciclos e, inserindo uma nova linha, é possível formar um ciclo.

Exemplo:



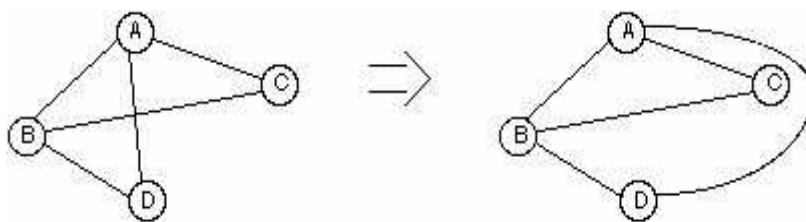
❖ **Floresta:** é um grafo cujas componentes conexas são árvores.

Exemplo:



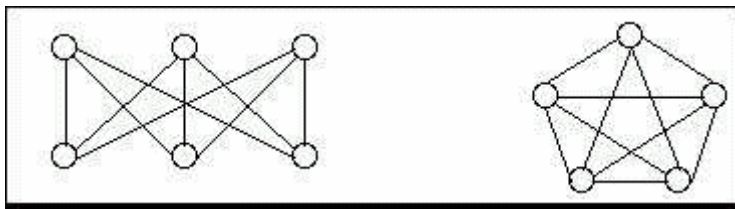
❖ **Grafo Planar:** é aquele que permite a representação no plano sem que as linhas se cruzem.

Exemplo:



❖ **Grafo de Kuratowski:** é um tipo de grafo aceito como não-planar.

Exemplo:



❖ **Grafos Isomorfos G_1, G_2 :** são aqueles entre os quais existe uma bijecção entre os conjuntos dos vértices dos dois grafos, preservando a adjacência desses vértices, ou seja, se dois vértices são adjacentes em G_1 , as suas imagens pela referida bijecção são adjacentes em G_2 .

Teorema :

A soma dos graus de saída (de entrada) de um grafo dirigido é igual ao número de arestas no grafo.

Exemplo:

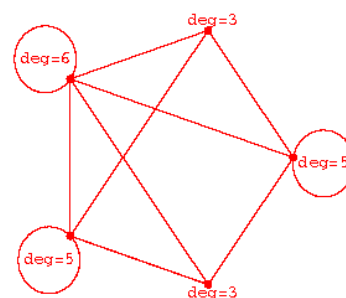


Teorema:

Em qualquer grafo G a soma dos graus de todos os seus vértices é igual ao dobro do número de arestas.

Exemplo:

No grafo seguinte estão indicados os graus de todos os vértices. Este grafo tem 11 arestas enquanto a soma de todos os graus é igual a 22.



Grafos

Eulerianos

1. Leonhard Euler



▲ Leonhard Euler (1707–1783).

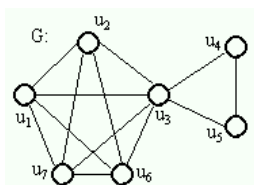
Matemático suíço, nasceu na Basileia em Smpetersburgo em 15-04-1707 falecendo a 18-09-1783. Em 1720, com 14 anos, entrou para a universidade para obter uma educação geral antes de enveredar em estudos mais avançados. Completou os seus estudos na Universidade de Basel em 1726. Legou à posteridade numerosos trabalhos sobre curvas, séries, cálculo de variações, cálculo infinitesimal, geometria, álgebra e sobre questões de engenharia mecânica, óptica e astronomia. Foi o primeiro a considerar as funções seno e co-seno. As fórmulas de Euler (por exemplo $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$) mostram a dependência entre a função exponencial com expoentes imaginários e as funções seno e co-seno. Foi Euler que apresentou: e para número de Neper, i para a raiz quadrada de -1 , $f(x)$ para função. Em 1736, publicou a sua obra mais importante, a “Mechanica”, onde transformou a Mecânica numa ciência analítica.

2. Grafos Eulerianos

- ❖ **Grafo Euleriano:** é aquele que possui um ciclo que contem todas as suas arestas. Este ciclo é dito ser um *ciclo euleriano*.

Exemplo:

O grafo da figura abaixo, é **euleriano** já que ele contém o ciclo: $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_3, u_1, u_6, u_2, u_7, u_3, u_6, u_7, u_1)$, que é euleriano



- ❖ **Trilho Euleriano:** é aquele que passa por todas as arestas.

Nota: Um trilha não repete arestas, e ao contrário do ciclo não tem de começar e terminar no mesmo vértice.

O teorema que se segue prevê uma solução simples para determinar se um grafo é euleriano:

Teorema:

Um grafo G é euleriano se e somente se G é conexo e cada vértice de G tem grau par.

Daqui decorre que:

Se um grafo tiver um vértice qualquer de grau ímpar então é impossível encontrar um ciclo de Euler.

Teorema:

Um grafo conexo G é um grafo euleriano se e somente se ele pode ser decomposto em circuitos.

Teorema:

Se um grafo G tiver mais de dois vértices de grau ímpar então não existe nenhum trilha euleriano.

Teorema:

Se G for um grafo conexo e tiver apenas dois vértices de grau ímpar então ele tem pelo menos um trilha euleriano (às vezes mais). Qualquer trilha tem de começar num dos vértices de grau ímpar e terminar no outro.

3. Algoritmo de Fleury

Em que consiste :

Este algoritmo consiste em procurar um ciclo euleriano num grafo conexo no qual todos os vértices têm grau par.

Característica:

Nunca atravessar uma ponte sem que isso seja estritamente necessário .

Explicação do método:

- Começamos por fazer duas cópias do grafo original.
Temos então:
O grafo cópia 1 : onde vamos tomar decisões.
O grafo cópia 2 : que é utilizado para recordar o que já foi feito.
- Escolhemos em ambos, um vértice qualquer para começar o percurso. De seguida escolhemos uma aresta que esteja ligada a esse vértice sem que a sua remoção torne o grafo cópia 1 desconexo. Na cópia 2 sublinhamos essa aresta com uma cor e numeramo-la. Na cópia 1 apagamo-la. Repetimos este processo até voltar ao vértice inicial

Ter em conta:

- As pontes são consideradas no grafo em que as arestas são apagadas.
- Só se passa uma vez por cada aresta.

Observação:

- É importante fazer uma cópia do grafo original para evidenciar o que já foi feito e o que ainda está por fazer. Existem diversas maneiras de encontrar um ciclo euleriano. Para entender como funciona o algoritmo de Fleury, considere o seguinte exemplo.

Exemplo:

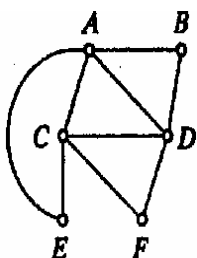
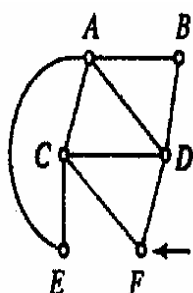
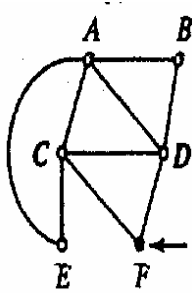


Fig.3

Copia 1



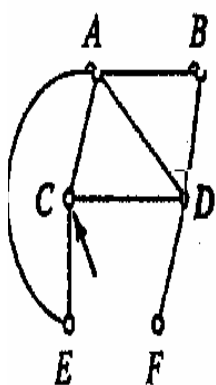
Copia 2



Início: Podemos escolher um qualquer ponto inicial.

Passo 1: Passemos do vértice F para o vértice C.
(Também podíamos ir de F para D.)

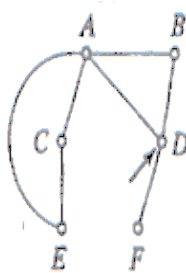
Copia 1



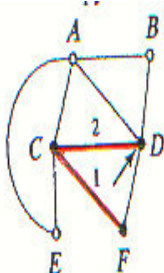
Copia 2



Copia 1

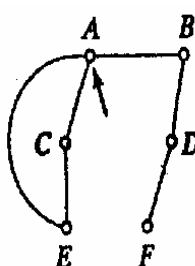


Copia 2

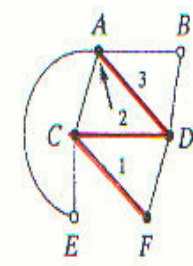


Passo 2: Passemos do vértice C para o vértice D.
(Também podia ser para o vértice A ou para o vértice E.)

Copia 1



Copia 2

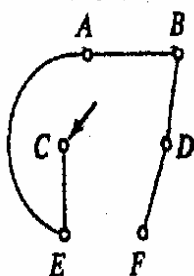


Passo 3: Passemos do vértice D para o vértice A.
(Também podíamos ir para o vértice B, mas não para o vértice F – DF é uma ponte).

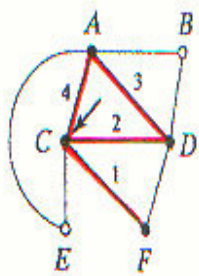
Pag. 16

Passo 4: Passemos do vértice A para o vértice C.
(Podíamos também ir para o vértice E, mas não para o vértice B – AB é uma ponte.)

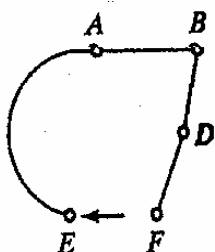
Copia 1



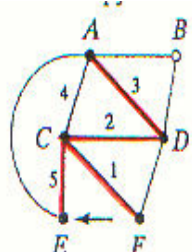
Copia 2



Copia 1



Copia 2

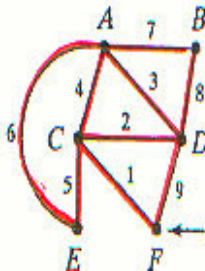


Passo 5: Passemos do vértice C para o vértice E.
(Não temos outra escolha.)

Copia 1



Copia 2



Passo 6,7,8 e 9: Só há uma escolha possível para terminarmos o ciclo.

4. Como Eulerizar um Grafo

Problema:

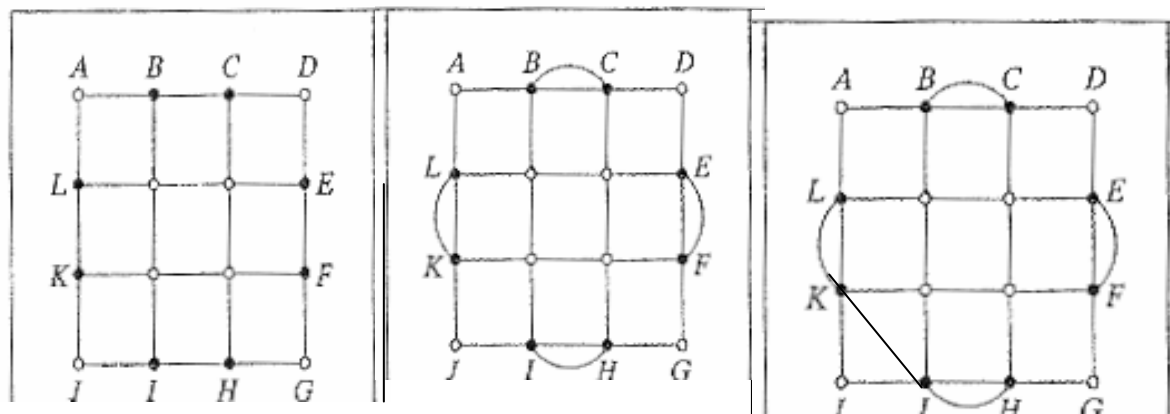
Se não tivermos nem um caminho nem um ciclo euleriano como podemos percorrer o grafo repetindo o menor número de arestas possíveis?

A solução deste problema consiste na eulerização de um grafo.

Eulerizar um grafo é juntar as arestas estritamente necessárias para que todos os vértices de grau ímpar se tornem vértices de grau par.

No entanto não podemos acrescentar arestas não existentes, apenas podemos duplicar as já existentes.

Exemplo:



(a)

(b)

(c)

(a) É o grafo original

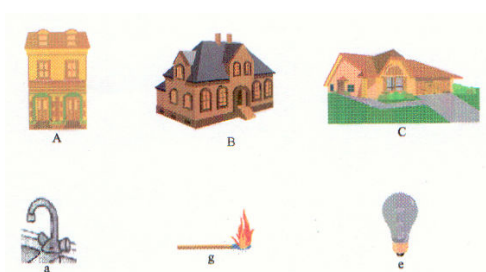
(b) É uma versão eulerizada do grafo (a)

(c) É uma eulerização ilegal do grafo (a), pois a aresta $\{K, I\}$ não existia no grafo original

5. Aplicações

Actividade I

Pretendemos ligar três casas A, B e C, a três utilitários, gás (g), água (a) e electricidade (e). Por razões de segurança convém que as ligações não se cruzem.



