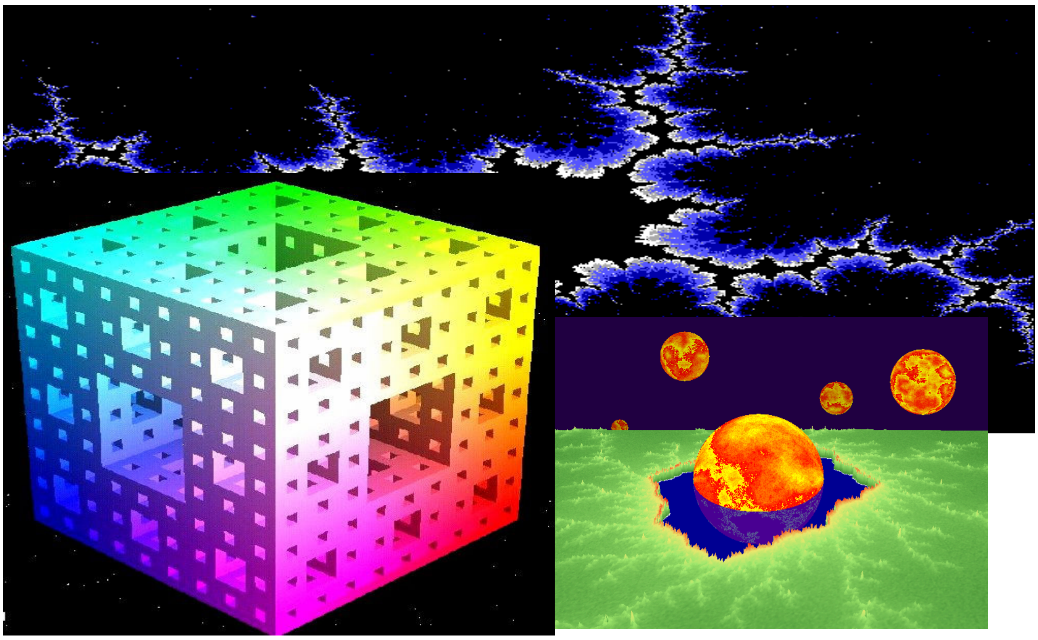
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Geometria Fractal e Teoria do Caos



Fundamentos e Ensino da Álgebra
2003-2004

Índice

Geometria Fractal

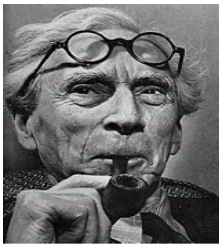
"As imagens que calculei com a minha teoria matemática assemelhavam-se curiosamente à realidade: e se eu podia imitar a natureza, era porque provavelmente teria descoberto um dos seus segredos."

Benoît Mandelbrot

INTRODUÇÃO

" A matemática possui não apenas a verdade, mas uma beleza suprema – uma beleza fria e austera como a de uma escultura "

Bertrand Russel, 1918 in Misticismo e Lógica



Contudo, essa beleza apenas era perceptível para os matemáticos, habituados a lidar com os domínios abstractos da sua ciência. Recentemente, com o desenvolvimento de um novo ramo da geometria, a chamada " Geometria Fractal ", uma parte daquela beleza tornou-se perceptível para mais gente. O surpreendente é que essa beleza ao nosso alcance se deve a uma evolução na forma de olhar para a Natureza.

Na Natureza tudo é Fractal, e nada do que se aplica ao homem pode ser classificado de " exacto ". Método Científico e Vida não combinam: o que é bom hoje, pode ser mau amanhã!

Como o Fractal é a representação da Natureza, linhas rectas e superfícies planas só existem na artificialidade que o homem gerou para complicar o funcionamento da sua limitada mente, e construir a sua própria infelicidade (ao procurar o que não lhe é legítimo nem natural; aquilo que a Natureza não reservou para ele). Apreciando o assunto pela Natureza, podemos abusar dizer que o Fractal corresponde à perfeição, e a Geometria

Euclidiana ao ERRO. Números inteiros são abstracções inventadas pelo homem!

" O universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem da matemática e os seus caracteres são os triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes ficamos às escuras num labirinto escuro. "

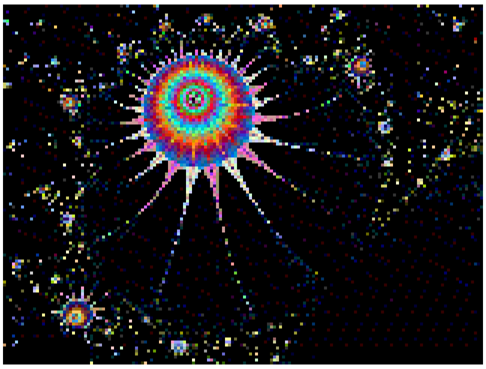
Galileo Galilei, 1626

Foi Benoît Mandelbrot, matemático francês contemporâneo, quem desenvolveu a noção de Fractal.

" Porque é que a geometria é habitualmente descrita como fria e austera? Uma razão reside na sua inaptidão em descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de uma linha costeira, de uma árvore. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e a casca de uma árvore não é suave, nem os relâmpagos se propagam em linha recta (...). A natureza exibe não apenas um grau mais elevado mas um nível de complexidade completamente diferente. O número de diferentes escalas de comprimento dos motivos naturais é para todos os efeitos infinito. A existência desses motivos desafia-nos a estudar aquelas formas que Euclides deixou de parte como não tendo uma forma definida, desafia-nos a investigar a morfologia do amorfo. "

Benoît Mandelbrot, 1983 in The Fractal Geometry of Nature

Nascia então a Geometria Fractal. Para podermos descrever o pormenor irregular e quase aleatório de muitos dos padrões da natureza, não nos podemos cingir à Geometria Tradicional. Com a Geometria Fractal, a matemática torna-se menos " fria " e " austera " e reconcilia-se, de certo modo, com a velha Natureza, que desde sempre lhe tem servido de motivo e inspiração.



Foram precisos cerca de 350 anos para surgir esta nova visão da natureza. Recuemos então um pouco no tempo.

CRONOLOGIA DOS FRACTAIS

Há mais dois mil anos, Euclides, segundo conta a tradição, enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, vista como um todo, se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis.

Desde então, empenhou-se a tentar provar, matematicamente, que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples (cubos, esferas, prismas).

Concentrado sobretudo nas formas, deixou de lado um elemento importantíssimo neste tipo de análise: a dimensão. No entanto, inconscientemente, esta foi a chave para o pensamento inicial de Euclides, já que um grão de areia, considerado isoladamente, apresenta três dimensões (largura, altura e profundidade), enquanto que a superfície arenosa da praia é visualmente plana (com duas dimensões).

SÉC XVII

Newton e Leibniz criaram o cálculo, com as suas técnicas de "diferenciação" em termos geométricos, para assim poderem encontrar a tangente e a curva em qualquer ponto dado. No entanto, algumas funções eram descontínuas e, não tinham tangentes nem pontos isolados.

1870

- Weierstrass descreveu uma função que era contínua, mas não era diferenciável, isto é, em nenhum ponto se podia descrever uma tangente à curva.

- Quase simultaneamente, Cantor criou um método simples de transformar uma linha numa poeira de pontos, que apesar de pontos isolados [0,1], tem mais pontos que os números racionais, ou seja, tem uma quantidade não numerável de pontos.

- Peano, por seu lado, gerou pela primeira vez uma curva ondulada, que tocava em cada ponto do plano.

Todas estas formas pareciam sair das categorias usuais de linhas unidimensionais, bidimensionais e planos tridimensionais, daí o facto pelo qual a maioria ser vista como " **casos patológicos** ".

1880

Poincaré ao analisar a estabilidade do sistema solar, desenvolveu um método quantitativo no qual cada ponto representava uma diferente órbita planetária, criando, o que hoje podemos chamar topologia.

Revelou ainda que enquanto muitos movimentos iniciais velozmente caíam em curvas familiares, algumas eram deveras estranhas, "**caóticas**" cujas órbitas nunca se tornavam periódicas e previsíveis.

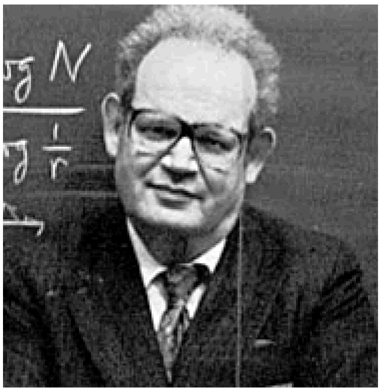
1935

O ponto de partida para o matemático bastante célebre, **Benoît Mandelbrot** foi precisamente a questão da **dimensão**, que tinha "escapado" a Euclides.

Mandelbrot descreveu matematicamente a ideia original de Euclides, acrescentando a essa ideia a questão da **dimensão** e, foi deste modo que surgiu a Geometria dos Fractais.

Num tempo em que o treino matemático francês era fortemente analítico, Benoît Mandelbrot visualizava os problemas sempre que possível, de forma a também os poder resolver em termos geométricos.

1958



Mandelbrot juntou-se à IBM e, iniciou uma análise matemática do ruído electrónico começando a perceber a estrutura presente nele: as hierarquias de flutuações de todos os tipos que não podiam ser descritas pelos métodos estatísticos existentes. Assim, à medida que os anos foram correndo diversos problemas que não pareciam relacionados foram-se unindo cada vez mais, dando origem ao nome: Geometria Fractal.

ANOS MAIS TARDE...

Outros investigadores ao tentarem compreender a flutuação, como por exemplo o ruído; séries de preços em economia; ou o percurso de partículas no movimento browniano de fluídos, puderam comprovar que os modelos tradicionais não correspondiam aos dados. Embora, estas pesquisas parecessem sem relação, estavam a convergir para um objectivo comum.

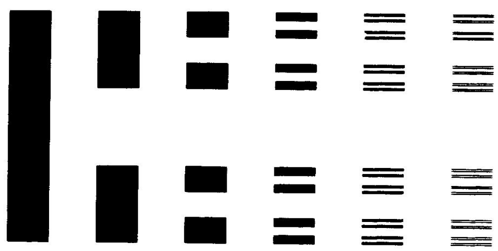
Tendo em conta as palavras de Mandelbrot, embora não aparentem, os Fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em toda a ciência, desde o aspecto das nuvens, montanhas, árvores e relâmpagos, até à distribuição das galáxias e à economia de stocks e mercados.

Assim, o impacto dos Fractais e da Geometria Fractal é bem evidente, quer na engenharia, nas comunicações telefónicas, na química, na metalúrgica, na arte, na matemática e, até no estudo de doenças crónicas e noutros campos da medicina. Por exemplo, na década passada alguns estudos revelaram que um coração saudável bate a um ritmo Fractal e, que um batimento cardíaco periódico, é um sintoma de insuficiência cardíaca.

BIOGRAFIA DE BENOÎT MANDELBROT

O " pai " dos Fractais

Benoit Mandelbrot nasceu a 20 de Novembro de 1924 em Varsóvia, Polónia. Filho de uma médica e de comerciante de roupas, Mandelbrot descobre a matemática através dos seus dois tios. Em 1936, a sua família emigra para França, e o seu tio Szolem Mandelbrot, professor de Matemática no Collège de France, tomou a responsabilidade pela sua educação. Mandelbrot frequentou o Lycée Rolin em Paris até ao início da II Guerra Mundial, altura em que a sua família se mudou para Tulle, no centro da França. Depois de estudar em Lyon, Mandelbrot entrou para a École Normale em Paris, frequentando-a apenas por um dia. Em 1944, fez exames para entrar em universidades francesas. Embora nunca tivesse estudado álgebra avançada ou cálculo, Benoît descobriu que a sua familiaridade e dedicação à geometria o tinha ajudado a explicar problemas noutros ramos da matemática. Inicia assim, os seus estudos na École Polytechnique sob a direcção de Paul Lévy. Depois de completar os seus estudos na École Polytechnique e de obter, em 1952, o Doutoramento, Mandelbrot parte para os Estados Unidos onde visita o California Institute of Technology. Daí parte para o Institute for Advanced Study em Princeton, sendo patrocinado por John von Neumann. Regressa a França em 1955 onde trabalha no Centre National de la Recherche Scientific, no entanto, em 1958 volta para os Estados Unidos onde inicia a sua colaboração com a IBM. Aqui, Mandelbrot encontra um ambiente que lhe permite explorar uma grande variedade de novas ideias. Dedicou-se a um problema que deixava a cabeça em água aos engenheiros do Thomas J. Watson Research Center. Os engenheiros batiam-se com os erros de informação nas comunicações por computador causadas pelo ***ruído***. A informação é transferida pelos computadores através da corrente eléctrica por impulsos. Os engenheiros sabiam que quanto maior fosse a intensidade da corrente menos erros apareciam devido ao ***ruído***, mas isso não fazia desaparecer os erros. De vez em quando um ***ruído*** apagava o sinal causando um erro na transferência de dados. Mandelbrot apresentou então um modelo para explicar o fenómeno dos erros que se baseava no seguinte: dividiu um dia em 24 horas, podendo existir uma hora sem ocorrer qualquer erro, mas na hora seguinte já poderiam aparecer erros. Em seguida dividiu uma hora onde existem erros em períodos de 15 minutos, fazendo o mesmo raciocínio que existiam períodos de erros e períodos limpos, sucessivamente dividiu os 15 minutos de erros em minutos e os minutos em segundos e por aí em diante, verificando que mesmo assim existiam intervalos de erros e intervalos limpos. Concluiu que era impossível isolar um período contínuo de tempo sem existir qualquer erro. Um modelo que ele apresentou para explicar este fenómeno foi o conjunto de Cantor.



Conjunto de Cantor

Os engenheiros da IBM pouco ou nada compreendiam sobre as ideias de Mandelbrot mas os matemáticos compreendiam. O modelo era um pouco abstracto mas tinha grande utilidade prática nas estratégias a utilizar para combater o ***ruído.*** Mandelbrot ensinou os engenheiros a viverem com os erros e a controlarem-nos, em vez de tentarem procurar motivos para tais acontecimentos.

Este não foi o único problema a ser tratado por Mandelbrot, andou pelos problemas da variação de preços no algodão, problemas sobre pequenos e grandes rendimentos numa economia, entre outros.

" Introduzi uma ideia que parecia síntese (...) mas que se iria revelar como a base da teoria dos Fractais. A ideia era que, no estudo da variação dos preços, não havia nenhuma diferença de natureza entre as variações a curto e a longo prazo."

Mais tarde virou-se para o problema seguinte: " ***Quanto mede afinal a costa da Bretanha?*** " Para resolver este problema, começou por propor alguns métodos para a medição de uma costa.

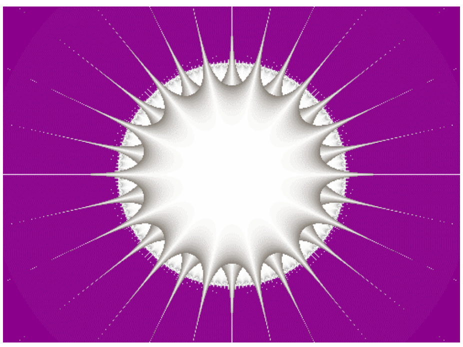
- Corre-se a costa a medir com um compasso com uma abertura de β, quando se chegar ao fim deste processo pega-se no número de vezes que se mediu com o compasso e multiplica-se por β, obtendo o valor de $C(\beta)$ que será o comprimento da costa.

Este método é o conhecido, método do compasso, é de notar que se diminuirmos o valor de β obtemos uma medida mais aproximada da real. Com este método concluiu que o valor ideal de β para medir a costa é o tamanho médio de um Homem. Com a ajuda dos trabalhos deixados por Lewis Fry Richardson sobre comprimentos aproximados de $C(\beta)$, Mandelbrot avança para a caracterização das costas através da dimensão Fractal, e de outras propriedades como a de auto-semelhança que " herda " de Hausdorff" e

Besicovitch. Utiliza esta medida para caracterizar a irregularidade das várias costas fronteiriças.

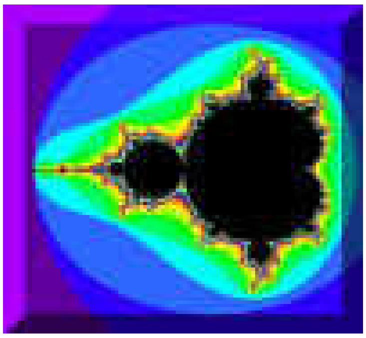
Desenvolveu ainda temas como o Acaso na aplicação à construção de alguns tipos de Fractais, forneceu teorias matemáticas para métodos de auto-semelhanças em probabilidades, estudou a distribuição das galáxias e caracterizou os movimentos brownianos com as ferramentas desta nova Geometria da Natureza.

Em 1945 o seu tio apresentou-lhe algumas ideias de Julia, referentes a 1918, dizendo-lhe que eram uma obra de arte e uma potencial fonte de problemas interessantes. No entanto Mandelbrot não gostou. Em vez disso, escolheu um caminho muito diferente que, no entanto o levou, nos anos 70, aos resultados de Julia, depois de um caminho percorrido através de várias ciências. Com a ajuda dos computadores, Mandelbrot conseguiu mostrar que o trabalho efectuado por Julia, é a fonte de alguns dos mais belos Fractais hoje conhecidos. Para fazer isto, teve de desenvolver não só novas ideias matemáticas, mas também alguns dos primeiros programas de computador para desenhar gráficos.



Conjunto de Julia

Em 1980 introduziu o conjunto de Mandelbrot, e mostrou que os fenómenos complexos podem ser descritos por simples iterações.



Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot passou por muitas dificuldades para conseguir que o seu trabalho e a intuição fossem aceite por outros cientistas. Passou da obscuridade para o sucesso habitual. Muitos o acusam de estar obcecado por um lugar na história, outros por ter um ego megalómano mas a verdade é que ele suou, trabalhou, teve de " camuflar " certas ideias em trabalhos para os poder publicar e sofreu muitas rejeições por causa da moda da matemática, tudo isto para poder juntar e unificar as suas ideias e ideias de outros numa obra que mudou a maneira de muita gente pensar e tentar ver o mundo.

Fractal cria briga na matemática

Ao inventar a geometria das fractais em 1975, o matemático Benoit Mandelbrot prometia uma autêntica revolução na ciência. Nessa nova geometria, em vez de figuras com uma dimensão (Linha), duas (plano) ou três (volume) existem coisas que são fracionárias: a dimensão 1,5, por exemplo, seria algo entre uma linha e um plano. A aplicação das idéias de Mandelbrot acabou virando moda em quase todos os ramos da ciência. Modelos fractais foram usados para explicar tudo, desde a variação dos pingos numa goteira até para tentar melhorar a produção de poços de petróleo, passando também pela análise de cardiogramas.

O entusiasmo com a novidade está agora sofrendo os primeiros abalos. "Esse caso de amor com as fractais está preocupando muitos matemáticos como eu, pelo fato de ver pessoas acreditando que ela tenha algum conteúdo sério", diz o matemático Steven Krantz, da Universidade de Washington em St. Louis, falando à revista **Science** (27 de julho). Krantz desencadeou uma acirrada polêmica entre os cientistas ao publicar um artigo na revista **Mathematical Intelligencer**, com palavras duras. "A geometria fractal não resolveu nenhum problema. Nem mesmo é claro se ela criou algum novo", escre veu Krantz.

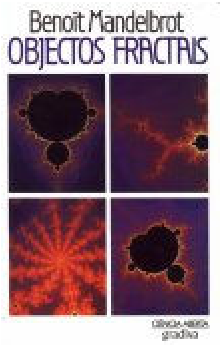
O matemático diz que as fractais só produziram até agora as bonitas figuras coloridas que costumam ilustrar revistas e livros, e que isso influencia até as autoridades que fazem a alocação de verbas para pesquisas. A briga começou, segundo a revista **Science**, quando Krantz escreveu uma crítica às fractais no **Bulletin of The American Mathematical** e enviou o artigo, antes de ser impresso, ao matemático Benoit Mandelbrot. "Eu pressionei o editor da revista para publicar uma resposta minha junto", admitiu Mandelbrot à **Science**. O matemático belga alega que o artigo de Krantz era um "ataque pessoal". O **Bulletin**, assustado com a polêmica envolvendo um peso pesado da ordem de Mandelbrot, (que tem cargos importantes na IBM e em Yale) resolveu não publicar nem o artigo de Krantz nem a resposta de Maldelbrot. A polêmica acabou saindo depois no **Intelligencer**.

À acusação de que as fractais não passam de "belas imagens", sem teoremas ou conteúdo, Mandelbrot responde que está prosseguindo na tradição dos matemáticos do século passado, que tiveram de recorrer às formas gráficas para ter inspiração para resolver problemas complicados demais para serem vistos apenas com equações, lápis e papel. "Figuras bonitas na cabeça certa podem levar a bonitas questões", responde Mandelbrot.

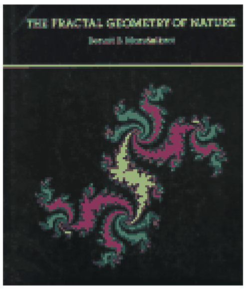
Jonas Cunha/AE

Mandelbrot: pressão sobre editor de revista

O seu trabalho foi primeiro publicado no livro *Les objects fractals, forn, hasard et dimension* (1975),



e mais tarde, de maneira mais completa, no livro *The fractal geometry of nature* in 1982.



Além de trabalhar na IBM, no Watson Research Center, Mandelbrot foi professor de Matemática em Harvard e na École Polytechnique, Professor de engenharia em Yale, professor de Economia em Harvard e como professor de Fisiologia no Einstein College of Medicine.

Mandelbrot recebeu ainda numerosas honras e prémios como reconhecimento dos feitos notáveis. Por exemplo, em 1985 recebe a 'Barnard Medal for Meritorious Service to Science'. No ano seguinte recebe a Franklin Medal. Em 1987 foi homenageado com o Alexander von Humboldt Prize, recebendo em 1988 a Steinmetz Medal. Em 1991 recebe a Nevada Medal e em 1993 o prémio Wolf para a física. A 23 de Junho de 1999, Mandelbrot recebe o Honorary Degree of Doctor of Science, atribuído pela University of St Andrews.

" Objectos naturais muito diversos, alguns dos quais, como a Terra, o céu e o oceano, nos são bastante familiares, são estudados com a ajuda de uma grande família de objectos geométricos, até agora considerados esotéricos e perfeitamente inúteis. Pretendo mostrar, pelo contrário, que estes objectos, pela sua simplicidade, diversidade e extraordinária extensão das suas novas aplicações, merecem ser rapidamente integrados na geometria elementar. Apesar de o seu estudo fazer parte dos campos científicos diferentes, entre os quais a geomorfologia, a astronomia e a teoria de turbulências, os objectos naturais em questão têm em comum uma forma extremamente irregular ou interrompida. Para os estudar, concebi, aperfeiçoei e utilizei extensivamente uma nova geometria da natureza. "

Benoît Mandelbrot, in Objectos Fractais

O QUE SÃO OS FRACTAIS?

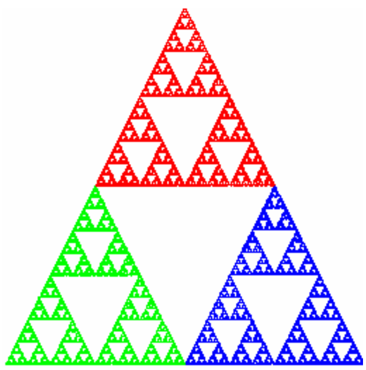
A palavra Fractal foi criada por Benoît Mandelbrot , que surgiu do latim *fractus,* que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: " Eu cunhei a palavra Fractal do adjectivo em latim *fractus.* O verbo em latim correspondente *frangere* que significa quebrar: criar fragmentos irregulares, é contudo sabido – e como isto é apropriado para os nossos propósitos! – que, além de significar quebrado ou partido, *fractus* também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento ".

Nos últimos anos têm surgido diversas definições de Fractais. Uma 1ª definição, pelo próprio Mandelbrot, diz que:

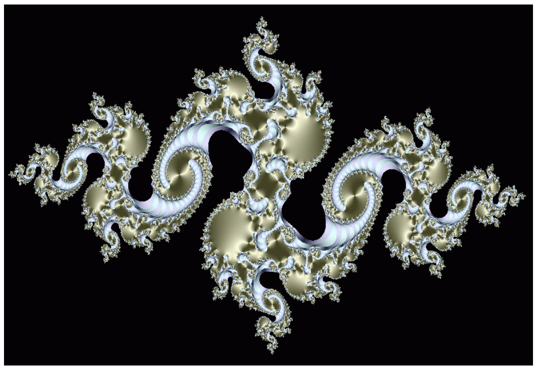
" Um conjunto é dito Fractal se a dimensão Hausdorff deste conjunto for maior do que a sua dimensão topológica ".

Contudo, no decorrer do tempo ficou bastante claro que a sua definição era muito restrita, embora apresentasse algumas motivações pertinentes. Um Fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa, produz resultados fascinantes e impressionantes.

Existem duas categorias de Fractais: **os geométricos**, que repetem continuamente um modelo padrão.



E **os aleatórios**, que são feitos através dos computadores.



Os Fractais são formas geométricas abstractas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área infinita. Representam funções reais ou complexas. Mandelbrot, constatou ainda que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns (auto-semelhança, dimensão e complexidade infinita) e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objectos e aqueles encontrados na natureza.

CARACTERÍSTICAS DE UM FRACTAL

➢ AUTO-SEMELHANÇA

A auto-semelhança é uma ideia antiga. Contudo, e apesar de ser uma propriedade geométrica simples, apenas no início da década de 70 o homem se apercebeu da sua existência na Natureza.

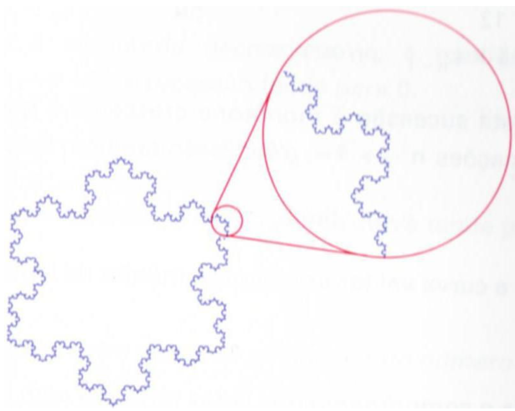
A auto-semelhança é a simetria através das escalas, ou seja, um objecto possui auto-semelhança se apresenta sempre o mesmo aspecto a qualquer escala em que seja observado. Se repararmos, todas as formas geométricas ortodoxas, perdem a sua estrutura quando são ampliadas ou diminuídas. Um círculo numa escala muito maior não é nada mais do que uma recta. Basta ter em mente que à apenas 500 anos se pensava que a Terra era plana. Isto acontece porque à escala humana não vemos mais do que uma linha recta no horizonte. No entanto a maior parte dos objectos com que lidamos no nosso dia a dia não são rectas, nem são esferas, nem são cones. Se olharmos para o mundo a nossa volta, vemos uma infinita variedade de objectos com uma estrutura geométrica deveras complexa e intrincada: uma folha de feto, um cristal de neve, a superfície irregular de uma montanha, ou até mesmo uma descarga eléctrica num meio dieléctrico (de que o caso mais conhecido é o relâmpago).

Olhando em particular, por exemplo para um tronco de uma árvore, verificamos que é extremamente rugoso e irregular. Se observarmos um pequeno pedaço desse tronco ao microscópio observamos novas rugosidades e irregularidades que antes não tínhamos observado. No entanto esta imagem assemelha-se bastante à anterior, ou seja a parte é muito semelhante ao todo. É esta irregularidade regular que caracteriza um Fractal. As imagens de Fractais geradas por computador são o resultado de iterações, operadas num sistema não linear, de forma recursiva e que possibilitam a quem os observa, imagens de grande beleza e a compreensão desses mesmos sistemas.

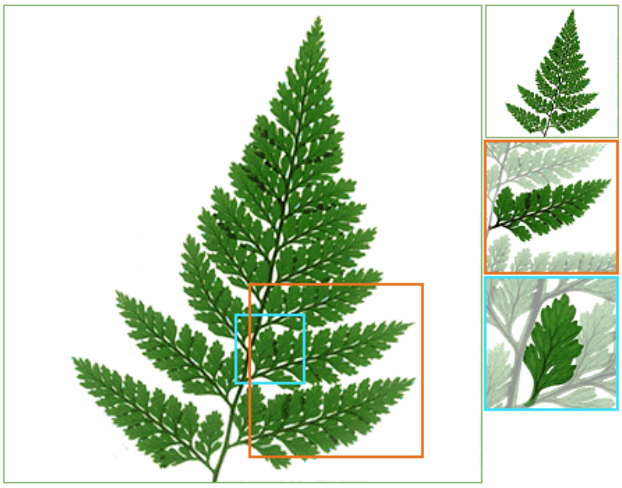
Um Fractal possui então um número infinito de pequenas cópias dele próprio: é a esta propriedade que se chama auto-semelhança.

Existem dois tipos de auto-semelhança: auto-semelhança exacta e auto-semelhança estatística.

Os Fractais que possuem auto-semelhança exacta (determinísticos) são gerados a partir de reproduções exactas de si mesmo em menor escala. Apesar das suas características especiais, estes objectos Fractais não permitem escrever inteira ou adequadamente as formas existentes na natureza.



Os elementos naturais raramente exibem auto-semelhança exacta contudo quase sempre apresentem a chamada auto-semelhança estatística, em relação à qual se aplicam globalmente os mesmos conceitos e definições. Esta nova classe recebeu a denominação de Fractais não-determinísticos e diferem dos anteriores por incluir um certo grau de aleatoriedade no cálculo de novos pontos.

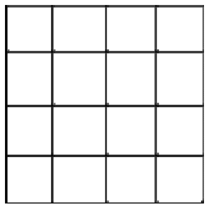


- **DIMENSÃO**

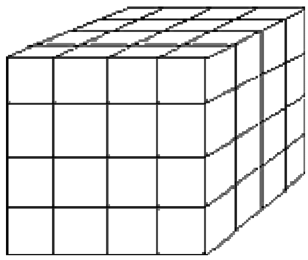
Interpretação da dimensão através da auto-semelhança

1. Comece por notar que um segmento de recta é *auto-semelhante.* Podemos dividi-lo em (por exemplo) 4=4^1 segmentos mais pequenos, todos eles com 1\4 do tamanho do segmento original. Cada um deles, quando 'multiplicado' por 4 (factor de escala), assemelha-se exactamente ao original.