Quantas ligações terão de ser feitas?

Conceitos chave

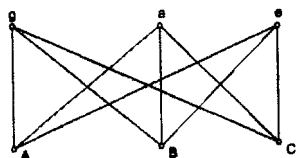
- Vértices
- Arestas
- Grafos (definição)
- Vértices adjacentes
- Vértices incidentes
- Grau de um vértice
- Grafo regular
- Grafo completo
- Grafo bipartido
- Grafo planar

Resolução:

Representação em grafo:

Vértices: A, B, C, g, a, e

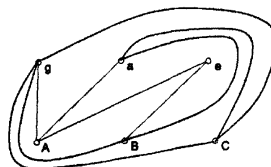
Arestas: (A, g); (A, a); (A, e); (B, g); (B, e); (B, a); (C, g); (C, a); (C, e)



Trata-se de um grafo regular: todos os vértices têm grau três

É bipartido, basta considerar a partição $V_1 = \{A, B, C\}$ $V_2 = \{g, a, e\}$

É planar porque, embora tenha sido desenhado com as arestas a intersectarem-se pode ser desenhado sem que tal aconteça.

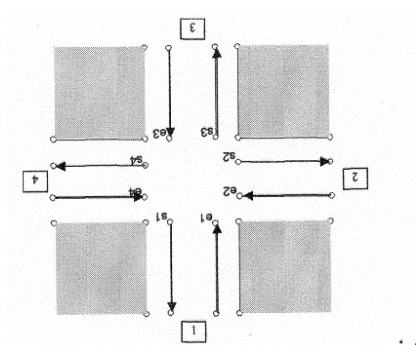


Conclusão: É possível efectuarem-se 9 ligações (que é igual ao número de arestas).

Actividade II

A regulação do tráfego automóvel, em cruzamentos, por semáforos, parte do princípio de que o fluxo de circulação de veículos procedente de ruas distintas não se intersecta ao confluir para o cruzamento. Esta situação é representada por um esquema de pontos e linhas. Os pontos mostram a saída de um cruzamento (e a chegada ao mesmo) enquanto que as linhas indicam o(s) sentido(s) de possíveis circulações entre as entradas e saídas do cruzamento.

Regula com semáforos a circulação automóvel de modo a evitar colisões num cruzamento com dois sentidos e possibilidade de virar à esquerda e à direita. Não é permitido fazer uma volta de 180 graus.



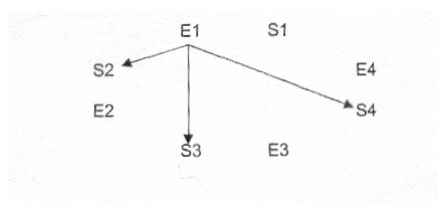
Conceitos chave

- Subgrafo
- Grafo dirigido
- Grafos isomorfos

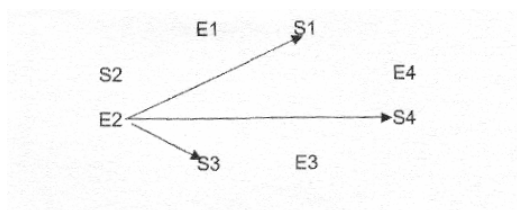
Resolução:

Primeiramente exploramos várias situações:

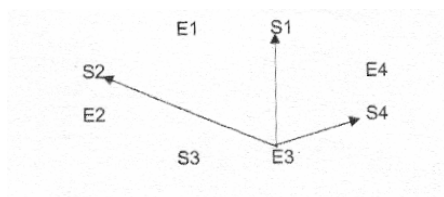
1. Quando o grafo da rua 1 está verde (supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos:



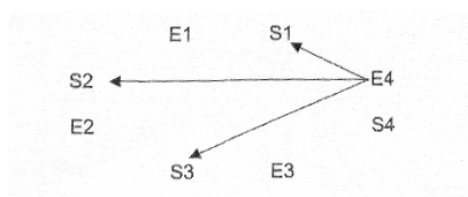
2 Quando o grafo da rua 2 está verde(supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos:



3 Quando o grafo da rua 3 está verde(supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos:



4. Quando o grafo da rua 4 está verde(supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos:



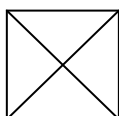
Cada situação é um subgrafo da situação global que representa todas as possibilidades de deslocamento no cruzamento em causa.

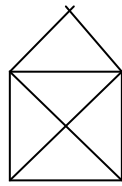
Em cada situação os grafos subjacentes aos grafos dirigidos (supondo que as arestas deixam de ter um sentido), são isomorfos aos restantes.

Há a possibilidade de decompor os 12 trajectos num menor número de situações. Esse será um desafio que poderá ficar no ar: qual o número mínimo de situações a considerar, na organização dos semáforos, neste cruzamento?...

Actividade III

Sabes repetir as seguintes figuras sem levantar o lápis do papel, sem repetir duas vezes a mesma linha mas passando por todas?





Conceitos chave

- Grau de um vértice
- Passeio
- Trilho
- Caminho
- Ciclo ou circuito
- Grafo dirigido
- Grafo conexo
- Grafo de Euler
- Circuito de Euler
- Teorema de Euler

Resolução

A primeira figura é impossível de resolver porque não se pode encontrar um caminho euleriano visto que tem mais de dois vértices de grau ímpar.

Na segunda figura é possível encontrar um caminho euleriano, por exemplo : A-D-C-B-D-E-C-A-B.

Actividade IV

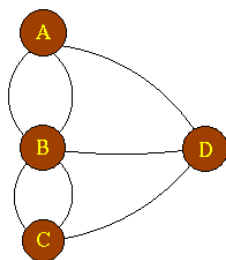
Problema das Pontes de Königsberg

A um ocioso de uma cidade alemã, Königsberg, ocorreu um dia uma estranha e inútil pergunta, cujo único interesse parecia residir na dificuldade em lhe responder: poderia ele planear um passeio que cruzasse as sete pontes sobre o rio Pregel, que uniam as diversas zonas da cidade e a ilha situada no meio? A pergunta correu de boca em boca e de cabeça em cabeça sem resposta, até que veio a pousar sobre a de Euler. Ali

aninhou e, depois de um período de incubação, deu nascimento a um dos ramos importantes da matemática: a topologia.

Resolução:

Euler representou cada zona - A, B, C e D - por um ponto, chamado vértice num grafo, e cada ponte conectando estas zonas por uma linha, chamada de aresta. Assim, obteve uma representação gráfica do problema como ilustrada abaixo:

**Relembremos:****Teorema de Euler:**

Um grafo G é euleriano se e somente se G é conexo e cada vértice de G tem grau par.

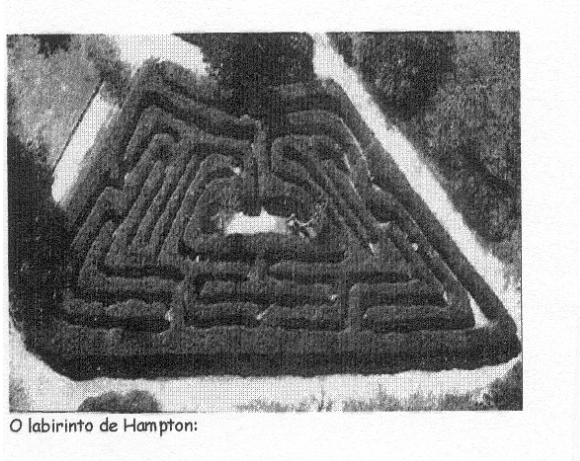
Modelado desta forma, o problema das Pontes de Königsberg é essencialmente um problema de determinar se o multigrafo correspondente possui um trilho(essencialmente um ciclo) euleriano .

Como os graus de todos os vértices são ímpares, é fácil verificar que este grafo não apresenta nem um trilho, nem um ciclo euleriano, visto que ele não satisfaz o teorema de Euler.

Conclusão: Então é impossível atravessar todas as pontes uma vez só e voltar ao lugar de partida.

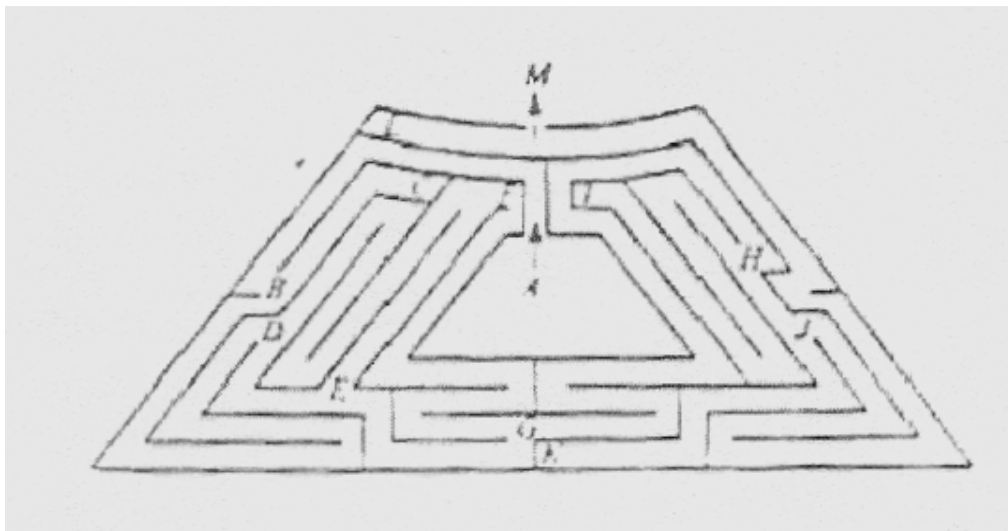
Atividade V**Labirinto de Sebes**

O Labirinto de Sebes mais famoso encontra-se em Inglaterra, nos terrenos do Palácio



Real de Hampton. O seu percurso completo tem cerca de $\frac{3}{4}$ de um quilómetro.

Tente encontrar um trajecto para sair do labirinto de Hampton, supondo que está em A .



Conceitos chave

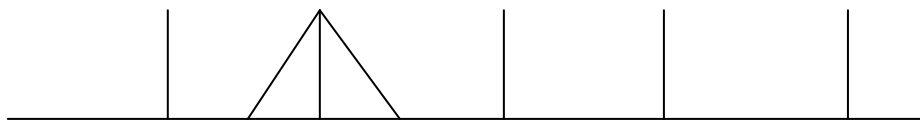
- Grafo de Euler
- Circuito de Euler
- Teorema de Euler

Resolução:

A partir do mapa do labirinto podemos fazer o seu grafo.

Como neste estão indicadas as várias hipóteses em cada cruzamento para encontrar a saída basta encontrar um circuito de Euler.

O grafo do labirinto:



Para sair do centro A do labirinto e chegar á saída M basta seguir o circuito ABDEGHJM, ignorando as outras passagens.

Actividade VI

Em 1962, 226 anos após a descoberta de Euler em Königsberg, o matemático chinês **Kwan Mei-Ko** levantou uma importante questão acerca do problema da travessia das pontes:

Questão:

"Dado que é impossível atravessar cada ponte exactamente uma vez e retornar para o ponto de partida, qual é o número mínimo de travessias redundantes que é preciso fazer?"

Este é o tipo de problema que um carteiro enfrenta quando está a fazer a entrega de cartas.

Resolução

Suponha que...

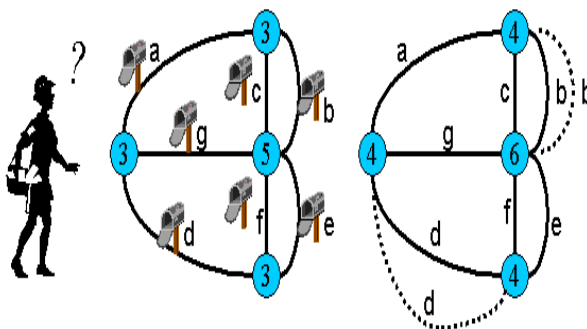
- Cada uma das arestas no grafo abaixo é uma rua onde as cartas precisam de ser entregues, e cada um dos vértices é um cruzamento (os números indicam o grau de cada vértice).

- O carteiro precisa atravessar cada rua para entregar as cartas, mas deseja minimizar a quantidade de travessias que é necessário repetir.

Abordagem :

Kwan tratou cada travessia duplicada de uma aresta, como se estivesse a adicionar arestas múltiplas no grafo .