2. O quadrado pode ser dividido em pequenos quadrados, cada um dos quais com os lados iguais a 1\4 do tamanho original. No entanto, necessitamos de 16=4^2 destes novos quadrados para refazer o quadrado original.



3. O cubo pode ser dividido em 64=4^3 pequenos cubos, cada um deles tendo as arestas com 1\4 do tamanho das arestas do cubo inicial.



Nestes casos simples, o expoente indica-nos a dimensão:

4 = 4^1 Partes

16 = 4^2 Partes

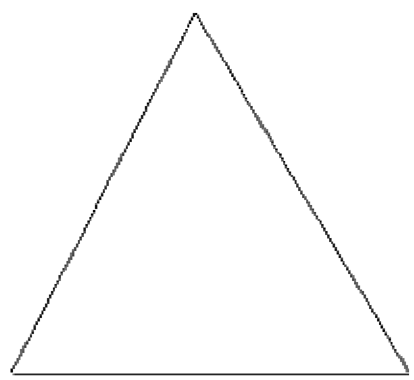
64 = 4^3 Partes

Portanto, N (o nº de partes que constituem a figura) é igual a S (o factor de escala) elevado à potência D (dimensão).

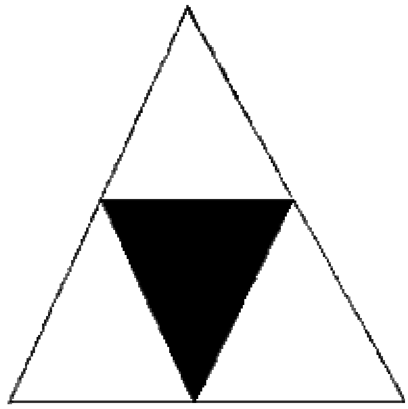
$$N = S^D$$

Nos casos anteriores é fácil encontrar a dimensão, bastando para isso olhar para o expoente. No entanto, nem sempre é assim tão fácil. Consideremos o **Triângulo de Sierpinsky**, exemplo de um Fractal. Vamos ver como é gerado:

Começamos com um triângulo

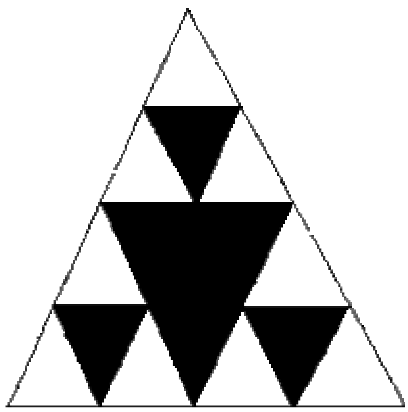


Desenham-se os segmentos que unem os pontos médios dos lados do triângulo e tira-se o triângulo do centro

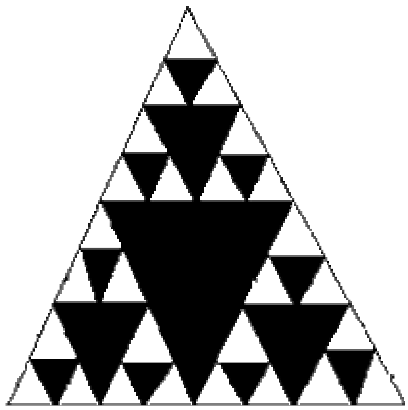


Repare que no nosso novo triângulo aparecem 3 triângulos mais pequenos. Cada um dos lados destes triângulos mede 1\2 do lado do triângulo original. Cada um destes triângulos mais pequenos, quando 'multiplicado' por 2 (factor de escala), assemelha-se exactamente ao triângulo original.

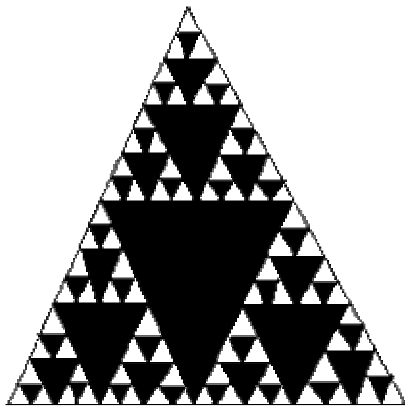
Tomamos esta nova figura e procedemos do mesmo modo:



Repetimos outra vez:



E outra vez…



Repetimos este processo um número infinito de vezes.

Calculemos agora a dimensão do Triângulo de Sierpinsky. Repare que o segundo triângulo é composto por 3 pequenos triângulos exactamente iguais ao original (N=3). O comprimento de cada um dos lados destes triângulos pode ser multiplicado por 2 para obter o triângulo original (S=2). Qual é então a dimensão (D) do Triângulo de Sierpinsky?

$$3 = 2^D$$

$$2^D = 3$$

$$\log 2^D = \log 3$$

$$D \log 2 = \log 3$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D = 1.585$$

Não é um número inteiro!

Em geral,

$$N = S^D$$

$$S^D = N$$

$$\log S^D = \log N$$

$$D \log S = \log N$$

$$D = \frac{\log N}{\log S}$$

O cálculo da dimensão fraccionária tornou-se uma ferramenta poderosa. Agora os matemáticos são capazes de medir objectos que antes eram imensuráveis, tais como montanhas, nuvens, árvores e flores. A dimensão fraccionária indica o grau de tortuosidade de um objecto e a quantidade de espaço que ele ocupa entre dimensões Euclidianas.

- **Complexidade infinita**

Outra característica é a complexidade infinita dos Fractais: um Fractal nunca será completamente representado, sempre faltaram detalhes. Mesmo que um desenho seja ampliado sempre haverá reentrâncias e saliências cada vez menores.

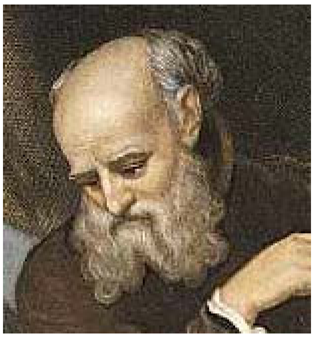
A GEOMETRIA FRACTAL E A GEOMETRIA EUCLIDIANA

"Porquê usar palavras? A geometria existia antes de nós. É co-eterna com o espírito de Deus, é o próprio Deus. A geometria com as suas esferas, cones, hexágonos, espirais, deu a Deus um modelo para a criação e foi implantada no homem como imagem e semelhança de Deus."

Kepler, 1610

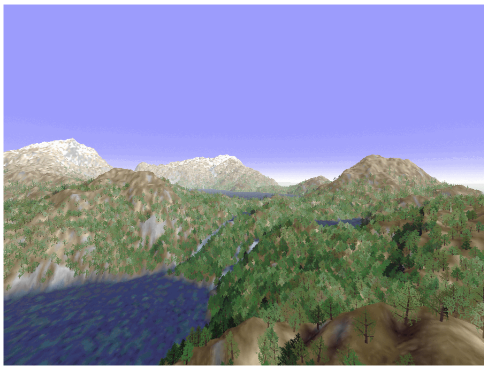
"O universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem da matemática e os seus caracteres são os triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes ficamos às escuras num labirinto escuro."

Galileu Galilei, 1626



"Há alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou da sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, troncos de árvores não são hexágonos e rios não desenham espirais."

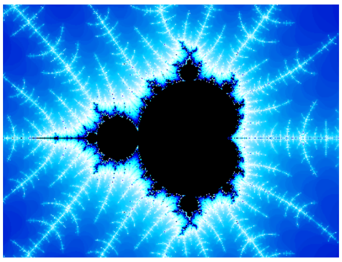
Mandelbrot, 1983



Geometria Euclidiana	**Geometria Fractal**
Tradicional (mais de 2000 anos)	Moderna (25 anos)
Baseada em tamanho ou escala definida	Tamanho ou escala específica
Apropriada a objectos feitos pelo homem	Apropriada a formas naturais
Dimensão no conjunto {0,1,2,3}	Dimensão no intervalo [0,3]
Descrita por fórmulas e equações	Uso de algoritmos recursivos

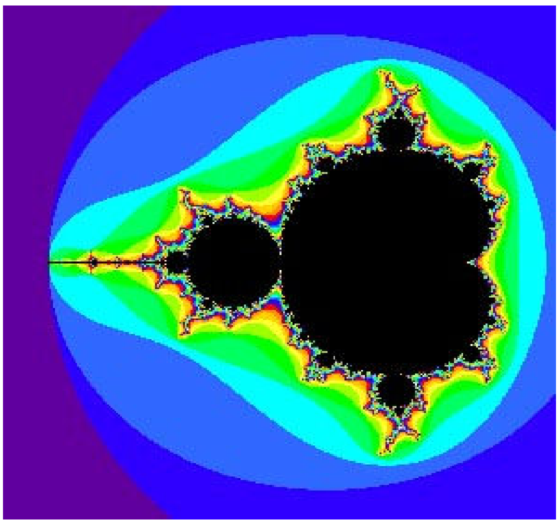
ESTUDOS DE ALGUNS FRACTAIS

⇒ O CONJUNTO DE MANDELBROT



Uma eternidade não seria tempo suficiente para conseguirmos observar todo este Fractal, com os seus discos enfeitados com extremidades espinhosas, as suas espirais e filamentos enrolando-se em todas as direcções, exibindo volumosas moléculas infinitamente variadas.

Se examinarmos a cor do conjunto de Mandelbrot através da janela ajustável dum ecrã de computador, vemos que é muito rica a sua complicação ao longo das diversas escalas. Uma catalogação das diferentes imagens no seu interior ou uma descrição numérica no seu contorno iria exigir uma quantidade infinita de informação.



O conjunto de Mandelbrot é obtido quando submetemos os números complexos (números do tipo $a + ib$, em que, a e b são números reais e i é a constante imaginária) a um processo iterativo.

Ao aplicar este processo repetidamente, obtemos uma sequência de números u_n, cuja distância ao 0 (ou seja, o módulo $|u_n|$) se mantém finita ou tende para infinito.

É esta fronteira, entre o finito e o infinito que delimita o conjunto de Mandelbrot.

Como se constrói o Conjunto de Mandelbrot?

Para responder a esta pergunta, basta explicar como se atribui a cor a um número complexo $a + ib$ qualquer, que vai ser desenhado como um ponto (a, b) no plano.

Vamos denotar por z o número anterior ($a + ib$).

Submete-se o número z ao seguinte processo iterativo:

$$z_{n+1} = z_n^{\ 2} + w$$

em que w é um número complexo constante.

Observando o comportamento de z_{n+1}, ou seja, do seu módulo $|z_{n+1}|$, temos as seguintes possibilidades:

- $|z_n|$ se mantém sempre finito – Atribui-se a cor **preta** a z.
- $|z_n|$ tende para infinito – Atribuem-se diferentes cores a z, dependendo do comportamento de $|z_n|$. A classificação é definida por quem desenha o Fractal.

Um ponto é marcado neste Fractal não quando satisfaz a equação, mas sim segundo um certo tipo de comportamento. Um comportamento possível pode ser um estado estacionário; outro pode ser a convergência para uma repetição periódica de estados; e outro ainda pode ser um corrida descontrolada para o infinito.

Este comportamento de convergência para uma repetição periódica de estados é passível de ser observada e, depois, todos nos podemos interrogar se o resultado é infinito ou não.

Este comportamento assemelha-se ao processo de feedback no mundo do dia-a-dia. Pode imaginar-se que estamos a montar um microfone, amplificador e colunas de som num auditório – estamos preocupados com o ruído estridente de feedback acústico. Se o microfone capta um som suficientemente alto, o som amplificado vindo das colunas irá entrar de novo no microfone num ciclo infinito, com um som cada vez mais elevado. Por outro lado, se o som é baixo irá apenas desaparecendo, até deixar de ser ouvido. Para construir um modelo para este processo de feedback poderíamos escolher um número inicial, multiplicá-lo por si mesmo, multiplicar o resultado por si mesmo, e assim sucessivamente, Iríamos descobrir que os grandes números conduzem rapidamente ao infinito: 10,100,10000... Mas os números pequenos levam a zero:. $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6}\ldots$

⇒ **CURVA DE PEANO**

"Sur une courbe qui rempli toute une aire plane"

Giuseppe Peano

A curva de Peano surgiu em 1890 e é construída por um processo análogo ao da curva de Koch, ou seja, por iteração gráfica.

Trata-se de uma curva do tipo "plane filling", isto é, uma curva que passa, pelo menos uma vez, por todos os pontos de um quadrado.

A descoberta desta curva chocou os matemáticos do século passado, conduzindo a uma crise acerca do conceito de curva.

Depois de muito estudo e experiências efectuadas, concluiu-se que a curva de Peano passa por todos os pontos do quadrado pelo menos uma vez.

O processo iterativo inicia-se com um segmento de recta.

Construção da Curva de Peano:

1. Divide-se esse segmento em três partes iguais.
2. Sobre o troço médio, constrói-se um rectângulo bissectado pelo troço, formando dois quadrados com lado igual ao troço que lhes deu origem.

3. Em cada segmento dos nove restantes, repetem-se os passos 1 e 2, e assim sucessivamente

Cálculo da <u>Dimensão</u> da Curva de Peano:

1. Suponhamos que o segmento original tem comprimento 1 (***L* = 1**)
2. Na iteração *p*, obteremos:
   1. 9^p segmentos ($\boldsymbol{n = 9^p}$)
   2. Os segmentos têm comprimento $(1/3)^p$ ($\boldsymbol{N = (1/3)^p}$)
3. Portanto, a dimensão da curva de Peano é:

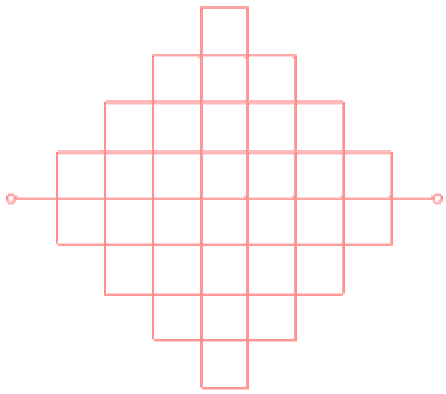
$$= \frac{-p\log(9)}{-p\log(3)} = \frac{\log(3^2)}{\log(3)} = 2\frac{\log(3)}{\log(3)} = 2$$

Isto quer dizer, que a curva de Peano (levando a construção anterior até uma infinidade de iterações), não é mais do que uma superfície completamente preenchida.

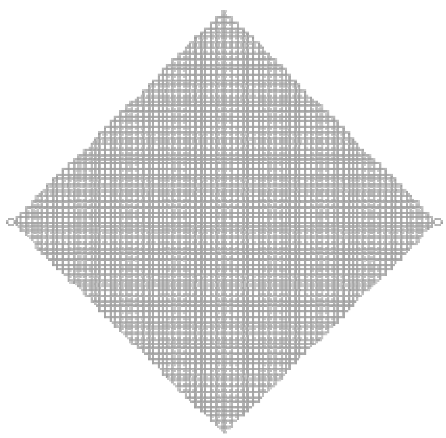
Observando a evolução da curva, deduz-se que esta superfície será um losango completamente preenchido.