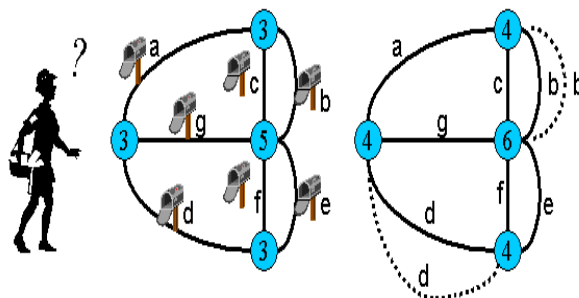
Essas arestas múltiplas davam a cada vértice um número par de arestas. Este processo é chamado, como já vimos, de eulerização do grafo.



Solução :

Uma vez que o grafo foi eulerizado, é possível encontrar um caminho euleriano no grafo resultante.

Por exemplo, o carteiro da figura ao lado pode percorrer a seguinte rota mínima para entregar as cartas: $a - b - c - b - e - f - g - d - d$, repetindo apenas as arestas "b" e "d" na sua rota.

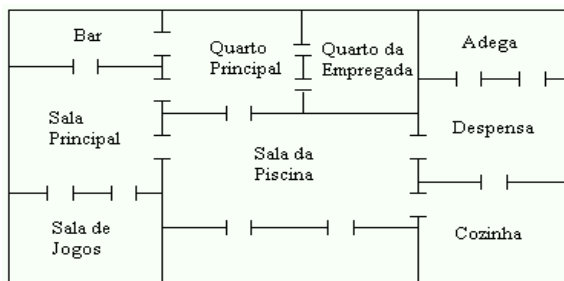


Em homenagem a Kwan, este problema ficou conhecido como "**The Chinese Postman Problem**".

Atividade VII

O Caso Count Van Diamond

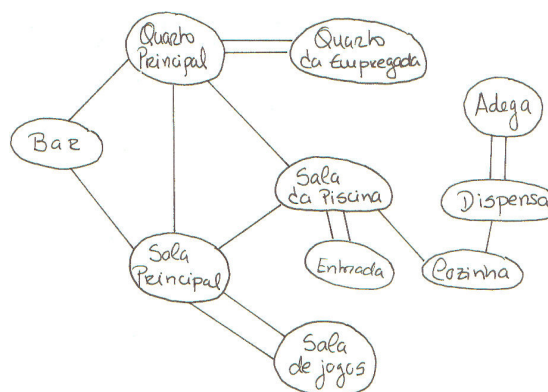
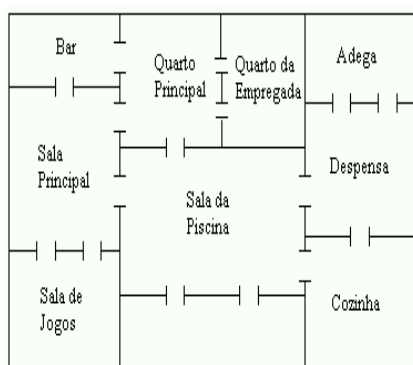
O cenário em baixo é a residência do bilionário Count Van Diamond, que acaba de ser assassinado. Sherlock Holmes (um conhecido detective que nas horas vagas é um estudioso da Teoria dos Grafos) foi chamado para investigar o caso.



O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (lugar onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida viu-o sair daquela sala pela mesma porta que havia entrado. O jardineiro, contudo, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa. Sherlock Holmes avaliou a planta da residência (conforme figura acima) e em poucos minutos declarou solucionado o caso.

Problema :

Quem poderia ser o suspeito indicado por Sherlock Holmes? Qual o raciocínio utilizado pelo detective para apontar o suspeito?

Abordagem :**Solução :**

A afirmação do jardineiro em como havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa, é falsa. Isto justifica-se pois tal equivalia a percorrer um ciclo euleriano no grafo associado à casa; o que é impossível pois o grafo obtido tem pelo menos um vértice de grau ímpar, (por exemplo a sala principal) pelo que o grafo não é Euleriano.

Concluimos então que o suspeito indicado por Sherlock Holmes é o jardineiro.

Actividade VIII**O Patrulhamento das Ruas de uma Cidade**

Um polícia vai patrulhar a pé as ruas de uma cidade, cuja planta é apresentada na figura (a), e estaciona o carro em S. Ele pretende vigiar cada rua da cidade uma única vez, partindo e terminando em S. Senão for possível como o pode fazer passando duas vezes por um número mínimo de ruas? O grafo associado a este problema é o da figura (b), em que cada aresta representa uma rua e os vértices são as intersecções das ruas.

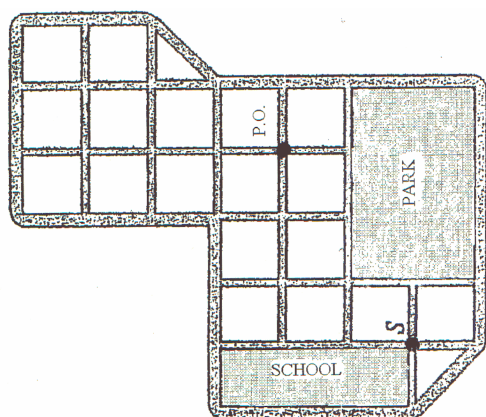


Figura (a)

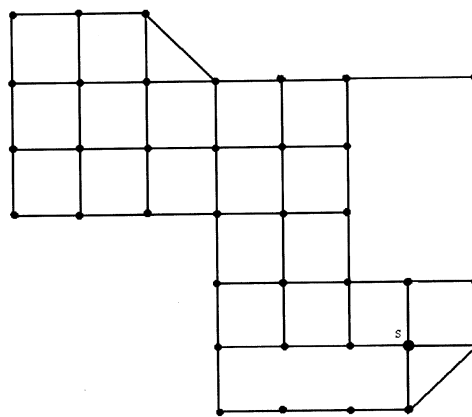
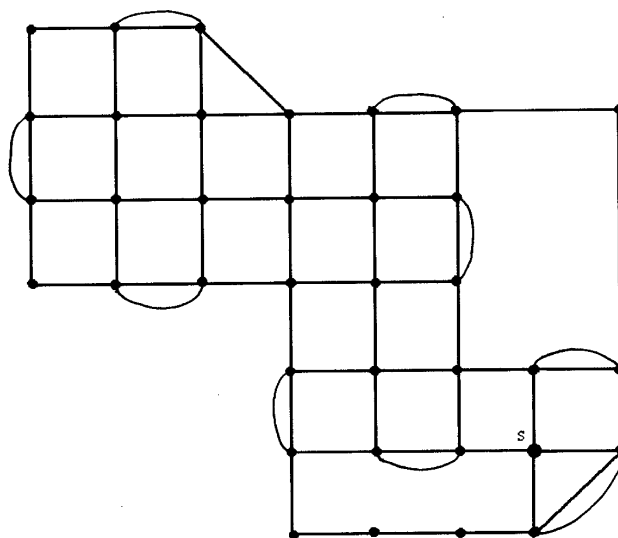


Figura (b)

Segundo o Teorema de Euler não é possível vigiar cada rua da cidade uma única vez pois estamos perante um grafo com vértices de grau ímpar. No entanto, é possível fazê-lo passando duas vezes por um número mínimo de ruas, recorrendo ao método de eulerização de um grafo, como mostramos na figura seguinte:

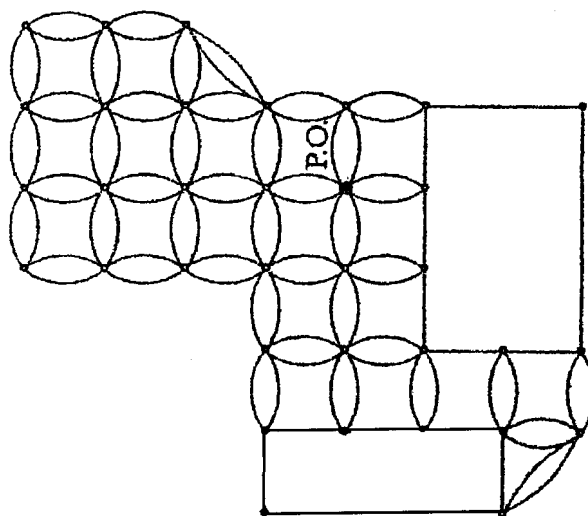


Actividade IX

A Distribuição de Correio numa Cidade

Na cidade da actividade anterior (figura (a)), um carteiro pretende fazer a distribuição do correio partindo e terminando nos correios. Este, em relação ao polícia,

tem que passar em cada rua duas vezes pois há casas nos dois lados da rua (com excepção das ruas junto ao parque e à escola). Será que o carteiro consegue fazer a distribuição passando apenas duas vezes em cada rua?



O grafo neste problema é parecido com o da actividade anterior, mas tem a duplicação das arestas, com excepção das ruas que circundam a escola e o parque, uma vez que o carteiro tem que passar pelos dois lados da rua para entregar o correio (supomos que a escola não recebe correio).

Grafos

Hamiltonianos

1. Introdução

Até ao momento temos estado a analisar os grafos pela importância das suas arestas e dos percursos sobre estas (por exemplo, com o famoso problema das 7 pontes de Königsberg). Também podemos concentrar-nos sobre os seus vértices, pelo número de visitas a estes vértices.

Note-se que, nesta nova abordagem, apesar de se tratar também de procurar circuitos sobre grafos, o problema não está em percorrer todas as ruas existentes sem repetições ou com o mínimo de repetições, mas antes em escolher algumas delas (quem sabe as mais curtas) para visitar todos os pontos de interesse, sem ter de repetir a visita a qualquer um deles.

Nas situações anteriormente analisadas as aplicações referiam-se a redes várias, de estradas ou de ruas – **redes de arestas**.

Nesta nova perspectiva, as aplicações reportam-se a redes de cidades, de pontos de interesse, de pontos a visitar – **redes de vértices**.

2. Willian Rowan Hamilton



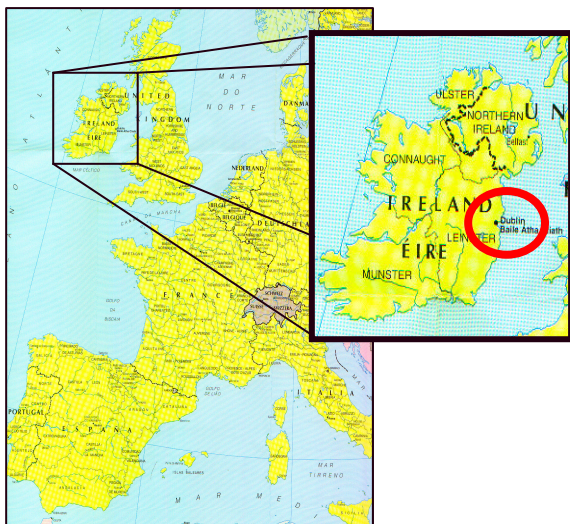
O tipo de grafos que vamos analisar neste capítulo designam-se por grafos hamiltonianos em homenagem ao famoso matemático e astrónomo Willian Rowan Hamilton.

Por considerarmos que a sua vida foi repleta de episódios interessantes, dedicaremos esta secção à sua biografia.

Sir Willian Rowan Hamilton nasceu a 4 de Agosto de 1805 em Dublin, Irlanda, falecendo nessa mesma cidade a 2 de Setembro de 1865.

O seu pai, Archibald Hamilton, não teve tempo para ensinar William pois estava frequentemente em negócios em Inglaterra. Archibald era um advogado de primeira ordem em Dublin, notável pela sua eloquência exuberante.

A sua mãe, Sarah Hutton, pertencia a uma família bem conhecida pela sua inteligência.



Hamilton era o mais novo de quatro irmãos, podendo ser classificado como uma pessoa normal não fossem alguns factos como por exemplo, aos 3 anos William já podia ler inglês facilmente e estava muito avançado em aritmética; aos 5 anos era capaz de traduzir latim, Grego e Hebreu. Estes assuntos foram-lhe ensinados pelo seu

tio, o Reverendo James Hamilton, do qual se dizia que era um óptimo professor e com o qual viveu muitos anos em Trim.

Aos 8 anos William já sabia Francês e Italiano; aos 10 anos acrescentava à sua lista de idiomas o Árabe, o Persa e outras línguas orientais; aos 13 anos ele podia vangloriar-se de ter aprendido, em média, uma língua por ano! Era um afamado poliglota, a ponto de, aos 14 anos, ser encarregado de redigir, em persa, uma carta de cumprimentos de boas vindas ao embaixador da Pérsia que visitava então Dublin.