Vejamos como evolui a construção desta curva:

Iteração **2**:

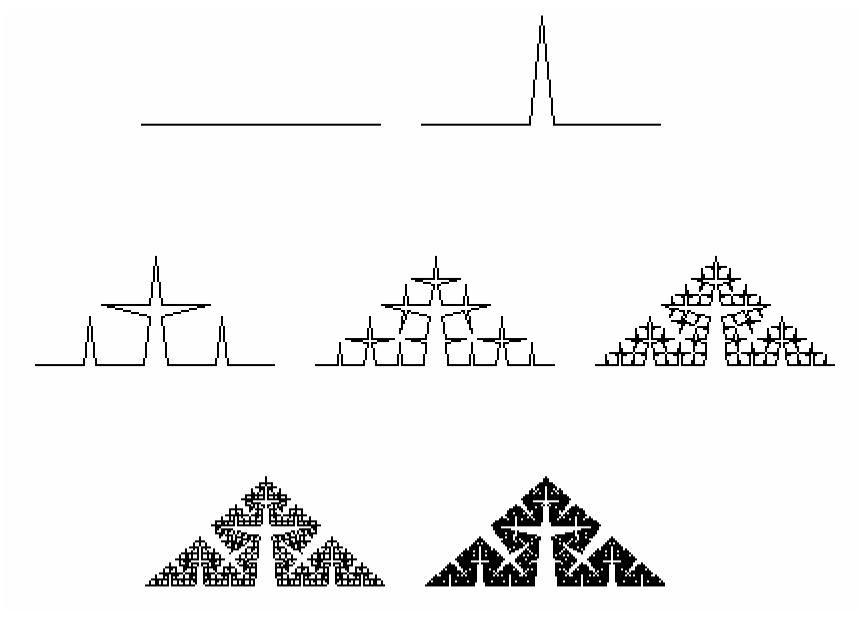


Iteração **4**:



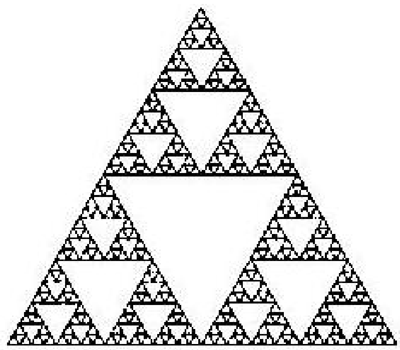
Prevê-se, devido à dimensão, que no limite se obterá:

Um outro exemplo da construção da curva de Peano obtém-se variando apenas o factor de redução de cada um dos segmentos relativamente ao segmento inicial e, automaticamente, o ângulo entre estes segmentos. Assim:



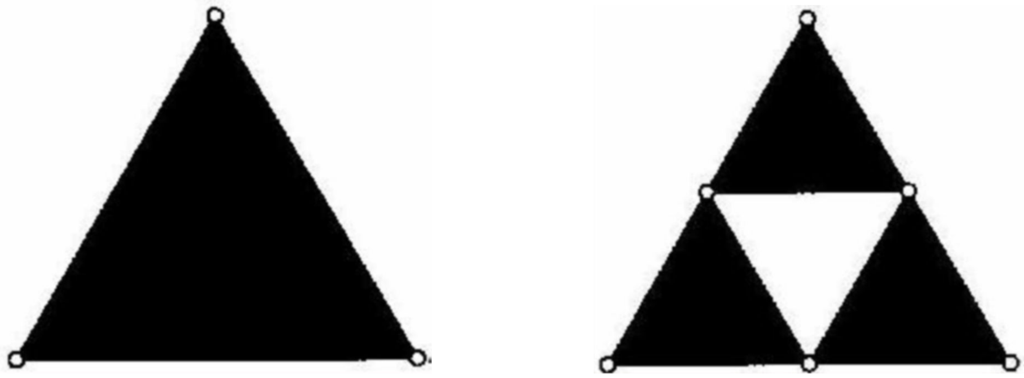
Dimensão= $\dfrac{\log 4}{\log\left(\dfrac{20}{9}\right)} \approx$ 1,736

⇒ O TRIÂNGULO DE SIERPINSKY



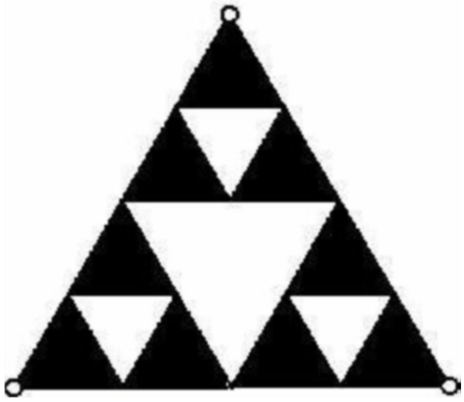
O triângulo de Sierpinsky foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinsky (1882-1969)

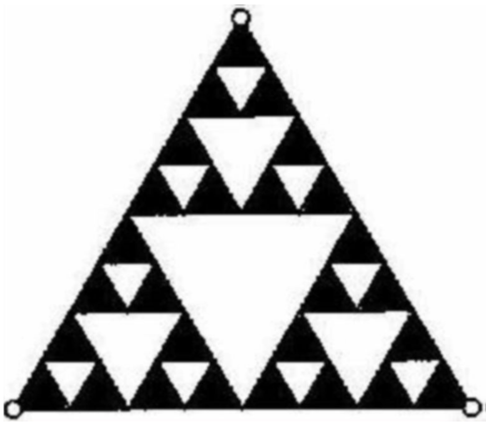
É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes.



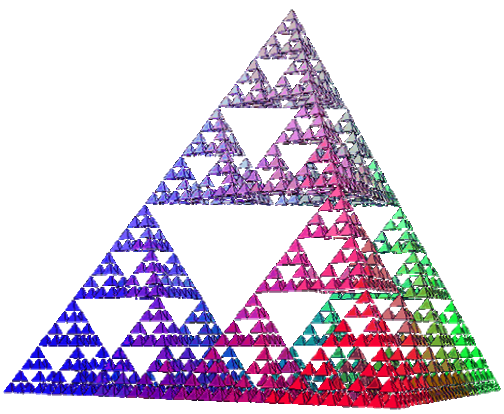
Visto um destes quatro triângulos estar invertido (em relação ao original), é retirado do triângulo original sobrando apenas os outros três.

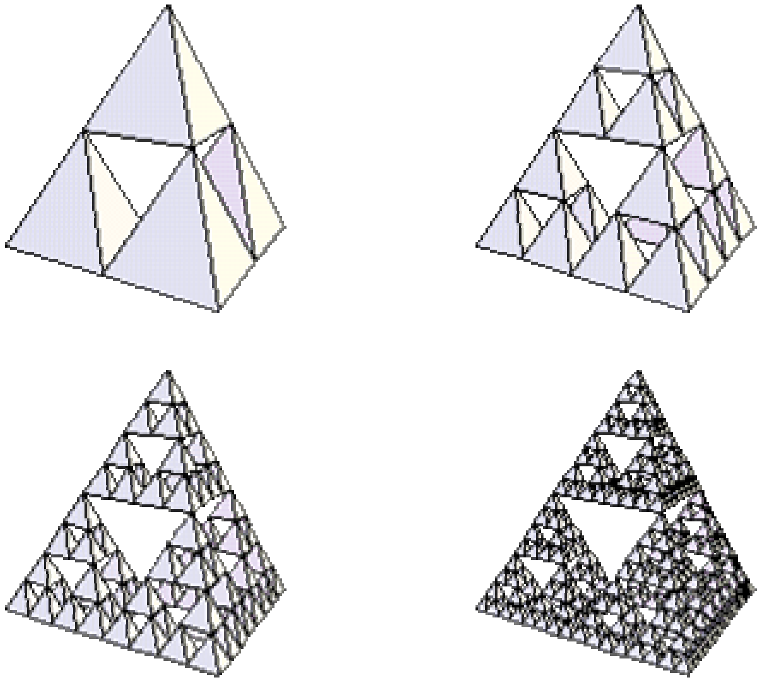
Repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos com a orientação original, e assim sucessivamente. O Fractal obtido é estritamente auto-semelhante, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura, apresentam uma beleza e harmonia ímpar.





Pode-se generalizar o triângulo de Sierpinsky para uma terceira dimensão, obtendo-se a pirâmide de Sierpinsky.



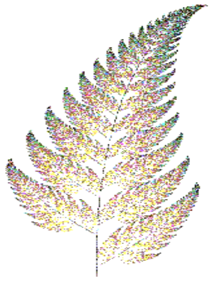


Dimensão = $\frac{\log 4}{\log 2} = 2$

Neste caso temos um objecto no espaço tridimensional, com dimensão 2.

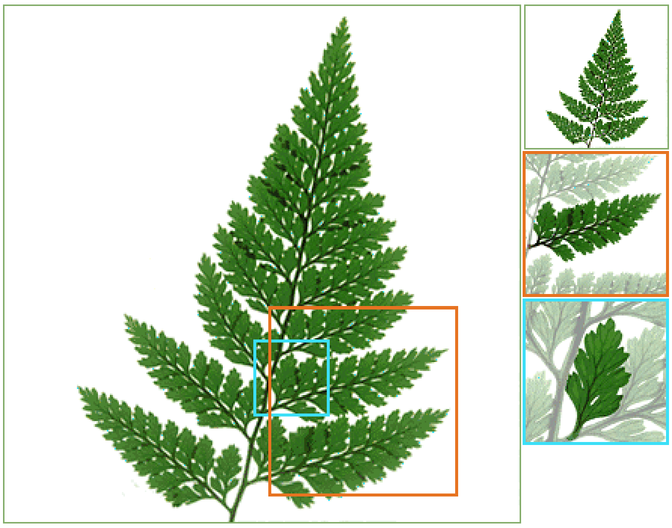
Em cada iteração, a área total mantém-se constante à medida que o volume tende para zero.

⇒ O FETO FRACTAL



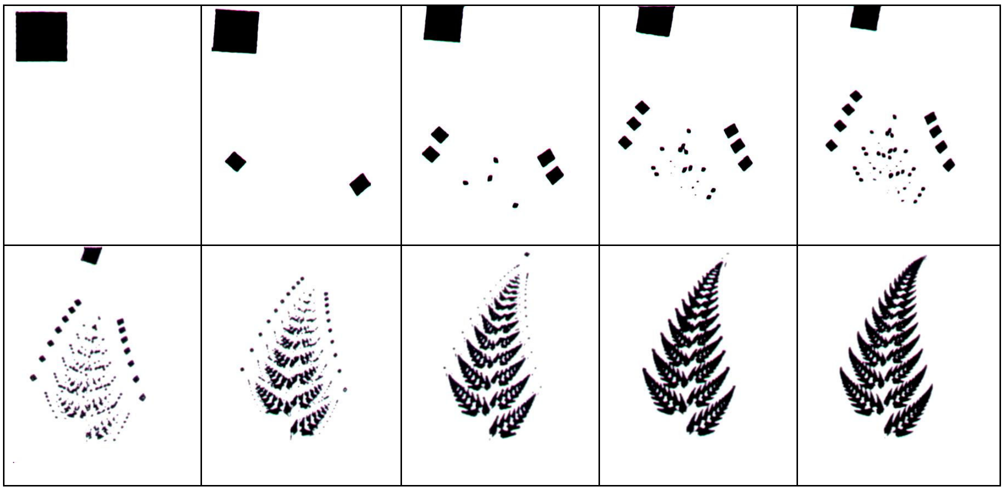
Um exemplo de Fractal - uma folha de feto gerada por iterações sucessivas.

Alguns objectos da Natureza, como montanhas, árvores e plantas, têm propriedades Fractais. Na imagem que se segue, podemos observar em vários níveis de ampliação a complexidade e pormenor de um feto. Este feto apresenta a propriedade de auto-semelhança, característica dos Fractais. Com efeito, as várias ampliações, sinalizadas na imagem inicial a laranja e a azul, são muito semelhantes a essa imagem. Estas propriedades sugerem uma ligação entre os Fractais e a natureza.



Feto: um objecto da Natureza Fractal.

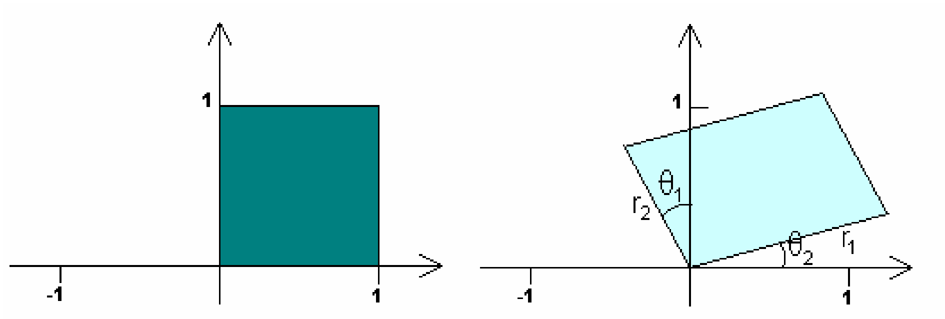
Construção do Feto Fractal



Numa cópia ampliada das figuras anteriores é possível determinar o valor aproximado dos parâmetros que definem as três aplicações que constituem o IFS que dá origem a este Fractal, muito semelhante à folha de um feto. Nesta planta é muito fácil observar e compreender a propriedade da auto-semelhança de um Fractal já que esta cresce repetindo a mesma forma em escalas cada vez menores (uma parte da folha, parece-se muito com a folha inteira).

O IFS em IR^2 é formado por três contracções, já que da primeira imagem para a segunda observamos que o quadrado é transformado em três quadriláteros mais pequenos.

Cada uma das três contracções consiste num reescalonamento, com ou sem "distorção" seguidos de uma translação. Assim, cada uma delas pode escrever-se analiticamente na forma $w(x) = w\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$ sendo que a matriz A se pode escrever na forma $A = \begin{pmatrix} r_1 \cos\theta_1 & -r_2 \sin\theta_2 \\ r_1 \sin\theta_1 & r_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$ em que r_1 e r_2 correspondem aos factores de reescalonamento de cada um dos lados do quadrilátero e θ_1 e θ_2 correspondem aos ângulos de distorção de cada um desses lados.



Basta agora efectuar algumas medições com régua e transferidor, considerando que os três quadriláteros da segunda figura se tratam de paralelogramos para em seguida determinar os parâmetros *a, b, c, d, e* e *f* de cada uma das três contracções.

Assim:

$$w_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3,25}\cos(-2) & -\frac{2,8}{3,25}\sin(-3) \\ \frac{3}{3,25}\sin(-2) & \frac{2,8}{3,25}\cos(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

$$w_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0,95}{3,25}\cos(49) & -\frac{1,1}{3,25}\sin(49) \\ \frac{0,95}{3,25}\sin(49) & \frac{1,1}{3,25}\cos(49) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$w_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3,25}\cos(-49) & -\frac{1,25}{3,25}\sin(-54) \\ \frac{1}{3,25}\sin(-49) & \frac{1,25}{3,25}\cos(-54) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8,4 \\ -7,95 \end{pmatrix}$$

Outros exemplos de objectos da Natureza com propriedades Fractais são por exemplo a couve-flor e os brócolos.

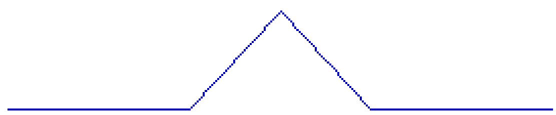
⇒ **A CURVA DE VON KOCH**

Um dos exemplos de Fractais mais simples é a chamada Curva de Koch. Esta foi apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch, em 1904, construindo-a a partir de um segmento de recta.

Construção da Curva de Von Koch:

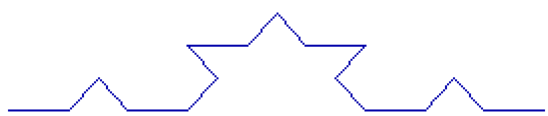
1- Divide-se esse segmento em três partes iguais.

2- Substitui-se o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo a que, o segmento médio e os dois novos segmentos formem um triângulo equilátero.

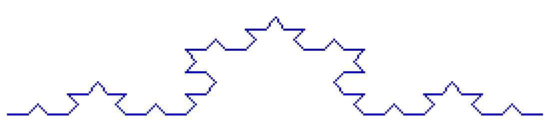


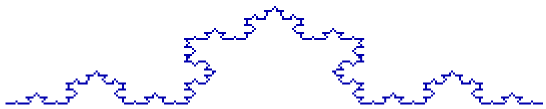
3- Obteve-se uma linha poligonal com quatro segmentos de comprimento igual.

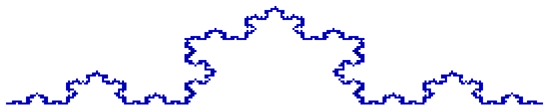
4- Posteriormente, repetem-se os passos 1-3 para cada um dos segmentos obtidos.



5- E repete-se este processo "ad infinitum".

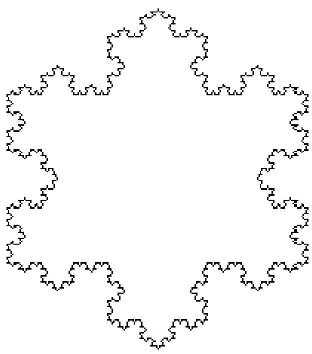






Esta curva tem um comprimento infinito, não tem derivada em nenhum dos seus pontos e a sua dimensão é aproximadamente 1,262.

⇒ **FLOCO DE NEVE DE KOCH**

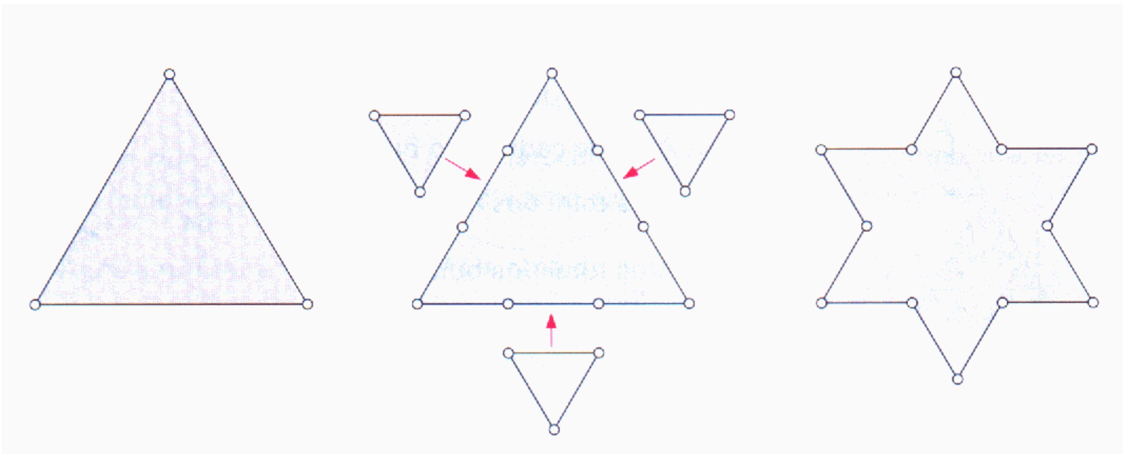


A Curva de Koch deu origem a um outro Fractal, conhecido como ilha de Von Koch ou Floco de Neve (recebeu este nome por sua semelhança com um floco de neve). Estes dois Fractais são muito semelhantes, só que o Floco de Neve em vez de partir de um segmento de recta, parte de um triângulo equilátero e aplica-se o mesmo processo de construção.

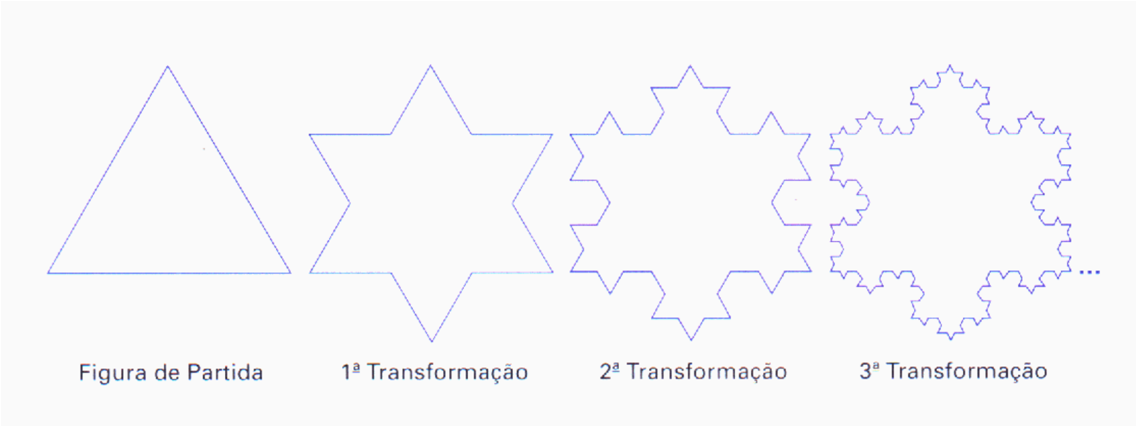
A sua construção baseia-se num processo recursivo:

1- A figura de partida é um triângulo equilátero.

2- A primeira transformação consiste na divisão em três partes iguais de cada um dos lados de um triângulo, construindo-se sobre cada um dos segmentos médios um novo triângulo equilátero.



3- Na segunda transformação repetir-se-á o processo de construção sobre cada um dos lados da figura obtida anteriormente. E para as figuras seguintes o processo repete-se. Obtém-se assim a seguinte sequência de figuras:



Como é que varia o número de lados da curva com as transformações?

Por cada nova transformação que se faz, cada lado dá origem a quatro lados.

Assim:

Figuras	Número de lados				
Fig. de partida			3	=	3×4^0
1	3x4	=	12	=	3×4^1
2	12x4	=	48	=	3×4^2
3	48x4	=	192	=	3×4^3
4	192x4	=	768	=	3×4^4
5	768x4	=	3072	=	3×4^5
...	...		...		...

O número de lados de cada figura em função do número de transformações é dado em progressão geométrica $\mathbf{L_n}$, que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral:

$$\mathbf{L_n} = \boxed{\begin{cases} L_1 = 12 \\ L_n = 4.L_{n-1} \quad , \quad n > 1 \end{cases}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{L_n} = 3 \times 4^n$$

É evidente que esta sucessão é monótona crescente e que, há medida que o número de transformações tende para mais infinito, a sucessão também tende para mais infinito.

$$\mathbf{\lim L_n = +\infty}$$

Isto significa que a curva vai ter um número infinito de lados.

Como é que varia o comprimento dos lados da curva com as transformações?

Suponhamos que o lado do triângulo inicial mede 1 unidade. Os lados de cada nova figura são três vezes mais pequenos que os da figura anterior.

Assim:

Figuras	Medida de cada lado				
Fig. de partida	1				
1	$\frac{1}{3}$	=	$\frac{1}{3^1}$	=	3^{-1}
2	$\frac{1}{9}$	=	$\frac{1}{3^2}$	=	3^{-2}
3	$\frac{1}{27}$	=	$\frac{1}{3^3}$	=	3^{-3}
4	$\frac{1}{81}$	=	$\frac{1}{3^4}$	=	3^{-4}
5	$\frac{1}{243}$	=	$\frac{1}{3^5}$	=	3^{-5}
...	...		...		...

A medida dos lados de cada figura em função do número de transformações é dado pela progressão geométrica $\mathbf{M_n}$, que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral:

$$\mathbf{M_n} = \boxed{\begin{cases} M_1 = \frac{1}{3} \\ M_n = \frac{1}{3}.M_{n-1} \quad , \quad n > 1 \end{cases}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{M_n} = \boxed{\frac{1}{3^n}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{M_n} = 3^{-n}$$

Esta sucessão é monótona decrescente e, à medida que o número de transformações tende para mais infinito, a sucessão tende para 0.

$$\lim M_n = o$$

Isto significa que a medida de cada lado da curva tende para 0.

E como varia o perímetro da curva em função do número de transformações?

Podemos definir a sucessão dos perímetros P_n à custa das duas anteriores.

$$P_n = L_n \times M_n$$

$$P_n = 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n}$$

$$P_n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

É uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 4 e a razão é $\frac{4}{3}$.

Calculemos alguns termos:

Ao fim de **5** transformações o perímetro é aproximadamente **13** .

Ao fim de **10** transformações o perímetro é aproximadamente **53** .

Ao fim de **50** transformações o perímetro é aproximadamente **5297343**!!!

Se alguma dúvida restasse de que esta sucessão é um infinitamente grande positivo basta reparar que a razão é maior que 1, e o primeiro termo é positivo. Logo:

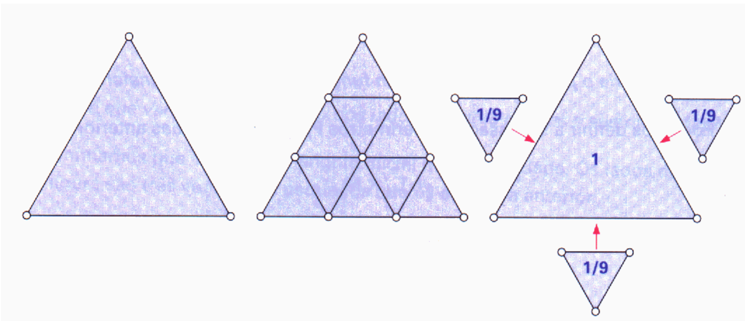
$$\lim P_n = +\infty$$

A área limitada por esta curva também cresce indefinidamente?

Consideremos que a área do triângulo inicial que serve de ponto de partida para a construção do Floco de Neve tem 1 unidade de medida de área.

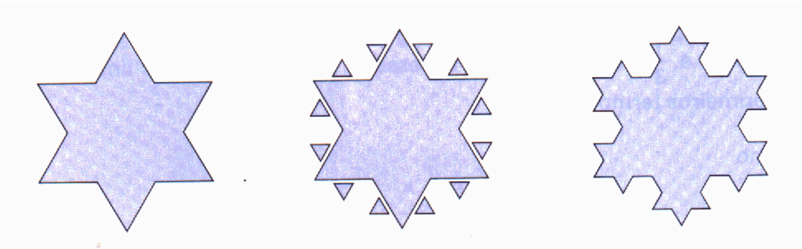
Figura de partida

Área total: **1**



Após a primeira transformação a figura obtida tem área igual a:

$$A_1 = 1 + 3 \times \left(\frac{1}{9}\right) \times 1 = 1 + \frac{1}{3}$$



Após a segunda transformação a figura obtida tem área igual a:

$$A_2 = 1+\frac{1}{3}+(3\times 4)\times\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}$$

Na terceira transformação:

$$A_3 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+(3\times 4^2)\times\left(\frac{1}{9}\right)^3 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

Continuando, sucessivamente, na transformação n + 1, obtém-se:

$$A_{n+1} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

que é a soma de 1 com os termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é $\frac{1}{3}$ e a razão é $\frac{4}{9}$.

Então $A_{n+1} = 1 + S_n$, sendo $S_n = \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$.

Calculando S_n quando n tende para infinito tem-se

$$\lim S_n = \lim\left(\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right) = \frac{3}{5}.$$

Então

Área total limitada pelo Floco de Neve de Koch = $1+\frac{3}{5}=1{,}6$.

Podemos então concluir, que embora o perímetro da curva cresça indefinidamente a área tem limite finito e não ultrapassa 1,6.

O Fractal do Floco de Neve é uma excelente figura para entendermos os conceitos de Fractais, pois o mesmo apresenta as características de Fractais que vimos:

- Ao navegarmos na escala do Fractal, e se tomarmos uma parte da figura ela parecer-se-á com qualquer outra parte do Fractal;
- A cada iteração o perímetro do Fractal aumenta, e, após *n* iterações, o mesmo tende para o infinito.

FRACTAIS NO ENSINO NÃO UNIVERSITÁRIO

Porquê trabalhar com Fractais com alunos do Ensino Básico e Secundário?

Em primeiro lugar, o facto já referido de a forma e dimensão Fractais estarem muito presentes na natureza é, por si só, uma motivação válida para professores e alunos e as propriedades da recursividade e auto-semelhança são facilmente entendidas por uma criança se visualizadas, por exemplo, na folha de um feto, ou na estrutura de uma couve-flor. Para além disso, é de salientar a aplicabilidade do estudo dos Fractais num número cada vez mais crescente de áreas da ciência e da tecnologia, como é o caso da biologia (já mencionada), da informática (técnicas de compressão de imagem e de criação de imagens virtuais), da economia (curvas das bolsas de valores), da astronomia (previsão das trajectórias futuras de planetas)... E até a música já tem a sua vertente Fractal!

Por fim, e não menos importante, é incrível a quantidade de conceitos que podem ser abordados ou trabalhados quando se realizam actividades de exploração de Fractais, quantidade essa que pode ser tanto maior quanto mais avançado for o nível dos alunos.

Conteúdos programáticos da Matemática que podem ser trabalhados com o estudo de Fractais:

Vários são os conteúdos matemáticos que o aluno pode adquirir, compreender ou aplicar ao realizar uma tarefa que envolva a construção ou a exploração de Fractais. Esses conteúdos podem ser abordados de uma forma mais ou menos objectiva, mais ou menos evidente, consoante a tarefa em si e a percepção que o aluno vai tendo das operações e dos conceitos matemáticos envolvidos.

Apresento em seguida uma lista de alguns desses conteúdos:

Auto-semelhança

Forma

"Rugosidade" e Dimensão

Polígonos e Sólidos Geométricos

Ângulos internos e externos

Áreas, volumes e perímetros

Trigonometria

Números complexos

Funções (afim, quadráticas, trigonométricas,...)

Transformações Geométricas (translação, rotação, simetria, homotetias,...)

Vectores

Semelhança de Figuras (razão de semelhança, ampliação, redução, razão entre áreas e Volumes de Figuras Semelhantes,...)

Sucessões (termos, termo geral - generalização, limite, sucessão limitada, infinitésimo, infinitamente grande, noção de infinito,...)