Porém aos 15 anos, um encontro com um exímio calculador americano, Zerah Colburn, que fazia, em Dublin, uma exibição de cálculos mentais rápidos, estimulou o interesse já forte de William pela aritmética; e o jovem tomou o gosto pela realização destes cálculos; extraía raízes quadradas e cúbicas e meditava em tudo o que se relacionasse com as propriedades dos números; e decidiu aos 16 anos, dedicar a sua vida à matemática. Mais tarde, Hamilton afirmaria: “Espíritos poderosos de todas as idades têm colaborado na construção deste templo amplo e belo da ciência e têm escrito os seus nomes nele com caracteres indeléveis, mas o edifício não está ainda completo; não é demasiado tarde para acrescentar outro ornato; eu todavia apenas cheguei à sua base, mas posso aspirar, um dia, a alcançar o seu vértice”. E, de facto, conseguiu-o.

William Rowan não frequentou nenhuma escola antes de entrar na Universidade. Aos 18 anos, precedido pelos rumores de sua potência intelectual, “Hamilton prodígio”, ingressou facilmente, o primeiro entre 100 candidatos, no Trinity College de Dublin, onde os seus progressos foram brilhantes não só nos exames mas também na investigação original. Aos 21 anos, apresentou um artigo à Academia Real Irlandesa

intitulado: “Uma Teoria de Sistema de Raios” que converteu a óptica matemática numa nova ciência.

Não podemos, obviamente, referir-nos a todos os contributos de Hamilton para a construção da ciência e aos altos cargos que desempenhou. Entre estes citemos que, com 22 anos apenas, sucedeu a J.Brinkley na cadeira de astronomia na Universidade de Dublin, e depois foi nomeado Astrónomo Real da Irlanda; aos 32 anos foi eleito Presidente da Academia Real da Irlandesa. Entre aqueles, são de salientar as suas concepções em dinâmica que ultrapassaram o domínio clássico e se aproximaram, em muitos aspectos, da mecânica quântica actual e, em álgebra, descobriu, em 1843, os quaterniões, primeiro exemplo de um corpo não comutativo. Hamilton sempre considerou esta descoberta como o seu maior sucesso científico. Ele comunicou logo a descoberta dos seus quaterniões mas só dez anos depois é que a difundiu através da publicação, em 1853, da obra “Lectures on Quaternions”, onde aparecem também as primeiras ideias sobre as matrizes de que ele foi, na verdade, o instrutor na matemática.

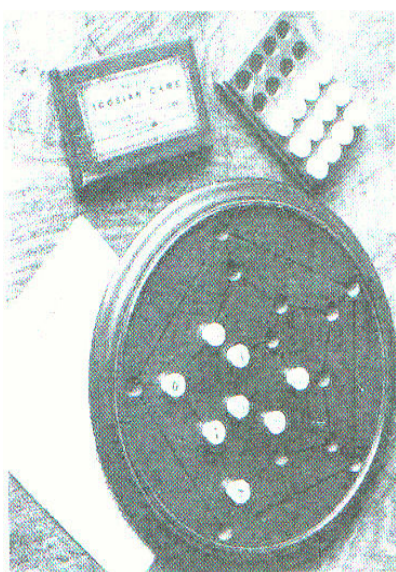
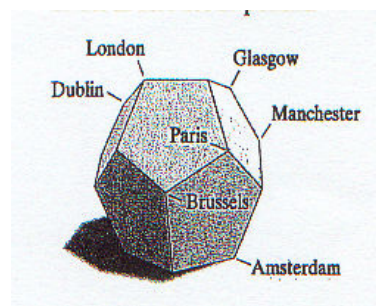
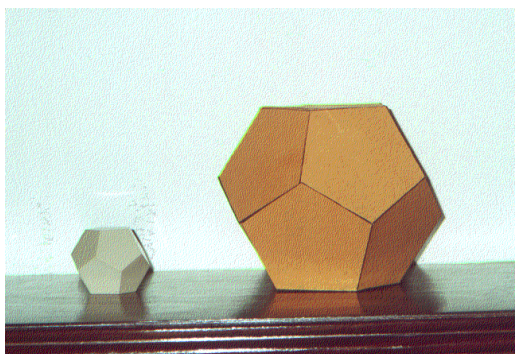
Hamilton dedicou-se ainda à preparação da obra ampliada “Elements of Quatenions” mas não a terminou antes de morrer em 1865; todavia, a obra foi editada e publicada pelo seu filho Willian Edwin no ano seguinte.

Como podemos ver por esta breve biografia concluímos que William Rowan Hamilton é provavelmente o mais eminente dos matemáticos dos povos de língua inglesa.

3. O Jogo Icoseano – Viagem pelo Mundo

Diz-se que Hamilton inventou o Jogo Icoseano – Viagem pelo Mundo. Este bonito jogo foi vendido pela primeira vez em 1859 na cidade de Londres e esteve na moda durante algum tempo, alcançando no entanto pouco sucesso comercial.

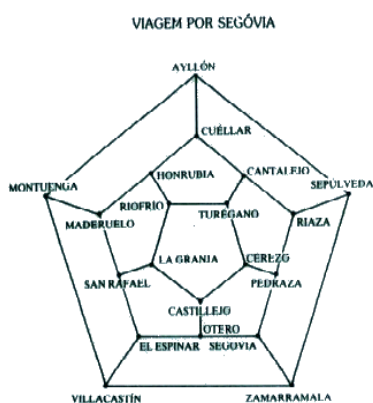
O nome do jogo deve-se ao facto de ele conter um dodecaedro regular de madeira, 30 arestas, 20 vértices e 12 faces (pentagonais). Em cada vértice havia um pequeno eixo que Hamilton rotulou com o nome de uma cidade conhecida: Dublin, Roma, Paris, Madrid,



O objectivo do jogo era que o jogador viajasse “ao redor do mundo”, obtendo uma viagem circular, num itinerário contínuo pelas arestas de um dodecaedro, que saindo de uma determinada cidade, incluísse todas as cidades exactamente uma vez (observa-se que a única restrição neste processo era que só era possível viajar de uma cidade para a outra se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes). O referido itinerário ia-se marcando com um fio de lã, que se prendia à cidade (vértice) inicial (ex: Dublin) e dava a volta no eixo de cada cidade por onde passava.

O desafio proposto é possível e não muito difícil. Os especialistas podiam jogar fixando 2, 3 ou mais cidades como início do itinerário.

Como o dodecaedro regular de madeira é um pouco volumoso e difícil de manejar surgiu outra versão do mesmo jogo, como podemos observar na figura ao lado. Nesta nova versão, o dodecaedro foi “planificado” e transformado num jogo de tabuleiro, ou seja, foi transformado num grafo que representava o problema.



Constatamos que este jogo possui uma certa analogia com o problema das pontes de Königsberg, dado que o seu objectivo consiste em, seguindo por caminhos fixos à partida, procurar passar por todos os pontos do tabuleiro uma e apenas uma única vez.

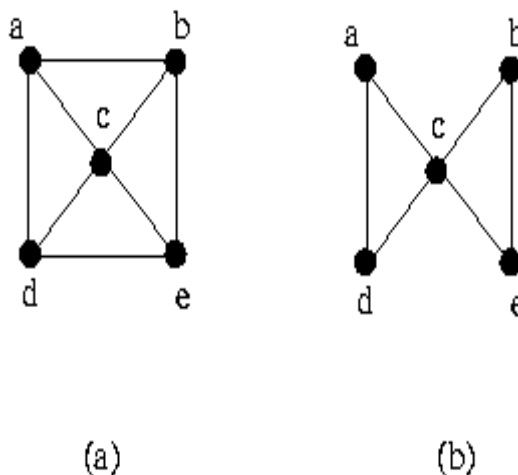
4. Nocões Básicas

Nesta secção vamos explicar os conceitos básicos necessários à análise da Teoria de Grafos Hamiltonianos:

- ❖ **Caminho hamiltoniano**: é um caminho que passa exactamente uma vez por cada vértice de um grafo, não sendo necessário percorrer todas as arestas.
- ❖ **Ciclo (ou Circuito) hamiltoniano**: é um caminho hamiltoniano que começa e termina no mesmo vértice.
- ❖ **Grafo hamiltoniano**: é um grafo que contém um ciclo hamiltoniano.

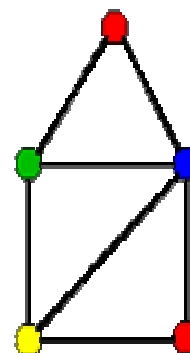
Observação: é evidente que nem todo grafo é hamiltoniano.

Como podemos ver na figura ao lado:



O grafo da figura (a) é hamiltoniano porque contém pelo menos um circuito de Hamilton (por exemplo: a, b, e, c, d, a), enquanto que o da figura (b) não é hamiltoniano porque para termos um ciclo temos que passar mais que uma vez pelo vértice c.

- ❖ **Coloração**: Seja $G(V,A)$ um grafo e C um conjunto de cores. Uma coloração de G é uma atribuição de alguma cor de C para cada vértice de V , de tal modo que a dois vértices adjacentes sejam atribuídas cores diferentes. Assim sendo, uma coloração de G é uma função $f: V \rightarrow C$ tal que para cada par de vértices $v,w \in V$ tem-se



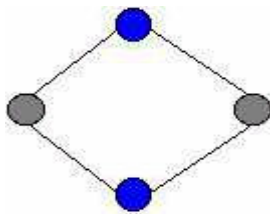
$$(v,w) \in E \text{ (E = espaço)} \Rightarrow f(v) \neq f(w).$$

Uma k -coloração de G é uma coloração que utiliza um total de k cores.

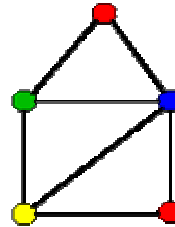
O exemplo ao lado mostra um 4-coloração para o grafo.

- ❖ **Número Cromático:** Denomina-se número cromático $X(G)$ de um grafo G ao menor número de cores k , para o qual existe uma k -coloração de G .

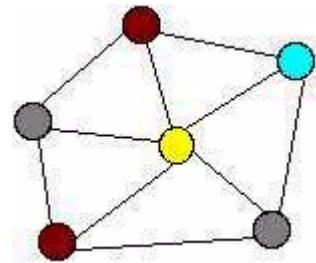
O exemplo a baixo mostra uma n -coloração para o grafo, que é o número cromático deste grafo.



$n = 2$



$n = 3$



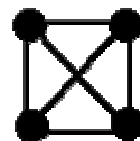
$n = 4$

- ❖ **Número Cromático das Arestas:** é o número mínimo de cores necessárias para colorir as arestas de um grafo, de forma a que as arestas incidentes num mesmo vértice não possam ter a mesma cor.

- ❖ **Snark:** é um grafo cujo número cromático das arestas é igual a quatro.

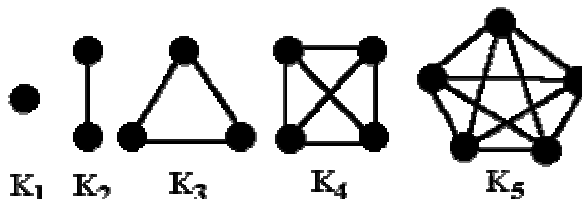
- ❖ **Grau:** O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que lhe são incidentes.

- ❖ **Grafo Regular:** Um grafo diz-se regular quando todos os seus vértices tem o mesmo grau.



O grafo G_4 , por exemplo, é dito ser um grafo regular-3 pois todos os seus vértices tem grau 3.

❖ **Grafo Completo:** Um grafo diz-se completo quando há uma aresta entre cada par de seus vértices. Estes grafos são designados por K_n , onde n é a ordem do grafo.



5. Propriedades dos Grafos Hamiltonianos

Agora, a questão é a seguinte. Quais são as condições necessárias e suficientes para determinar se um grafo é hamiltoniano? Ou, por outras palavras, existe um algoritmo eficiente para determinar se um grafo é hamiltoniano? Infelizmente, ao contrário do que acontece no caso dos grafos eulerianos, que à primeira vista parece semelhante, não sabemos responder a essa pergunta. Pior que isso, há muitas hipóteses que tal algoritmo não exista. Mas em certos casos específicos, a tarefa é mais fácil porque nos podemos socorrer de alguns teoremas. Eis dois teoremas:

Teorema A: (*Teorema de Ore*)

Uma condição suficiente (mas não necessária) para que um grafo G seja hamiltoniano é que a soma dos graus de cada par de vértices não-adjacentes seja no mínimo n (onde n é número de vértices em G).

Deste teorema podemos então concluir que: se a soma dos graus de cada par de vértices não-adjacentes é no mínimo n então um grafo G é Hamiltoniano.

Teorema B: (*Teorema de Dirac*)

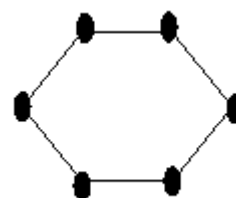
Uma condição suficiente (mas não necessária) para que um grafo G seja hamiltoniano é que o grau de todo vértice de G seja no mínimo $n/2$, onde n é o número de vértices em G .