Operações com Conjuntos

Iteração de funções

Outras Aquisições e Competências:

A ligação e até dependência dos Fractais relativamente aos computadores e ao seu uso é, por um lado um possível factor de motivação para alguns alunos estudarem e explorarem estas formas geométricas e por outro, uma eventual entrada para o mundo da programação e da exploração de software (dinâmico) de representação de imagens Fractais. Ao tentarem desenhar uma curva Fractal com lápis no papel, facilmente se aperceberão da utilidade e da necessidade da utilização de um computador para realizar esta tarefa com maior precisão e rapidez. Com os alunos mais jovens é possível abordar a construção de Fractais através da sua programação em Basic, recorrendo a programas como o *Logo*, no qual o aluno dá instruções à tartaruga (cursor) sobre para onde ela deve dirigir-se no monitor de forma a percorrer uma linha Fractal no seu trajecto. Ao desenvolverem este tipo de actividades o aluno, além de aprender a construir um Fractal e a verbalizar matematicamente as operações necessárias para tal utilizando e trabalhando vários conceitos matemáticos, está também a adquirir a noção de programação, e vai apercebendo-se da importância da matemática e do raciocínio matemático na criação das ferramentas electrónicas que usa todos os dias. Ao aprender a programar, o aluno também pode aprofundar a noção de variável e de concretização de uma variável e perceber como e para quê se criam sub-rotinas, e se aplicam métodos recursivos. Além disso, pode ainda dar-se conta não só das capacidades da máquina como também das suas limitações.

Outros programas, estão também ao alcance dos alunos como é o caso do *Geometer's Sketchpad* e do *Cabri Geometre* que são idênticos na forma como funcionam e para que se usam. Também permitem construir imagens Fractais através de rotinas recursivas, mas neste caso o utilizador não programa directamente escrevendo as ordens numa determinada linguagem de programação – é o programa que o faz em *background* através das indicações que se dão ao escolher e seleccionar pontos, segmentos de recta, figuras, etc., e ao realizar-se determinado número de operações com esses objectos. O programa interpreta o procedimento e "aprende-o" para voltar a repeti-lo quando solicitado, a partir de outros objectos que se seleccionem previamente. Nestes programas não é tão fácil que o aluno se dê conta do que é programar, mas relativamente ao *Logo* há a vantagem de a imagem criada ser dinâmica, isto é, pode arrastar-se um simples ponto que faça parte dela e observar as consequências na construção geométrica que esse movimento acarreta.

De qualquer forma, o modo como estas propostas de trabalho devem ser construídas e apresentadas é um tópico que ainda não abordei na prática com os alunos e que, como já referi antes, deixo para explorar num futuro próximo.

Atitudes, Valores e Competências:

Muitas e variadas serão, por certo, as atitudes e os valores que podem ser despertados nos alunos que explorem os Fractais bem como as competências que podem neles ser desenvolvidas a partir desse trabalho. A quantidade e a qualidade dessa evolução dependerá, por certo, das actividades que o aluno realize e de como ele for guiado através delas, de como estas estiverem construídas e de como ele for motivado para elas e ainda da sua apetência e do conhecimento prévio que trouxer consigo.

No entanto, deixo aqui algumas dessas atitudes, valores e competências que no meu entender, e sem reflexão muito profunda sobre o assunto, julgo poderem ser desenvolvidas com actividades que envolvam a construção e a exploração de Fractais.

Mostrar confiança em si próprio no confronto com situações novas.

Revelar curiosidade e gosto de aprender, de pesquisar e de investigar.

Reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão do mundo e para a evolução do mesmo.

Ter hábitos de trabalho e de persistência, procurando realizar o trabalho até ao fim de forma organizada e apresentá-lo com a devida qualidade.

Ser crítico relativamente aos resultados obtidos na realização de determinada tarefa e relativamente à qualidade do seu trabalho.

Ser capaz de resolver problemas, formular hipóteses, prever resultados e seleccionar estratégias de resolução, e de no final criticar os resultados obtidos.

Conseguir comunicar e transmitir conceitos, ideias e procedimentos, tanto em linguagem corrente como em linguagem matemática.

Apreciar a harmonia dos números e das figuras e reconhecer a sua presença na arte, na técnica e na vida.

Saber utilizar a Matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos.

Apreciar a geometria no mundo real e o reconhecer a utilização de ideias geométricas em diversas situações.

Realizar construções geométricas e reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a software geométrico.

Visualizar e o desenvolver um raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática.

Compreender os conceitos de comprimento e de perímetro, de áreas, volume e amplitude, assim como conseguir aplicar estes conceitos na resolução e formulação de problemas.

Estar predisposto para procurar e explorar padrões geométricos com gosto por investigar propriedades e relações geométricas.

Procurar e encontrar padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

Ser rigoroso no cálculo e no traçado geométrico.

Revelar sentido de estética nomeadamente através da composição geométrica de padrões e figuras, bem como na apreciação de elementos da natureza em que a Matemática está patente.

EXEMPLOS DE ACTIVIDADES PRÁTICAS

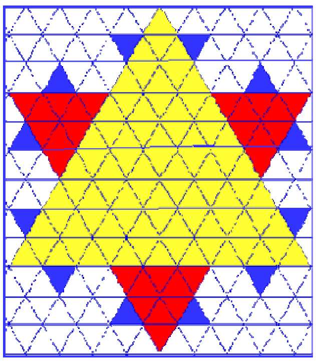
1ª Actividade:

Floco de Neve de Koch

Um país pequenino com uma fronteira enorme

Material necessário (em cartolinas de cores diferentes):

- 1 Triângulo equilátero de 27 cm de lado;
- 3 Triângulos equiláteros de 9 cm de lado;
- 12 Triângulos equiláteros de 3 cm de lado;
- 48 Triângulos equiláteros de 1 cm de lado.



1. Depois de colares as peças para obteres o teu floco de neve de Koch (um Fractal) completa o quadro seguinte com:

- O número de lados da figura que obténs de cada vez que juntas um novo conjunto de triângulos;
- O comprimento de cada um desses lados;
- O perímetro dessa figura.

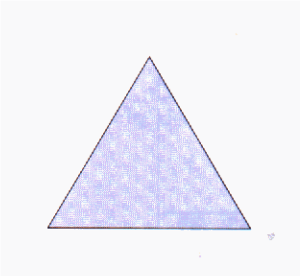
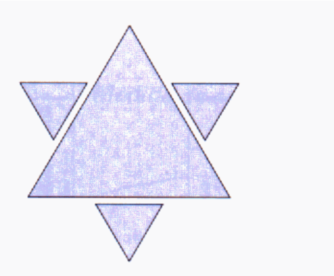
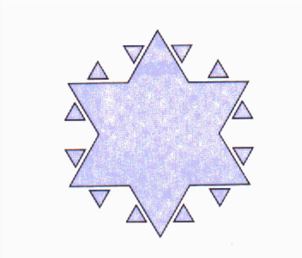




Figura 1 Figura 2 Figura 3

2. O que achas que acontece com o número de lados, o comprimento de cada um e o perímetro da figura, à medida que se for repetindo o processo?

3. Que parte da área do triângulo inicial é a área de cada triângulo de 9 cm? E cada triângulo de 3 cm? E de 1 cm?

	Nº de lados	Comprimento de um lado	Perímetro
Figura 1	3	27	81
Figura 2			
Figura 3			
Figura 4			

4. Preenche a tabela que seguidamente se apresenta, considerando que o triângulo da Figura1 representa a unidade de área.

5. O que vai acontecendo com a área de cada figura quando se acrescentam triângulos? Será que cresce para valores muito maiores do que o inicial? Porquê?

	Nº de triângulos acrescidos	Área de cada triângulo acrescido	**Área acrescida**	Área total da Figura
Figura 1	0	0	0	1
Figura 2				
Figura 3				
Figura 4				

6.Serás capaz de indicar uma figura cuja área esteja próxima da área da curva de Koch mas que, ainda assim, seja sempre maior, qualquer que seja a etapa de construção?

2º Actividade:

Construção de um Fractal numa Folha de Papel

Material:

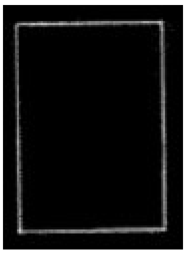
- Folha de papel A4;

- Tesoura;

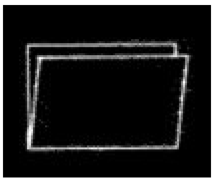
Instruções:

1. Meça o comprimento da folha (= **a**);
2. Meça a largura da folha (= **b**);
3. Dobre a folha de papel ao meio;
4. Faça 2 cortes de comprimento $\frac{a}{4}$ afastados de cada lado do papel $\frac{b}{4}$;
5. Dobre segundo o segmento criado pelos dois cortes;
6. Repita os passos 1 a 5, mas agora para a parte da folha que acabou de dobrar;
7. Continue este processo o máximo de vezes possíveis;
8. Dobre a folha A4 formando um ângulo recto;
9. Dobre a parte da folha obtida no passo 5, de modo a formar um ângulo recto com a dobra do passo 8;
10. Repita o passo 9 para as outras partes da folha.

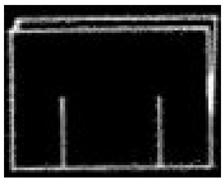
Passos 1 e 2



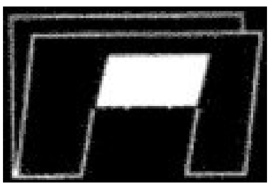
Passo 3



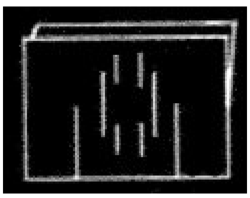
Passo 4



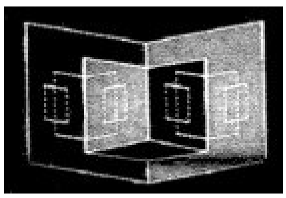
Passo 5



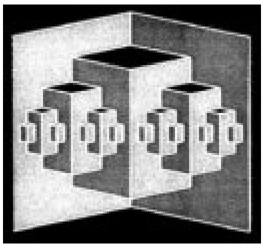
Passos 6 e 7



Passo 8



Passos 9 e 10



Questões:

1. Conte os elementos em cada iteração e faça uma tabela.

2. Identifique o padrão de crescimento e indique a sucessão que permite calcular o número de elementos para a n-ésima geração.

3. Qual a área total (isto é, depois de uma infinidade de dobras) da superfície dos elementos? (Sugestão: Escolha um valor conveniente para a área do primeiro elemento).

4. Investigue o que acontece, se fizer um corte diferente, alterar o tamanho do corte ou aumentar o número de cortes.

TEORIA DO CAOS

A imagem é mesmo artificial, e tudo o que se vê foi gerado com Fractais. Esta é uma óptima prova de que os Fractais e a Natureza têm um mesmo princípio, o CAOS.

" O Caos não tem estátua nem figura e não pode ser imaginado; é um espaço que só pode ser conhecido pelas coisas que nele existem e ele contém o universo infinito. "

Frances A. Yates

Na Mitologia grega, o Caos era considerado o estado não organizado, ou o nada, de onde todas as coisas surgiam. De acordo com a Teogonia de *Hesiold*, o Caos precedeu a origem, não só do mundo, mas também dos deuses. A cosmogonia de Orphic afirma que Chronos (personificação do tempo) deu a Ether e a Caos, este formou um enorme ovo de onde nasceu o Paraíso, a Terra e Eros.

Muitos fenómenos não podiam ser previstos por leis matemáticas. Os fenómenos ditos " caóticos " são aqueles onde não há previsibilidade. Por exemplo: o gotejar de uma torneira; nunca se sabe a frequência com que as gotas de água caem e não podemos determinar uma equação que possa descrevê-la. As variações climáticas e as oscilações da bolsa de valores também são caóticos.

Actualmente com o desenvolvimento da Matemática e das outras ciências, a Teoria do Caos surgiu com o objectivo de compreender e dar respostas às flutuações erráticas e irregulares que se encontram na Natureza, resíduos da formação primordial vinda do grande ovo de Caos.

A ciência do Caos é relativamente recente e é considerada a terceira grande revelação deste século nas ciências físicas.

A investigação do Caos teve início nos anos 60, quando se descobriu que sistemas complexos, que podiam descrever possíveis previsões do tempo, podiam ser traduzidos por equações matemáticas simples. Do mesmo modo, sistemas que eram aparentemente simples e modelos deterministas, podiam levar a problemas muito complexos.

Através do estudo desta ciência, verificou-se que um sistema passa facilmente de um estado de ordem para um estado caótico, podendo surgir, por vezes de ma maneira espontânea, dentro do Caos, a ordem.

Uma lei básica da Teoria do Caos afirma que a evolução de um sistema dinâmico depende crucialmente das suas condições iniciais. O comportamento do sistema dependerá então da sua situação " de início ". Se analisarmos o mesmo sistema, sob outras condições iniciais, logicamente ele assumirá outros caminhos e mostrar-se-á totalmente diferente do anterior. Sendo deste modo fortemente abalado o paradigma da física determinista.

Porém, compreendendo o sistema caótico, muitas vezes é possível entender como o sistema se comportará como um todo ao longo do tempo.

Esta ciência tem proporcionado algumas descobertas extraordinárias e levantado questões tão problemáticas que a tornam muito interessante e desafiante.

Depois de um árduo trabalho, matemáticos e físicos elaboraram teorias para explicar o Caos. Hoje sabe-se muito a respeito de fenómenos imprevisíveis, e já é possível ver os resultados. Por exemplo, em 1997, dois americanos conseguiram encontrar uma fórmula para prever aplicações financeiras e com isso ganharam o Prémio Nobel da Economia. O Caos tem pois aplicações em todas as áreas.

A Geometria Fractal está intimamente ligada à Teoria do Caos. São as estruturas quebradas, complexas, estranhas e belas desta geometria que conferem uma certa ordem ao Caos, e esta é muitas vezes caracterizada como sendo a linguagem do Caos.

A Geometria Fractal busca padrões organizados de comportamento dentro de um sistema aparentemente aleatório.

Exemplos de Caos na vida quotidiana:

- O João sai de casa às 9 horas para visitar a avó que vive a 30 Km. Ao sair de casa, fica preso no elevador, por falta de corrente, o que o faz demorar 5 minutos e perder o autocarro que passa de 10 em 10 minutos (passou às 9 horas e 4 minutos). Chega à estação, acabando por perder o comboio (só o viu ao fundo da linha), o próximo é daí a 2 horas.

  Esta relação é um bom exemplo de Caos: uma pequena alteração pode provocar uma diferença considerável, como no caso anterior. Mas também pode acontecer que uma alteração não origine uma diferença significativa como se pode ver na situação seguinte:

  Se o João tivesse saído de casa às 8 horas e 59 minutos, o elevador não tinha parado e teria chegado a horas a casa da avó.

  Mas a mais pequena alteração pode ter consequências imprevisíveis.

  Neste exemplo, saindo às 9 horas, apenas um minuto mais tarde, o João vai chegar a casa da avó 2 horas e 14 minutos mais tarde.