Deste teorema podemos então concluir que: se o grau de todo vértice de G é no mínimo $n/2$, onde n é o número de vértices em G , então um grafo G é hamiltoniano.

No entanto, estes teoremas deixam muito a desejar, por várias razões:

- eles não são suficientes para determinar se um grafo é hamiltoniano.

Exemplo: O grafo da figura é hamiltoniano e não respeita a condição do teorema B. O grau de cada vértice é 2, o que é menor que $6/2 = 3$.



- esses teoremas não são muito informativos. O que eles dizem, *intuitivamente*, é que se um grafo contém muitas arestas e que elas são bem distribuídas, ele é hamiltoniano. No limite, temos um grafo completo.

O teorema A é mais forte que o teorema B:

- ◊ porque: ele permite identificar mais grafos hamiltonianos.
- ◊ no entanto: o problema destes teoremas e de outros que foram propostos, é que demora muito para efectuar o cálculo. Temos que efectuar uma soma (ou testar a adjacência) para cada par de vértices. Como o grafo pode ter bastante arestas, uma busca com tentativas e erros pode ser mais eficiente em vários casos.

6. Hamilton versus Euler

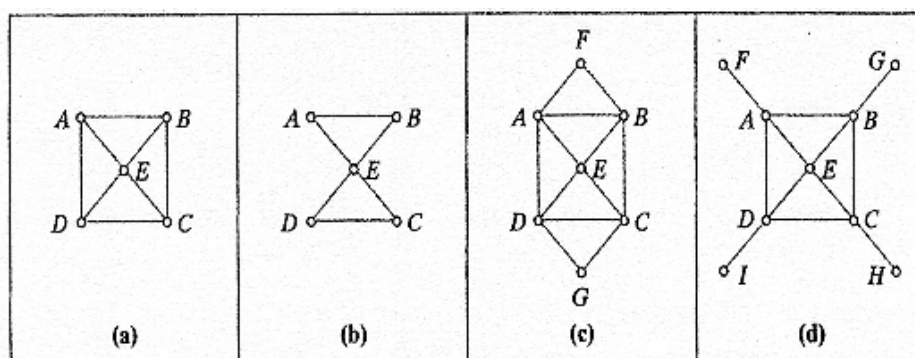
A diferença entre circuito (resp. caminho) de Euler e circuito (resp. caminho) de Hamilton é simplesmente uma palavra: **VÉRTICE**.

SUBSTITUI-SE “VÉRTICE” POR “ARESTA”

Mas, como mostra o próximo exemplo, os dois conceitos não estão obrigatoriamente relacionados pois, um grafo pode ser:

- ◇ hamiltoniano
- ◇ euleriano
- ◇ hamiltoniano e euleriano
- ◇ nem hamiltoniano nem euleriano

Exemplos:



(a) Este grafo tem circuitos hamiltonianos mas não tem nenhum circuito euleriano:

- o grafo tem vários circuitos hamiltonianos, por exemplo A, B, C, D, E, A, e também tem muitos caminhos hamiltonianos, por exemplo A, B, C, D, E – óbvio, porque afinal de contas qualquer

circuito hamiltoniano pode ser transformado num caminho hamiltoniano removendo a última aresta;

- os quatro vértices têm grau ímpar logo o grafo não tem circuitos nem caminhos eulerianos.

(b) Este grafo não tem circuitos hamiltonianos mas tem pelo menos um circuito euleriano:

- tem circuitos eulerianos porque todos os vértices têm grau par;

- não tem circuitos hamiltonianos porque, qualquer que seja o vértice de partida, temos que passar sempre pelo vértice E mais que uma vez para fechar o circuito.

(c) Este grafo tem circuitos hamiltonianos e eulerianos:

- tem circuitos eulerianos porque todos os vértices têm grau par;

- tem circuitos hamiltonianos, por exemplo A, F, B, E, C, G, D, A.

(d) Este grafo não tem circuitos hamiltonianos nem eulerianos:

- não tem circuitos eulerianos porque existe pelo menos um vértice de grau ímpar (por exemplo o vértice I tal como F, G e H tem grau um);

- não tem circuitos hamiltonianos porque qualquer que seja o vértice de partida temos que passar mais do que uma vez pelo mesmo vértice.

7. Ciclo Hamiltoniano em Grafos Completos

Um grafo K_n possui o número máximo possível de arestas para um dados n . Ele é, também regular- $(n-1)$ pois todos os seus vértices tem grau $n-1$. Logo podemos concluir que:

Teorema:

O NÚMERO TOTAL DE ARESTAS DE UM GRAFO COM N VÉRTICES É $N(N - 1) / 2$.

Prova:

A prova é por indução matemática. Chamaremos K_n um grafo que contém n vértices. Consideramos primeiro o caso trivial, o grafo K_1 . Nesse caso, como existe somente um vértice, é impossível definir uma aresta que não seja um laço. Então não pode existir nenhuma aresta, e verificamos que $n(n-1)/2 = 0$.

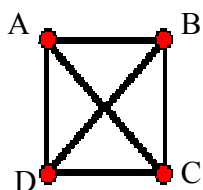
Suponhamos que a hipótese é verdadeira para K_n , onde $n \geq 1$. Seja agora o grafo K_{n+1} . Precisamos provar que o número de vértices nesse grafo é $n(n+1)/2$. Seja v_{n+1} o vértice adicional que se encontra em K_{n+1} e não em K_n . O número máximo de arestas no grafo K_{n+1} é igual ao número máximo no grafo K_n mais todas as ligações possíveis entre v_{n+1} e cada vértice de K_n . Como esse número de ligações é igual ao número de vértices em K_n , temos:

$$\text{Número máximo} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Deste modo fica então provado o teorema.

Não é muito complicado ver então que todo o grafo completo que contém mais de dois vértices é um grafo hamiltoniano: Seja $A, B, C, \dots, N$ os vértices de K_n . Como existe uma aresta entre qualquer par de vértices, é possível, à partir de A , percorrer essa sequência até N e voltar a A .

Vejamos o seguinte exemplo:



Através desta figura, é fácil observar que podemos escrever os vértices por qualquer ordem que queiramos, repetindo o primeiro e o último vértice, e mesmo assim ter um circuito de

Hamilton.

Para o grafo da figura podemos escrever os seguintes circuitos de Hamilton:

	Ponto de referencia A	Ponto de referencia B	Ponto de referencia C	Ponto de referencia D
1	A, B, C, D, A	B, C, D, A, B	C, D, A, B, C	D, A, B, C, D
2	A, B, D, C, A	B, D, C, A, B	C, A, B, D, C	D, C, A, B, D
3	A, C, B, D, A	B, D, A, C, B	C, B, D, A, C	D, A, C, B, D
4	A, C, D, B, A	B, A, C, D, B	C, D, B, A, C	D, B, A, C, D
5	A, D, B, C, A	B, C, A, D, B	C, A, D, B, C	D, B, C, A, D
6	A, D, C, B, A	B, A, D, C, B	C, B, A, D, C	D, C, B, A, D

É importante lembrar que diferentes sequências de vértices podem produzir o mesmo circuito de Hamilton, por exemplo, o circuito C, A, D, B, C é o mesmo que o circuito A, D, B, C, A, só mudamos o ponto de referência (vértice inicial). No primeiro caso usamos o vértice C e no segundo o vértice A. Além disso, para cada circuito de Hamilton existe um **circuito hamiltoniano-imagem** (circuito realizado por ordem inversa).

Será que existe uma fórmula conveniente que nos dá o número de circuitos de Hamilton, de um grafo completo?

A resposta a esta questão é afirmativa. A fórmula usa o conceito de factorial uma vez que num grafo completo podemos listar os vértices por qualquer ordem obtendo sempre um circuito hamiltoniano. Escolhemos um vértice específico de entre os n possíveis para iniciar o circuito. Dos $(n-1)$ vértices restantes que temos para ordenar escolhemos um e sobram agora $(n-2)$ vértices. Procedemos desta forma sucessivamente parando quando tivermos passado por todos os vértices uma única vez. No final voltamos a escolher o vértice inicial.

UM GRAFO COMPLETO COM N VÉRTICES TEM $(N-1)!$ CIRCUITOS DE HAMILTON.

TABLE 6-3 The first 25 factorials

1!	= 1
2!	= 2
3!	= 6
4!	= 24
5!	= 120
6!	= 720
7!	= 5040
8!	= 40,320
9!	= 362,880
10!	= 3,628,800
11!	= 39,916,800
12!	= 479,001,600
13!	= 6,227,020,800
14!	= 87,178,291,200
15!	= 1,307,674,368,000
16!	= 20,922,789,888,000
17!	= 355,687,428,096,000
18!	= 6,402,373,705,728,000
19!	= 121,645,100,408,832,000
20!	= 2,432,902,008,176,640,000
21!	= 51,090,942,171,709,440,000
22!	= 1,124,000,727,777,607,680,000
23!	= 25,852,016,738,884,976,640,000
24!	= 620,448,401,733,239,439,360,000
25!	= 15,511,210,043,330,985,984,000,000

Observação: com o aumento de número de vértices o número de circuitos de Hamilton cresce muito rapidamente, como podemos ver através do factorial correspondente.

Vejamos o caso de um grafo com 26 vértices para o qual existem:

$$25! = 15.511.210.043.330.985.984.000.000$$

circuitos de Hamilton.

Por estes motivos a questão que pomos perante um grafo completo não é se “Há um circuito de Hamilton?”, mas sim “Como é que vamos lidar com tantos?”

Seguidamente vamos mostrar quais os principais problemas a que podemos aplicar esta teoria e os principais algoritmos para os resolver.

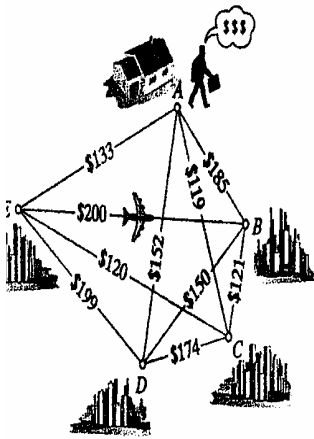
8. O Problema do Caixeiro Viajante (PCV ou TSP)

8.1. Formulação do Problema do Caixeiro Viajante

Existem vários problemas em investigação operacional que podem ser formulados sob o título genérico de Problema do Caixeiro Viajante.

Este tipo de problemas é assim designado pois a sua formulação inicial tinha a ver com a determinação da viagem de custo mínimo que um vendedor podia fazer para visitar as cidades do seu território de vendas, partindo e regressando à mesma cidade.

Nesta secção vamos atender ao problema do vendedor Willy que tem cinco cidades para visitar.



Como matemáticos que somos, para simplificar, vamos representar o problema de Willy por um grafo:

- ❖ atribuímos a cada cidade um vértice: A, B, C, D, E. Supomos que Willy inicia a sua viagem em A;
- ❖ atribuímos a cada ligação entre as diferentes cidades uma aresta ponderada com o custo da viagem entre as cidades conectadas por esta aresta.

O nosso objectivo é determinar o itinerário de custo mínimo entre as cinco cidades.

8.2. Principais Aplicações

Os problemas genéricos mais importantes que podem ser formulados como PCV são:

- ❖ **Entrega de encomendas:** empresas como a DHL lidam com este problema todos os dias. Os camiões tem um conjunto de encomendas para entregar em vários destinos. O *tempo* entre duas encomendas é conhecido ou pode ser

estimado. O objectivo é entregar as encomendas em cada local de entrega e voltar ao ponto inicial no menor espaço de tempo. Como por dia este tipo de empresas entregam muitas encomendas o grafo terá muitos vértices, representando estes os locais de entrega.

- ❖ **Fabricação de circuitos integrados:** no fabrico de circuitos integrados existem milhares de pequenos orifícios que tem de ser feitos em cada placa. Isto é realizado por um laser estacionário e por uma placa rotativa. A ordem pela qual os furos são feitos deve ser ponderada por questões de eficiência, isto é, deve ser pensado qual a sequência de perfuração de forma a que esta seja realizada no menor espaço de *tempo*. Neste tipo de PCV os vértices representam os buracos da placa e o peso da aresta que conecta o vértice X ao vértice Y representa o tempo necessário para rodar a placa da posição de perfuração X para a Y.
- ❖ **Escalonamento do trabalho de uma máquina:** em muitas indústrias existem máquinas que realizam mais do que uma tarefa. Pensemos nas tarefas como os vértices de um grafo. Depois de realizar uma tarefa a máquina necessita de ser ajustada para fazer a tarefa seguinte. O lapso de tempo necessário para reajustar a máquina para executar a tarefa Y é o peso da aresta que conecta os vértices X e Y. O objectivo deste tipo de PCV é minimizar o tempo de execução do conjunto das tarefas.
- ❖ **Planificação de uma viagem ou de um roteiro turístico:** conhecendo os pontos de interesse a visitar podemos elaborar um itinerário em que os vértices são os locais a visitar e as arestas têm o número de quilómetros ou metros a percorrer entre os diferentes pontos a visitar. O objectivo deste tipo de PCV é minimizar a *distância* percorrida.
- ❖ **Recolha de objectos:** em muitas indústrias verifica-se a necessidade de recolher objectos, por exemplo:

- na pesca, a recolha de redes e armadilhas colocadas em vários locais;
- nas companhias de telefones, a recolha de moedas das cabinas telefónicas.

❖ **Leitura de contadores:** as companhias de electricidade e do gás precisam de escolher o menor percurso, em termos de *distância*, para a leitura dos contadores.

❖ **Transporte de passageiros:** por exemplo um autocarro que transporta um certo número de campistas para lugares diferentes e tem de voltar a buscá-los. A companhia de transportes tem que determinar o itinerário em que a *distância* seja mínima.

O significado de custo pode variar de uma para outra das formulações do PCV. Podemos estar a falar de *custos (ou pesos)* como sendo *distâncias, preços de bilhetes de avião, tempo*, ou qualquer outro factor que possa ser optimizado (minimizado ou maximizado).

Em muitas situações, o PCV aparece como um sub-problema de outro problema mais complicado. Por exemplo, uma cadeia de supermercados pode ter um grande número de armazéns para serem abastecidos por um só distribuidor. Se há menos camiões que armazéns, os armazéns devem ser agrupados de tal modo que haja um camião para abastecer cada grupo de armazéns. Se resolvermos o PCV para cada camião, podemos minimizar os custos totais para a cadeia de supermercados. Podemos pensar em problemas semelhantes para serviços de recolhas e entregas de crianças nas suas escolas.

8.3. Estratégias para Resolver os Problemas do Caixeiro Viajante

Como acabámos de ver, o PCV tem várias aplicações na vida real. De seguida vamos apresentar algumas estratégias para o resolver, socorrendo-nos do caso simples do vendedor Willy para melhor compreendermos cada método de resolução.

8.3.1. Método 1: Algoritmo da Força Bruta

- ❖ Faz-se uma lista de todos os circuitos de Hamilton possíveis.
- ❖ Calcula-se o custo total de cada circuito, adicionando o peso de todas as arestas do circuito.
- ❖ Escolhemos um circuito com o custo total mínimo de acordo com a formulação do problema. A este circuito chamamos **Circuito Ótimo de Hamilton**.

Exemplo:

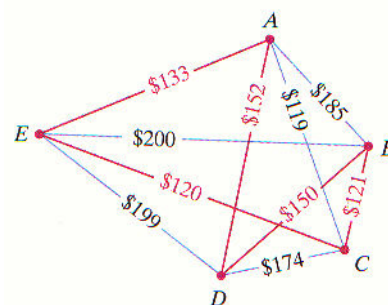
TABLE 6-4 The 24 possible Hamilton circuits and their total costs.

	Hamilton Circuit	Total Cost	Mirror-Image Circuit
1	A, B, C, D, E, A	$185 + 121 + 174 + 199 + 133 = 812$	A, E, D, C, B, A
2	A, B, C, E, D, A	$185 + 121 + 120 + 199 + 152 = 777$	A, D, E, C, B, A
3	A, B, D, C, E, A	$185 + 150 + 174 + 120 + 133 = 762$	A, E, C, D, B, A
4	A, B, D, E, C, A	$185 + 150 + 199 + 120 + 119 = 773$	A, C, E, D, B, A
5	A, B, E, C, D, A	$185 + 200 + 120 + 174 + 152 = 831$	A, D, C, E, B, A
6	A, B, E, D, C, A	$185 + 200 + 199 + 174 + 119 = 877$	A, C, D, E, B, A
7	A, C, B, D, E, A	$119 + 121 + 150 + 199 + 133 = 722$	A, E, D, B, C, A
8	A, C, B, E, D, A	$119 + 121 + 200 + 199 + 152 = 791$	A, D, E, B, C, A
9	A, C, D, B, E, A	$119 + 174 + 150 + 200 + 133 = 776$	A, E, B, D, C, A
10	A, C, E, B, D, A	$119 + 120 + 200 + 150 + 152 = 741$	A, D, B, E, C, A
11	A, D, B, C, E, A	$152 + 150 + 121 + 120 + 133 = 676$	A, E, C, B, D, A
12	A, D, C, B, E, A	$152 + 174 + 121 + 200 + 133 = 780$	A, E, B, C, D, A

A tabela a cima mostra os 24 ($= (5 - 1)! = 4!$) circuitos de Hamilton que existem num grafo completo de 5 vértices. Note-se que a terceira coluna da tabela mostra os ***circuitos imagem*** dos circuitos hamiltonianos da primeira coluna (circuito realizado por ordem inversa).

O custo total de cada circuito pode ser facilmente calculado através do somatório do peso das arestas e é mostrado na segunda coluna.

O circuito ótimo, com o custo total de 676 euros, é exibido na penúltima linha da coluna e ilustrado na figura a vermelho.



8.3.2. Método 2: Algoritmo do Vizinho Mais Próximo

Dado que o PCV aparece muito frequentemente em situações em que os grafos completos a elas associados são muito grandes, temos de encontrar um método que seja mais rápido que o método da descrição exhaustiva – Algoritmo da Força Bruta. Para isso, e nunca esquecendo que o nosso objectivo é encontrar um circuito hamiltoniano de custo mínimo, observemos agora um método alternativo para resolver o nosso problema do vendedor Willy.

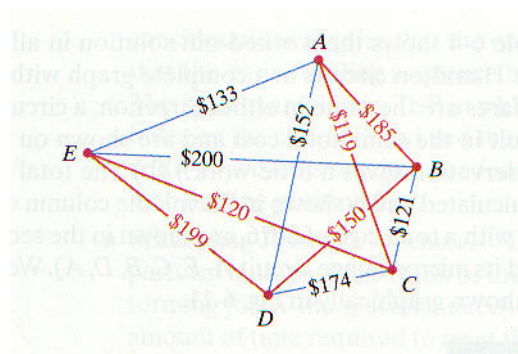
Algoritmo do Vizinho Mais Próximo:

- ❖ Começa-se por escolher um ponto de partida a que chamamos “casa”.
- ❖ De entre as arestas adjacentes escolhemos a que tem menor peso (em caso de empate escolhemos uma delas indiferentemente) e partimos para o vértice correspondente, a que chamamos *vizinho mais próximo*. Se existir mais do que um, escolhemos um ao acaso.
- ❖ Continuamos a construir o circuito, um vértice de cada vez, indo sempre para o vértice que representa o vizinho mais próximo, escolhendo este último entre os vértices que ainda não foram visitados, excepto quando a aresta que o liga ao vértice em que estamos fecha um circuito havendo ainda vértices por visitar. E prosseguimos assim sucessivamente até que todos os vértices sejam visitados.
- ❖ Chegados ao último vértice retornamos ao vértice de partida (a casa).

Exemplo:

De acordo com o método 2 nós começamos em A.

Olhamos para o grafo e procuramos a viagem mais barata partindo de A, ou seja, a deslocação para a cidade C.



Repetindo o processo vamos da cidade C para E. A aresta com menor peso partindo de E seria a que liga E a A, no entanto não a podemos escolher pois fecharia um circuito (A, C, E, A) havendo ainda vértices por visitar. Então a aresta menor ponderada será a que liga E a D.

Seguidamente vamos de D para B, e por fim retornamos à cidade de partida A.

Usando esta estratégia obtemos o circuito A, C, E, D, B, A exibido na figura a vermelho com um custo total de 773 euros.

Observação:

Como acabámos de verificar os resultados são diferentes utilizando métodos distintos.

Entre o método 1 e o método 2 a diferença neste exemplo simples são 97 euros.

8.3.2.1. Algoritmo da Força Bruta / Algoritmo do Vizinho Mais Próximo

O *Algoritmo da Força Bruta* é um exemplo clássico do que é formalmente conhecido como um algoritmo ineficiente

 é um algoritmo cujo número de passos necessários para obter uma solução cresce desproporcionalmente com o tamanho do problema.

Sendo um algoritmo ineficiente a sua aplicação prática restringe-se a pequenos problemas.

O *Algoritmo do Vizinho mais Próximo* é um exemplo de um algoritmo eficiente porque em cada passo há uma melhor escolha a ser feita com base num critério apropriado e bem conhecido. Infelizmente, o resultado pode estar longe de ser um circuito óptimo de Hamilton, como veremos seguidamente.

8.3.3. Algoritmos Aproximados

Para tentar sanar os problemas:

- da lentidão de obtenção da solução ótima pelo algoritmo da força bruta;
- da obtenção, pelo algoritmo do vizinho mais próximo, de uma solução rápida mas por vezes apenas aproximada da solução ótima

foram criados os algoritmos aproximados:

- **O Algoritmo Repetitivo do Vizinho mais Próximo**
- **O Algoritmo da Ligação mais Económica**

8.3.3.1. Método 3: O Algoritmo Repetitivo do Vizinho mais Próximo

Este algoritmo é uma Variação do Algoritmo do Vizinho mais próximo no qual se repete várias vezes integralmente o processo de construção do circuito do vizinho mais próximo.

Porquê esta Repetição?

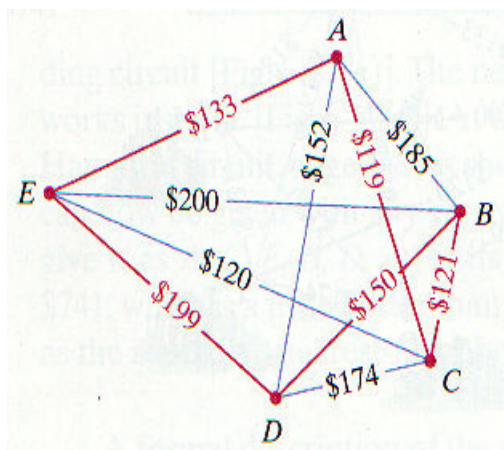
Porque o circuito de Hamilton obtido depende do vértice de partida, e ao alterarmos este vértice podemos obter um circuito Hamiltoniano diferente e com alguma sorte até mais aproximado da solução ótima.

Algoritmo Repetitivo do Vizinho Mais Próximo

- ❖ Seja X um vértice qualquer. Apliquemos o algoritmo do vizinho mais próximo usando X como vértice inicial e calculemos o custo total do circuito obtido.
- ❖ Repetimos o processo usando os outros vértices do grafo como vértice inicial.
- ❖ Dos circuitos hamiltonianos obtidos escolhamos o melhor, ou seja, o que tem custo mínimo. Se à partida estiver definido um vértice específico como vértice inicial e este não coincidir com o do circuito hamiltoniano escolhido

então tem-se que rescrever este mesmo circuito tomando como vértice inicial o vértice previamente estabelecido.

Exemplo:



- Pelo Algoritmo do Vizinho mais Próximo tínhamos obtido como circuito ótimo A, D, B, C, E, A com o custo total de 773 euros.

- Repetimos agora o Algoritmo do Vizinho mais Próximo usando como vértice inicial os restantes vértices do grafo:

- para o vértice B obtemos como circuito ótimo B, C, A, E, D, B com um

custo total de 722 euros;

- para o vértice C obtemos como circuito ótimo C, A, E, D, B, C com um custo total de 722 euros;

- para o vértice D obtemos como circuito ótimo D, B, C, A, E, D com um custo total de 722 euros;

- para o vértice E obtemos como circuito ótimo E, C, A, D, B, E com um custo total de 741 euros.

Observamos que os circuitos ótimos que têm como vértice inicial B, C ou D têm um custo total idêntico portanto qualquer um pode ser escolhido como melhor.

Escolhamos o circuito que tem como vértice inicial o B: B, C, A, E, D, B.

No entanto, estava pré-estabelecido começarmos a nossa viagem em A.

Logo temos que reordenar o circuito: A, E, D, B, C, A.