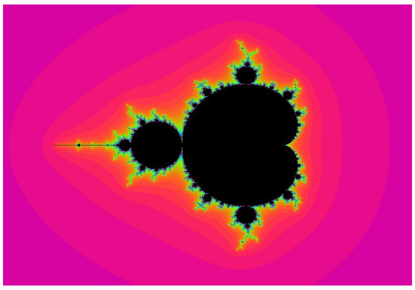
- Suponha que tem alguns berlindes e resolve atirá-los no chão. Ao fazer isso, observa que depois de algum tempo os berlindes param nas suas posições. Agora junte os berlindes e repita a experiência. Será que os berlindes se irão posicionar exactamente como na vez anterior? É esperado que não. Mesmo que tente atirá-los da mesma posição não conseguirá ter precisão suficiente para posicioná-los correctamente.

- O trânsito é outro exemplo. Já observou que há dias em que o congestionamento é maior. É bem provável que o transtorno tenha sido causado por um carro acidentado, ou uma empresa dispensou os seus funcionários mais cedo e houve um fluxo maior num cruzamento e outros azares semelhantes. Mesmo assim, o número de variáveis é grande e o comportamento do sistema depende muito das condições iniciais. Nunca se sabe quando o trânsito está bom ou mau.

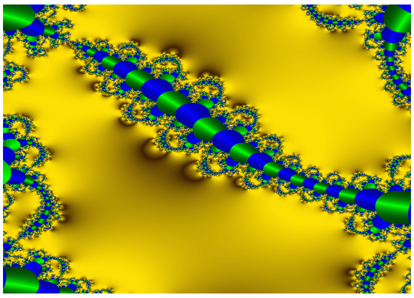
- Um exemplo tradicional é o " Efeito de Borboleta ", que diz essencialmente: " uma borboleta bate asas na China e causa um furacão na América ", por mais absurdo que pareça, é a realidade, os fenómenos climáticos são, de comportamento caótico e de difícil previsibilidade.

- O litoral e as ilhas têm diferentes formas. Umas são alongadas, outras circulares, diferem de tamanho, mas podem ser de formas análogas. São como Fractais, a sua formação deve-se a um conjunto de forças complexas que resultaram num formato padrão. Será que existem ilhas quadradas?

Como exemplos matemáticos muito populares podemos dar o **conjunto de Mandelbrot** e o **conjunto de Julia**, já referidos anteriormente.

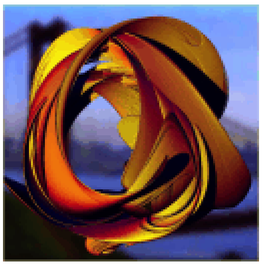
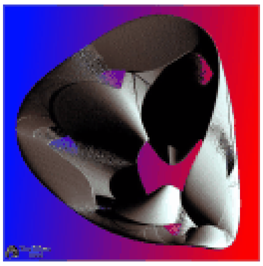


Conjunto de Mandelbrot



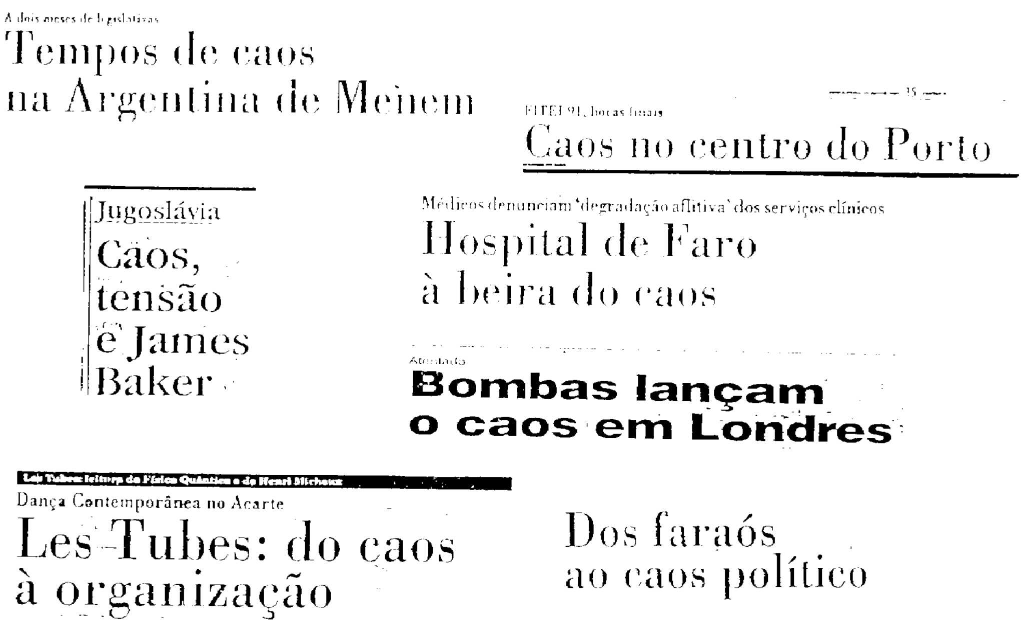
Conjunto de Julia

O Caos também está presente na Arte e as imagens que se seguem são exemplo disso mesmo.

O Caos está na moda e como tal a imprensa refere-se muito a ele, mas no sentido corrente no sentido científico.

Exemplos da utilização da palavra "Caos" pela imprensa:



A dois meses de legislativas
Tempos de caos na Argentina de Menem

FITEI 91, horas finais
Caos no centro do Porto

Jugoslávia
Caos, tensão e James Baker

Médicos denunciam 'degradação aflitiva' dos serviços clínicos
Hospital de Faro à beira do caos

Atentado
Bombas lançam o caos em Londres

Dança Contemporânea no Acarte
Les Tubes: do caos à organização

Dos faraós ao caos político

Outra relação existente entre a Geometria Fractal e o Teoria do Caos prende-se com o facto de ambas se terem desenvolvido e crescido graças ao desenvolvimento da informática. No entanto, embora a utilização de computadores seja indispensável, não podemos confiar cegamente nos computadores pois uma alteração mínima nas condições iniciais pode ser o suficiente para que o resultado sofra mudanças bastante significativas.

" O mundo que nos cerca é caótico mas podemos tentar limitá-lo no computador. A Geometria Fractal é uma imagem muito versátil que nos ajuda a lidar com os fenómenos caóticos e imprevisíveis. "

Benoît Mandelbrot

APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL

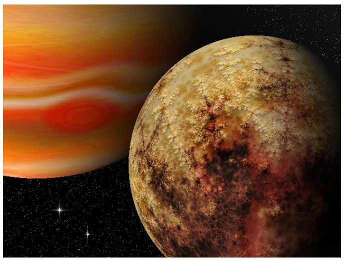
Apesar de bastante recentes, o Caos e os Fractais já se espalharam por quase todos os domínios da actividade humana e as suas aplicações parecem não ter limites.

O uso prático de Fractais, constitui uma maneira nova de encarar a realidade e também uma ferramenta científica de enorme alcance, aliada a larga disseminação de computadores Nos últimos 20 anos, a Geometria Fractal e seus conceitos têm se tornado uma ferramenta central em diversas áreas:

Na **Matemática**, a análise de dados caoticamente dispersos impulsionou a evolução do tratamento estatístico e da noção de probabilidade. Por outro lado, a Geometria Fractal aprofundou a ideia intuitiva de infinito.

Na **Física**, o conceito de Caos traz uma nova luz sobre a entropia, que mede também a complexidade de um sistema, e sobre os fundamentos da Mecânica Quântica, nomeadamente o Princípio de Incerteza de Heisenberg. Os físicos, inventaram novas figuras Fractais, a mais famosa dessas figuras é talvez a que resulta do processo conhecido por "Agregação Limitada por Difusão" que representa adequadamente numerosos processos físicos (cristalização, deposição electrolítica, mistura de fluidos com diferentes viscosidades). Os Fractais continuam a ser um campo fecundo de aplicação em Física.

Na **Astronomia**, sabe-se há muito que o Sistema Solar não «funciona com a precisão de um relógio suíço». Poincaré foi o primeiro a demonstrar a dificuldade em determinar órbitas de astros a longo prazo (como já foi referido). Recentemente, revelou-se que essas órbitas (no estudo realizado, da Terra e de Marte) têm uma evolução caótica, num intervalo de tempo da ordem das centenas de milhões de anos.



Na **Sismologia**, o estudo da distribuição caótica da localização e intensidade dos sismos tem contribuído para a cartografia de falhas sísmicas.

Na **Biologia**, o Caos está a ser usado para identificar processos evolutivos que permitem um novo entendimento do algoritmo genético, simulações realistas de formas de vida artificiais e uma nova abordagem da actividade cerebral.

Na **Ecologia** e biologia a Geometria Fractal é usada para tentar resolver problemas de dinâmica do transporte de energia em meios fluidos (hidrodinâmica). Os organismos vivos variam muito de tamanho, desde os seres microscópicos às baleias e há muito que os biólogos tentavam compreender a relação entre o tamanho e fisiologia e cada ser vivo.

Sabia-se, por resultados obtidos em diversas medições, que o ritmo metabólico é proporcional a uma potência de expoente $\frac{3}{4}$ da massa do organismo – quanto maior a criatura, mais lento é o seu metabolismo. E relações idênticas foram encontradas para o aumento da população de uma espécie, idade na primeira reprodução, duração do desenvolvimento do embrião, relacionados com potências da massa de expoentes $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$ respectivamente. O comum em todas estas relações e que parece ser válido para todos os organismos vivos dos mais diversos tamanhos, quer do reino animal como vegetal, é a potência de expoente $\frac{1}{4}$.

$$Y = \alpha M^{\frac{p}{4}}$$

E por muito tempo, este facto espantava os investigadores já que, tratando-se de corpos tridimensionais, seria muito mais lógico que aparecesse na potência o expoente 1/3.

Esta equipa analisou em termos geométricos e físicos os sistemas lineares de tubos que fazem a distribuição de recursos (oxigénio, alimento) e de desperdícios por todo o organismo e consideraram que tais sistemas teriam que ter três características:

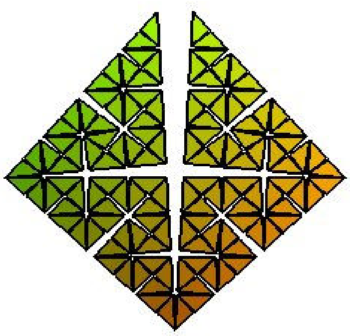
- A rede de distribuição tem que alcançar todos os pontos do corpo tridimensional,
- Deve requerer o mínimo de energia para transportar esses elementos num meio fluído,
- Os últimos "tubinhos" da rede (por exemplo os vasos capilares num sistema circulatório) terão que ter todos o mesmo tamanho já que as células em todos os seres vivos são, grosso modo, do mesmo tamanho.

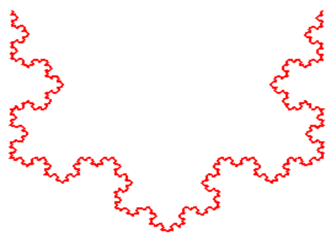
A resposta apareceu quando a equipa se apercebeu de que tal rede de distribuição era melhor caracterizada por um sistema de ramificação Fractal para preenchimento do espaço.

Com este sistema, ao qual foram acrescentando melhoramentos que vão tendo em conta alguns aspectos dinâmicos que foram inicialmente desprezados (como por exemplo a elasticidade dos vasos sanguíneos), conseguiram-se obter previsões que se aproximavam mais dos valores observados na prática e outras que teriam depois que ser, ou não, comprovadas.

Este método, por exemplo, prevê o grau de ramificação de um sistema circulatório: indica que uma baleia sendo 10^7 vezes mais pesada que um rato, apenas necessita de mais 70% de ramificações no seu sistema circulatório para poder abastecer todo seu organismo.

Na **Medicina**, reconhecem-se características Fractais em fenómenos cardíacos e pulmonares. Em que o Floco de Neve de Koch e a curva de Peano assemelham-se ao movimento dos pulmões.





Descobertas recentes indicam que o coração bate a um ritmo Fractal e que um batimento quase periódico é sintoma de insuficiência cardíaca.

No campo das **Ciências Humanas** e mesmo das **Ciências Policiais**, o Caos tem sido aplicado ao estudo do comportamento de multidões.

Na **Economia**, a análise das bolsas tem indicado que os valores das acções se comportam de forma aparentemente aleatória a curto prazo, mas que apresentam um certo padrão a médio e longo prazo. É de notar que, se olharmos para a evolução da bolsa no período de um mês, uma semana, um dia ou algumas horas, o gráfico não perde o seu detalhe, tal como um Fractal. Em 1997, dois americanos ganharam o Prémio Nobel da Economia, após terem encontrado uma fórmula que permite prever aplicações financeiras.

Na **Linguística**, a evolução dos dialectos tem sido estudada com base na Teoria do Caos.

Na **mineralogia** para medir a densidade dos minerais, a evolução de terrenos e a descontinuidade nas rochas.

OUTRAS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL

O comprimento da fronteira (ou da costa) de um país

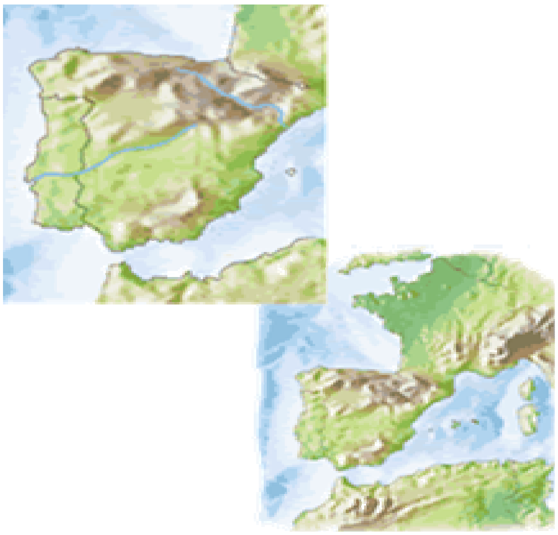
Da linha da costa de um país, apenas conhecemos sempre um valor aproximado, em geral calculado a partir de fotografias de satélite. Mas se as fotografias fossem tiradas duma avioneta, as irregularidades seriam mais visíveis e obteríamos um outro valor.

Se em vez de fotografia medíssemos directamente todas as saliências e reentrâncias, obteríamos um valor muito maior. Se, em seguida, tomássemos uma régua de 1 dm e repetíssemos a tarefa, obteríamos maior precisão nas medidas dos contornos rochosos e o comprimento final obtido seria ainda maior.

Podemos pensar por exemplo na linha definida pela costa do nosso país. Qual é o seu comprimento? Podemos até encontrar o seu comprimento nalgum livro mas a verdade é que não faz sentido falar no seu comprimento. O comprimento medido dependerá imenso da escala do mapa que utilizarmos. Num mapa com mais pormenor encontraremos mais reentrâncias e saliências e o valor do comprimento será maior.

É por isso também que o valor do comprimento da fronteira Portugal-Espanha é apresentado com valores muito diferentes nos livros portugueses e espanhóis, esta fronteira mede 985,6 km na enciclopédia espanhola citada por Mandelbrot, enquanto que na portuguesa mede 1.212,8 km. Além desse caso, há um outro.

Quem consultar, por exemplo, a enciclopédia Americana de 1958 vai encontrar a informação de que a costa da Inglaterra tem 7.440 km. Mas se procurar na Collier's Encyclopedia de 1986 vai achar outra informação: 8.00km!