8.3.3.2. Método 4: Algoritmo da Ligação mais Económica

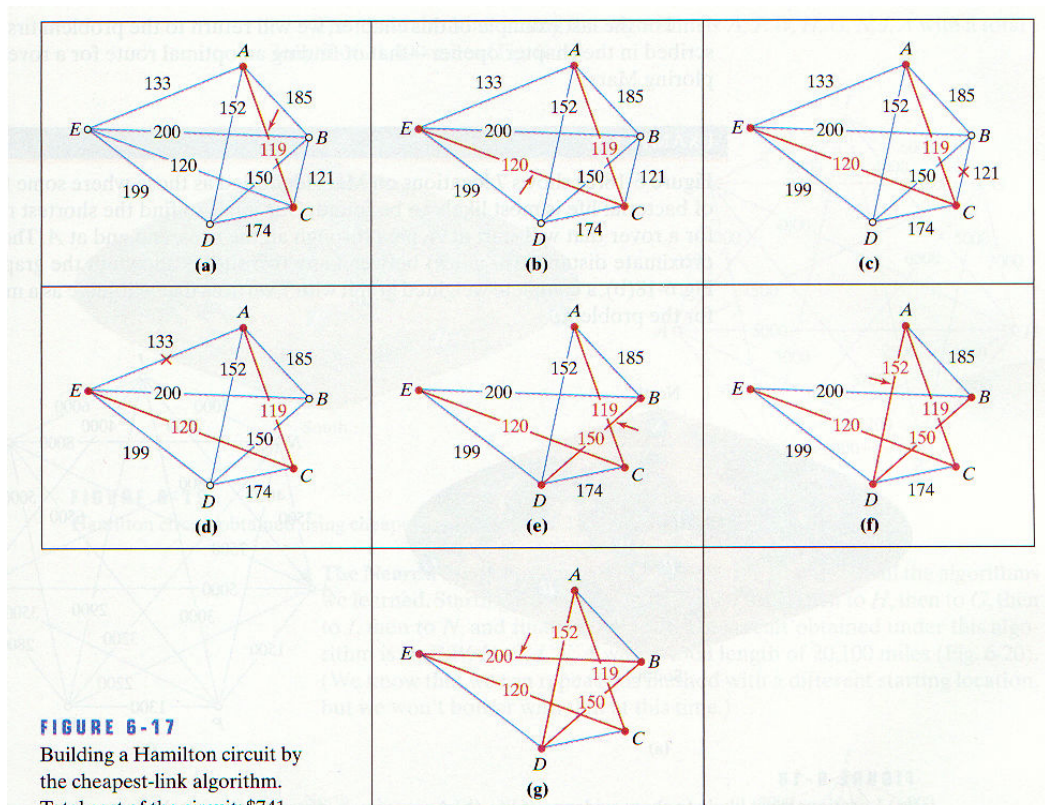
Como já vimos, há vários algoritmos para encontrar soluções para o PCV. Introduzamos agora um último método de resolução deste tipo de problemas e vejamos que ele também nos conduz a uma solução próxima da ótima.

Algoritmo da Ligação mais Económica:

- ❖ Escolha a aresta com o menor peso (em caso de empate escolhemos uma delas). Marque a aresta correspondente (assinalando-a, por exemplo, a vermelho).
- ❖ Escolha a ligação mais económica seguinte e assinale a aresta correspondente a vermelho.
- ❖ Continue a escolher a ligação mais económica disponível. Marque a aresta correspondente a vermelho excepto quando:
 - (a) esta aresta fecha um circuito (havendo ainda vértices por visitar);
 - (b) esta aresta parte de um vértice ao qual já estão ligadas duas outras arestas anteriormente escolhidas (pois um circuito de Hamilton usa exactamente 2 arestas por vértice).

Em qualquer um destes casos retire a aresta correspondente do grafo.

- ❖ Quando não existirem mais vértices para ligar, fecha-se o circuito que temos vindo a assinalar a vermelho.

Exemplo:

Na figura:

- a) Observamos que a aresta de menor peso é a que liga o vértice A ao vértice C com um custo de 119 euros. Assinalemo-la a vermelho.
- b) Seguidamente a aresta mais económica é a que liga os vértices C a E com um custo de 120 euros. Marquemo-lo a vermelho.
- c) Verificamos que a aresta mais económica a seguir seria a que liga os vértices C e B, no entanto, não a podemos escolher pois, segundo o algoritmo apresentado, não se podem ligar arestas a um vértice ao qual já estão ligadas outras duas arestas anteriormente escolhidas. Apaguemos então esta aresta do grafo.
- d) Ao analisar o grafo concluímos que a ligação mais económica seria agora a que liga os vértices E a A. Mas não a podemos assinalar pois ela fecharia um circuito (A, C, E, A) e ainda existem vértices por visitar. Retiramos esta aresta do grafo.
- e) Escolhemos a aresta {B,D} com um custo de 150 euros.
- f) Escolhemos a aresta {D,A } com um custo de 152 euros.
- g) Não havendo mais vértices a visitar e de entre as arestas existentes escolhemos a que fecha o circuito, ou seja, escolhemos a aresta {E,B} com um custo de 200 euros.

Assim o circuito de Hamilton obtido por este método será: A, C, E, B, D, A com um custo total de 741 euros ($741 = 119 + 120 + 200 + 150 + 152$).

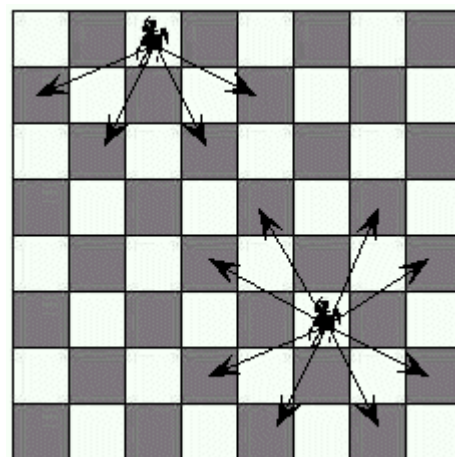
9. Aplicações

9.1. Problema do Cavalo

Considere o jogo de xadrez. Seguindo as regras de movimento do cavalo, é possível que um cavalo parta de uma casa qualquer, percorra todo o tabuleiro visitando cada casa uma e somente uma única vez e retorne à casa inicial?

Vejamos se isto é possível aplicando a Teoria dos Grafos Hamiltonianos.

No xadrez o movimento o cavalo é sempre em L (letra ele), ou seja, duas casas num sentido (vertical ou horizontal) e uma casa no outro sentido (horizontal ou vertical). Na figura ao lado estão postos dois cavalos, sendo que cada uma das setas indica um dos possíveis movimentos dos cavalos.

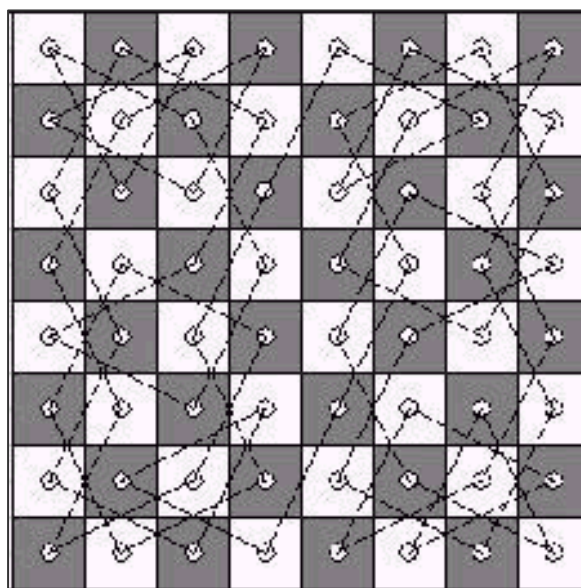


Um modelo para este problema é definir o grafo $G(V,A)$ como:

$V = \{ c \mid c \text{ é uma casa do tabuleiro de xadrez} \}$

$A = \{ (c_1, c_2) \mid \text{a casa } c_2 \text{ pode ser atingida a partir da casa } c_1 \text{ por um único movimento de cavalo} \}$

A solução deste problema passa por verificar se o grafo G é hamiltoniano. Este grafo tem 64 vértices e 168 arestas, e, na realidade, contém vários ciclos hamiltonianos, um os quais é apresentado na figura ao lado.



9.2. Assassinato no Castelo de York

É noite em Baker Street 221 – B.

Sherlock Holmes toca uma ária Irlandesa no seu violino quando Watson, seu criado, irrompe pela sala com a seguinte carta na mão:

Caro Sherlock Holmes:

Houve um terrível assassinato. A Senhora Bela foi morta com um candelabro. A polícia está confusa. Por favor ajude-nos a resolver este horrível crime.

Ornellan, Duque de York II

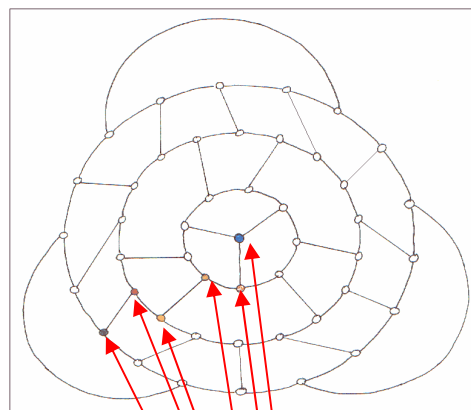


Chegados à aldeia de Grimly Sinister, onde o Castelo de York se situa, Holmes e Watson são recebidos pelo mordomo Dunnnett que os conduz à presença do Duque de York II.

Em conversa com o duque e com o mordomo, Holmes recolhe as seguintes informações:

- ❖ O Duque de York I ao morrer deixou 5 descendentes (vide os seus nomes na legenda da planta do castelo). No seu testamento mandou que cada descendente passasse todas as noites no castelo, caso contrário perderia o direito à sua parte na fortuna da família. Para se certificar que isto ocorre, o mordomo à noite faz uma ronda trancando todas as portas de comunicação e

de manhã faz outra ronda para as destrancar. No fim das portas estarem trancadas os descendentes tocam uma campainha para confirmarem a sua presença ao Duque de York II. Este toque é feito em código, o qual só é conhecido pelo descendente em questão e pelo Duque.



- ❖ O único conjunto de chaves está na posse do mordomo. As chaves têm um desenho muito complicado e original pelo que é impossível fazer duplicados.
- ❖ A única entrada visível do castelo é uma ponte levadiça que fica no extremo mais a sudoeste do castelo.
- ❖ O castelo é constituído por 46 torres distribuídas por 3 círculos concêntricos com uma única torre no centro e com 69 corredores que as ligam como consta da planta do castelo.
- ❖ Cada torre é formada por um único quarto e cada uma é habitada por um dos membros sobreviventes da linha York.
- ❖ À hora do crime todos os descendentes do Duque de York I estavam no seu quarto.
- ❖ A Senhora Bela foi assassinada nos seus aposentos enquanto dormia através da queda sobre si do candelabro que estava suspenso no centro do seu quarto.
- ❖ O corpo foi encontrado pelo mordomo na manhã seguinte ao assassinato.
- ❖ A torre em que morava a Senhora Bela está ligada a três outras torres, duas das quais são: o quarto da Lady Carmo e o quarto da Duquesa de Amarante (que é quase completamente surda e passa o tempo a dormir).

- ❖ O mordomo afirma ser impossível alguém entrar no Castelo durante a noite pois o único caminho de saída é passando através das torres vizinhas até à torre de entrada onde ele passa todas as noites.
- ❖ A única hipótese de aceder às torres sem utilizar os corredores que as ligam é escalá-las. Para que isto não aconteça, todas as noites o mordomo liberta uma feroz matilha de cães no pátio do castelo.
- ❖ O mordomo afirma ainda que nas suas rondas só entra uma única vez em cada torre, mas não se lembra qual a rota que percorreu na noite do crime pois não faz sempre a mesma. A sua única certeza é que começou e terminou a sua ronda na torre da entrada.

Com base nestas informações Holmes chegou à seguinte conclusão:

O assassino só pode ser um habitante do castelo.



Os únicos residentes que poderiam ter entrado no quarto da Senhora Bela sem serem vistos eram os seus vizinhos contíguos.



Os residentes estavam todos trancados e as únicas chaves estavam com o mordomo.



O assassino é o MORDOMO.

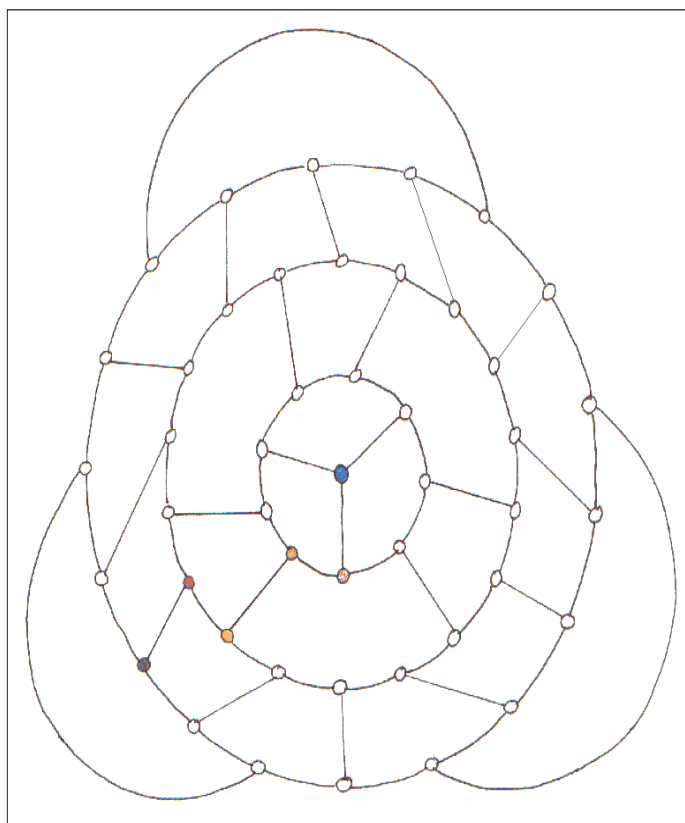
Explicação de Sherlock Holmes para o assassinato da Senhora Bela:

“O duque disse-me que a duquesa de Amarante, cujo quarto é adjacente ao da Senhora Bela, é surda que nem uma porta e dorme profundamente. O mordomo poderia ter esperado no quarto da duquesa até a Senhora Bela tocar a campainha de sinalização e depois entrar novamente para matá-la com um cajado, por exemplo, e depois arranhou o candelabro para este cair de modo a fazer desaparecer as pistas. Seguidamente, o mordomo voltou ao quarto da duquesa e continuou a sua ronda como se nada se tivesse passado.”

Será que a explicação de Holmes está correcta?

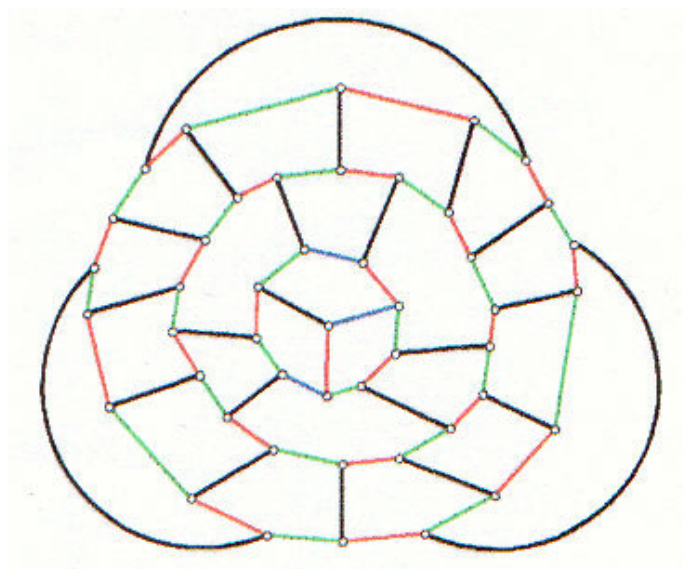
O mordomo não poderia ter passado por todos os corredores uma única vez porque o grafo tem 69 arestas e 46 vértices todos de grau 3, portanto *não existe nenhum circuito de Euler*. Para ele existir tinha que ter no máximo dois vértices de grau ímpar.

Também *não é possível encontrar um circuito Hamiltoniano* (uma linha fechada que atravessasse as arestas visitando cada vértice precisamente uma vez). O assassino visitou duas vezes uma torre: a Torre da Senhora Bela.



Conclusão: O mordomo mentiu, portanto, efectivamente ele é o assassino.

Outra possibilidade de resolução:



Esta resolução consiste em colorir as arestas do grafo e verificar se se trata de um snark uma vez que se o for não existe um circuito hamiltoniano.

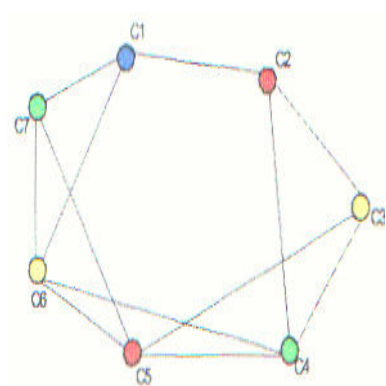
Como podemos ver o número cromático das arestas é 4 logo estamos em presença de um snark. Logo o mordomo mentiu.

9.3. Problema de Armazenamento

Uma companhia industrial deseja armazenar sete diferentes produtos farmacêuticos C1, C2, ... , C7, mas alguns não podem ser armazenados juntos por motivos de segurança. A tabela seguinte mostra os produtos que não podem estar no mesmo local.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1		X				X	X
C2	X		X	X			
C3		X		X	X		
C4		X	X		X	X	
C5			X	X		X	X
C6	X			X	X		X
C7	X				X	X	

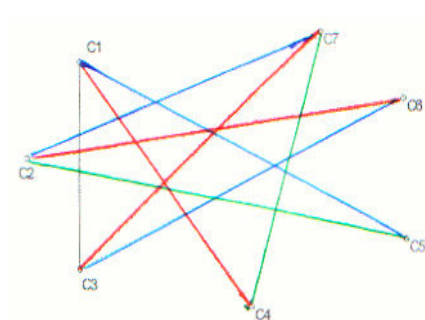
Encontre o número mínimo de localizações necessárias para colocar estes produtos e conclua que não se trata de um grafo hamiltoniano.



Primeira maneira de resolver – coloração de vértices

Pelo número cromático deste grafo podemos ver que são necessárias quatro localizações para guardar:

- C2 e C5
- C3 e C6
- C4 e C7
- C1



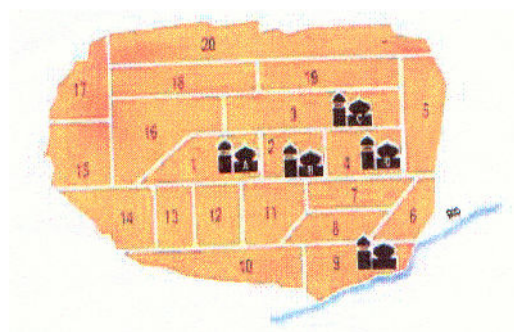
Segunda maneira de resolver – coloração de arestas

Pelo número cromático das arestas deste grafo podemos ver que são necessárias quatro localizações. Logo este grafo é um snark e consequentemente não tem nenhum circuito hamiltoniano.

9.4. A Herança do Califa de Bagdad

Em tempos que já lá vão, o Califa de Bagdad tinha quatro filhos de quem muito gostava.

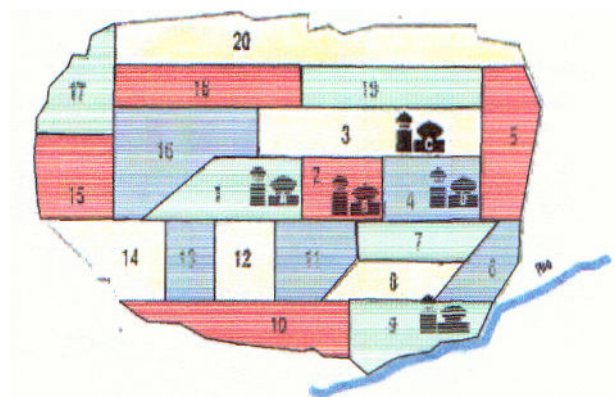
Para cada um deles mandou construir um palácio. O palácio do filho mais velho, Abdul, ficou no terreno 1, o de Budal no terreno 2, o de Cadaf no 3 e o de Dubal no 4, conforme se pode ver no mapa.



Antes de morrer, fez o testamento com indicações de como deviam ser distribuídas as suas ricas terras. Cada filho ficaria com o terreno onde tinha o seu palácio. Os restantes terrenos seriam distribuídos de modo que, no final, cada um ficasse com 5. Mas impôs uma condição a cada um dos filhos: os seus cinco terrenos não poderiam ter fronteiras comuns. Por exemplo, Cadaf não podia ficar com o terreno 19.

Como é que os irmãos dividiram as terras entre si?

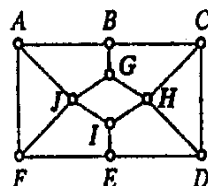
Abdul ficou com os terrenos: 1, 7, 9, 17, 19
 Budal ficou com os terrenos: 2, 5, 10, 15, 18
 Cadaf ficou com os terrenos: 3, 8, 12, 14, 20
 Dubal ficou com os terrenos: 4, 6, 11, 13, 16



10. Exercícios

Exercício 1:

Para o grafo seguinte:



- procure três circuitos de Hamilton diferentes.
- procure um caminho hamiltoniano que comece no vértice A e termine no vértice B.
- procure um caminho hamiltoniano que comece no vértice F e termine no vértice I.

Exercício 2:

Para um grafo completo com 24 vértices procure:

- o número de arestas no grafo.
- o número de circuitos de Hamilton distintos.

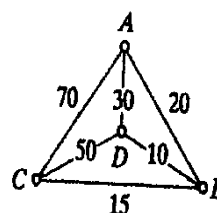
Exercício 3:

Em cada caso, encontre o valor de N:

- G_N tem 120 circuitos de Hamilton distintos.
- G_N tem 45 arestas.

Exercício 4:

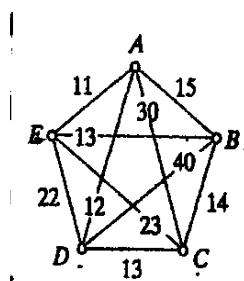
Considere o seguinte grafo valorado:



- (a) Utilize o Algoritmo da Força Bruta para encontrar um circuito de Hamilton óptimo.
- (b) Utilize o Algoritmo do Vizinho mais Próximo iniciando no vértice A para encontrar um circuito de Hamilton.
- (c) Utilize o Algoritmo do Vizinho mais Próximo com início no vértice C para encontrar um circuito de Hamilton. Qual o peso do circuito de Hamilton obtido?

Exercício 5:

Observe o seguinte grafo valorado:



- (a) Utilize o Algoritmo do Vizinho mais Próximo para encontrar um circuito de Hamilton do grafo tendo como vértice inicial o A. Qual o peso do circuito de Hamilton obtido?
- (b) Utilize o Algoritmo Repetitivo do Vizinho mais Próximo para encontrar um circuito de Hamilton e indique qual o peso do circuito obtido.
- (c) Utilize o Algoritmo da Ligação mais Económica para encontrar um circuito de Hamilton do garfo e indique o peso do circuito obtido.

Soluções:

Ex. 1:

- (a) A, B, G, H, C, D, E, I, J, F, A ;
J, G, H, I, E, D, C, B, A, F, J ;
I, E, F, A, J, G, B, C, D, H, I.
- (b) A, F, J, I, E, D, C, H, G, B.
- (c) F, A, J, G, B, C, H, D, E, I.

Ex. 2:

- (a) 276 arestas.
- (b) $23!$ circuitos de Hamilton distintos.

Ex. 3:

- (a) $N = 6$
- (b) $N = 10$

Ex. 4:

- (a) A, B, D, C, A
- (b) C, B, D, A, C; peso = 125

Ex. 5:

- (a) A, E, B, C, D, A; peso = 63;
- (b) neste caso particular os restantes circuitos obtêm-se por reordenação deste circuito
- (c) E, A, D, C, B, E; peso = 63

Conclusão

Para nós, futuros professores, a realização deste trabalho é e será de grande utilidade essencialmente em dois aspectos:

- ❖ em primeiro lugar permitiu que nós próprias pudéssemos entender melhor assim como alargar os nossos conhecimentos sobre Teoria de Grafos facilitando de algum modo a nossa tarefa no momento em que nos for pedido para leccionar este assunto;
- ❖ em segundo lugar, toda a recolha de exemplos e aplicações desta teoria na vida real poderão ser postos ao dispor dos nossos futuros alunos.

Estes aspectos são relevantes pois a compreensão e apreensão das matérias é mais fácil se nos for dado a conhecer a sua verdadeira utilidade.

Bibliografia

🔗 www.educ.fc.ul.pt

🔗 www.groups.dcs.st.and.ac.uk

🔗 www.ulbra.tche.br

🔗 <http://ptmat.imc.fc.ul.pt>

🔗 www.inf.ufse.br

🔗 www.ncc.up.pt

🔗 <http://allan.cefetba.br>

🔗 www.inf.ulpr.br

🔗 www.inf.ifsc.br

🔗 www.ime.unicamp.br

🔗 www.escelsamet.com.br

📖 TANNENBAUM, Peter; ARNOLD, Robert

Excursions in Modern Mathematics

New Jersey: Prentice Hall, 2001, 4ª Ed.

📖 *Moderna Enciclopédia Universal*

Amadora: Circulo de Leitores, Lda., 1994, 8º Vol.