Problema de escala

Causa de diferença de medida na fronteira de Portugal e Espanha

Esta discrepância deve em parte verificar-se porque os países mais pequenos (Portugal) medem geralmente as suas fronteiras com mais detalhe e precisão que o seu vizinho maior.

Da mesma forma que a Curva de Koch se assemelha a costa ou a fronteira de um país também a Ilha de Koch (Floco de Neve) assemelha-se a costa de uma de um ilha.

Aplicações de Fractais na Computação Gráfica e no Cinema

Uma das primeiras aplicações da Geometria Fractal foi na computação gráfica e no cinema.

Os Fractais são do interesse de *designers* gráficos e *film makers* pela sua habilidade de criar formas novas e mundos artificiais mais realistas.

Na Computação Gráfica, Fractais, entre outras coisas, são utilizados para representar elementos da Natureza como crateras, planetas, costas, superfícies lunares, plantas, ondulações em águas, representação de nuvens; também são de grande importância para a criação de efeitos especiais em filmes, como por exemplo a criação do planeta Gênesis no filme Jornada nas Estrelas 2.

A magia dos Fractais na Fotografia

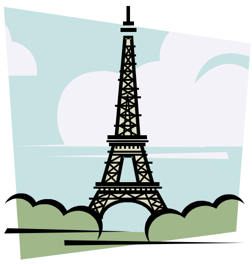
Tornar uma imagem digital maior, interpelando-a, isto é, ampliando-lhe a dimensão à custa da "clonagem" de pixéis, que tentam preencher as áreas vazias de informação socorrendo-se aos dados dos pixéis na vizinhança, é um erro, salvo quando não existe qualquer outra forma de obter o resultado pretendido.

Diversas câmaras fotográficas digitais usam o truque, como scaners, mas quem já experimentou sabe que os resultados são tudo menos brilhantes. Mas se esquecermos os pichéis e usarmos Fractais, os resultados são bem diferentes.

Em fotografia, a Geometria de Fractais permite criar imagens independentes da resolução, que podem ser ampliadas à dimensão pretendida, sem perda evidente de qualidade, para que possam ser usadas para imprimir fotografias em papel, em dimensões impensáveis.

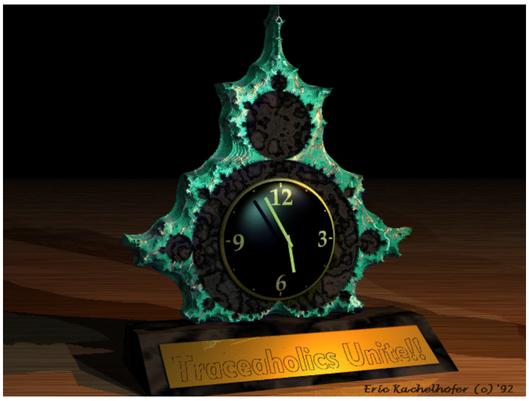
Os resultados obtidos são impressionantes, e sugerem que esta é uma ferramenta incontornável para quem faz fotografia digital, pura magia dos Fractais.

Um exemplo de Fractais na Arquitectura

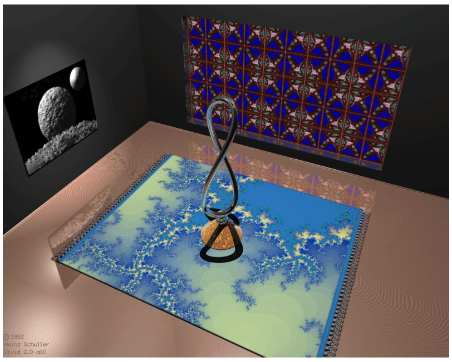


A **Torre Eiffel**, erigida sobre uma estrutura que se auto-reproduz em escala Fractal, de modo a combinar leveza e resistência, que compactam fractalmente uma superfície que estendida ocuparia uma área maior que uma quadra de ténis, é outro exemplo da peculiaridade e importância desta geometria.

OS FRACTAIS NA ARTE



Por último, os Fractais encontram também aplicações em arte. Desde cedo se reconheceu que a invariância de escala tinha implicações estéticas. Assim, surgiu a pintura Fractal, a escultura Fractal e a música Fractal.



Cada vez há mais pessoas que são tocadas pela estranha beleza dos Fractais e que, assim, procuram descobrir a matemática subjacente. Caberá aos professores de matemática promover e ajudar esse processo. Parafraseando Fernando Pessoa (ou melhor Álvaro de Campos), o tradutor português de "Objectos Fractais" não resistiu a escrever no seu prefácio:

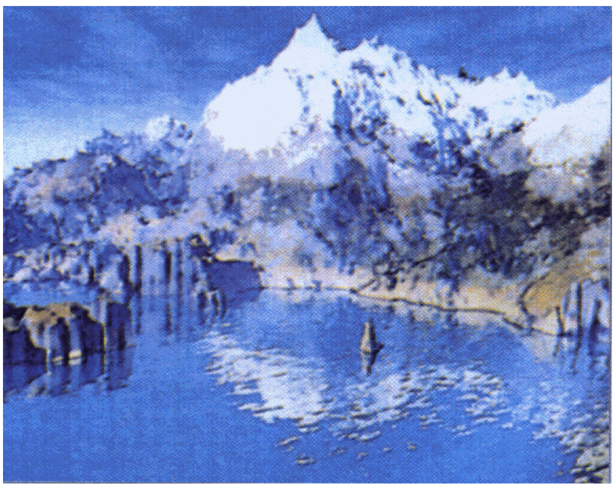
"O conjunto de Mandelbrot é tão belo como a Vénus de Milo.

E há cada vez mais gente a dar por isso."

Fernando Pessoa

Os Fractais na Pintura

Uma imagem obtida por técnicas Fractais pode parecer coisas estranhas: um vírus visto ao microscópio, paisagens de outro planeta, delírio de um pintor abstraccionista... Mas é sempre estranhamente bela.



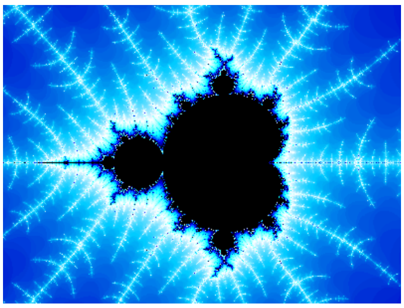
A Musica Fractal

A música Fractal, tal como os Fractais, é o resultado de um processo repetitivo no qual um algoritmo é aplicado múltiplas vezes para elaborar a sua anterior produção. Numa perspectiva mais ampla, todas as formas musicais, tanto a nível micro como a nível macro podem ser elaboradas por este processo.

Nos dias de hoje, os Fractais têm vindo a fornecer resultados extremamente interessantes, por isso cada vez mais se pesquisa em busca de novas músicas. De facto, a música Fractal tem vindo a ganhar entusiastas e apreciadores.

Existem vários métodos para converter imagens Fractais em música. No entanto, este processo só pode ser feito com recurso a algum do mais avançado software e de tecnologia informática.

De uma forma resumida, pode dizer-se que um dos principais Fractais e também aquele que é mais utilizado na criação de música Fractal é o **Conjunto de Mandelbrot.**



Como se consegue obter uma música a partir desta imagem aparentemente tão simples?

Sabemos, pelo que foi referido anteriormente só é possível "fabricar" música Fractal com o auxílio de um computador devidamente equipado com o software necessário. Mas, antes disso, será preciso passar a imagem do Fractal para o programa que se esteja a utilizar. Assim, este Fractal pode ter um pedaço dele transferido para um quadrado no computador denominado de "pixel". Geralmente, cada "pixel" tem cores separadas. Depois cada cor é transferida para uma nota numa escala musical. Usando estas cores como guias e procurando ao longo da imagem linha por linha, obtém-se uma *canção.*

Outro método é transferir notas baseadas na localização do "pixel" no visor do computador, na ordem pela qual o Fractal foi criado.

Estes são apenas dois dos métodos possíveis para a transformação de uma imagem Fractal em música Fractal, uma vez que existem muito mais processos. A melhor maneira para converter Fractais em música depende do Fractal que se está a converter, pois todos eles actuam de uma forma diferente.

Vendo as coisas deste ponto de vista, pode até parecer extremamente simples a produção de música Fractal; e se bem que é verdade que qualquer um de nós a poderia fazer com o auxílio de programa informático indicado, também não é menos verdade que tudo aquilo que está "por detrás" do programa ultrapassa em muito os conhecimentos de um mero curioso. Existe algo em comum em todos os programas que convertem o Fractal de Mandelbrot em música: todos eles se regem pelo mesmo processo iterativo que dá origem a este belíssimo Fractal.

A grande maioria da música Fractal gerada pelos modernos computadores se traduz numa melodia "bastante agradável" para os ouvidos humanos!

Mas para além de tudo isto, convém não esquecer uma coisa: um dia a música Fractal pode vir a ser usada frequentemente! Inclusivamente, existem já alguns músicos profissionais a usar música Fractal, como é exemplo a "New World Chaos", uma banda de música Fractal, ou a "Omar´s Basement", uma banda de jazz que em 1995 actuou na Austrália com uma música de 4 minutos em que a bateria, o baixo, a guitarra e o saxofone foram tocados por pessoas e o piano sintetizado foi tocado por um computador que tinha um programa Fractal. Portanto, quando menos se esperar, a música Fractal poderá ainda vir a desempenhar um papel na nossa sociedade igual ou até maior do que o do rock, do pop ou do jazz, entre outros estilos musicais.

Um dos compositores que mais se tem dedicado a este mundo maravilhoso é Phil Thompson, hoje o mais conceituado autor de música Fractal.

Este estilo de música desperta diferentes reacções, determinadas pessoas adoram este tipo de música, outras acham-na melódica, outros ainda, acham-na óptima para a mente, muito semelhante ao trabalho de Mozart, a nossa mente é mantida sempre a pensar e a adivinhar o que se seguirá. Convém salientar que, outros detestam esta música, acham que esta possui falta de originalidade e de criatividade.

É necessário deixar aqui um aviso: nunca se deve ouvir música Fractal durante longos períodos de tempo. Foi descoberto e está provado que pode hipnotizar quem o faça e pode mesmo fazer com que a nossa mente ande à "deriva" numa imagem Fractal, o que pode causar sérios danos ou pode mesmo ser fatal.

Curiosidades de aplicações de imagens Fractais

Selos e carimbos de correio com imagens de Fractais.

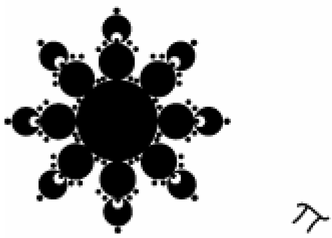
A imagem do conjunto de Mandelbrot como a de outros Fractais aparecem na capa de vários outros livros, além de "Objectos Fractais" e de revistas, dado o seu forte apelo visual.

Também é possível encontrar imagens Fractais em **selos** e **carimbos** de correio, como os que foram emitidos na Suécia em 2000 com os flocos de neve de Von koch, em Espanha em 2001 (onde curiosamente um Fractal aparece como ilustração de fundo de um selo alusivo à campanha internacional contra a violência doméstica), dois selos emitidos em 1997 em Israel onde está representado o Conjunto de Júlia e carimbo utilizado no Brasil durante uma semana em 95 para a comemoração dos 25 anos do Instituto de Matemática e Estatística onde aparecem imagens de três

Fractais: o floco de neve de Von koch, o triângulo de Sierpinsky e a esponja de Menger.

Os Fractais em fenómenos estranhos

WiltShire – Inglaterra – 1 de setembro de 1997

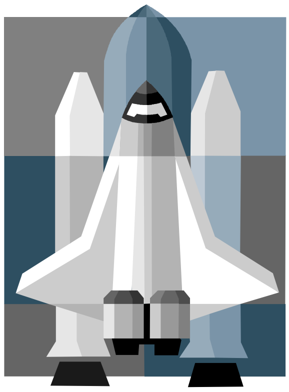


HampShire – Inglaterra – 13 de Agosto de 2000

Estas imagens acima aparecem ao acaso em plantações de trigo e cana-de-açúcar, quem as faz, ou são pessoas perfeitas, ou são seres de outros mundos, uma vez que o fenómeno esteja ligado à ciência da ufologia.

AVENTURA FRACTAL

Você está prestes a mergulhar num mundo onde os limites estão longe de ser conhecidos.



Os seus olhos não encontram nenhuma luz, enquanto está à frente do comando da Chaos (Chaos é uma poderosa nave espacial).

Ainda assim, insiste que num universo tão vasto seja possível encontrar alguma forma, qualquer coisa que anime os seus olhos cansados de percorrer a escuridão da nossa Galáxia.

ESPERE!

O impossível acontece... O som do silêncio negro é quebrado por um ruído no painel de controlo da Chaos.

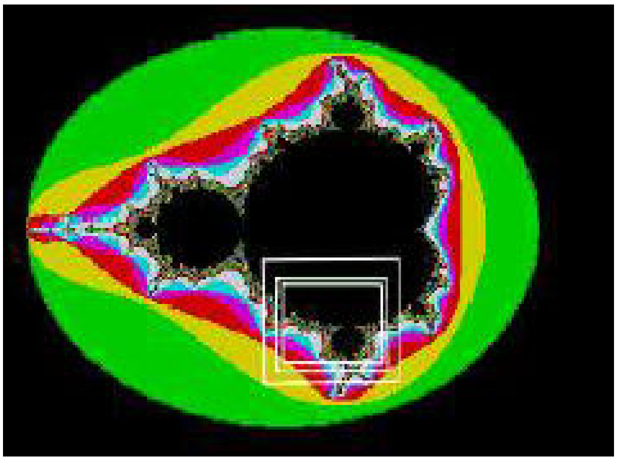
O medo e a excitação tomam conta do sangue que corre na veia de todos estes homens e mulheres, que estão sobre o seu comando.

Eles esperam a sua resposta!

E com uma resposta forte de capitão:

– Redireccionar propulsores! Apontar sonda para o quadrante de onde vem o sinal! Preparar radar e infra-vermelho! O que temos na tela, Tenente?

– Impossível descrever! Veja você mesmo.



Aquilo era algo longe das suas expectativas.

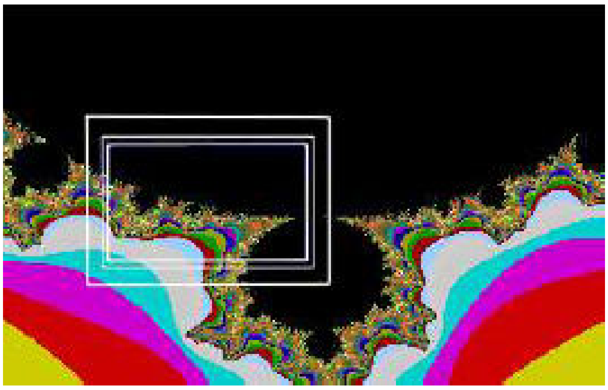
Tão familiar, no entanto nunca o tinha visto. Que planeta era este que escondia tal paradoxo.

Uma mistura de estranheza e beleza.

A única maneira de descobrir era fazendo uma aproximação.

— Tenente, quero um zoom naquele quadrante que se assemelha a uma bela enseada!

— Já está na tela, capitão!

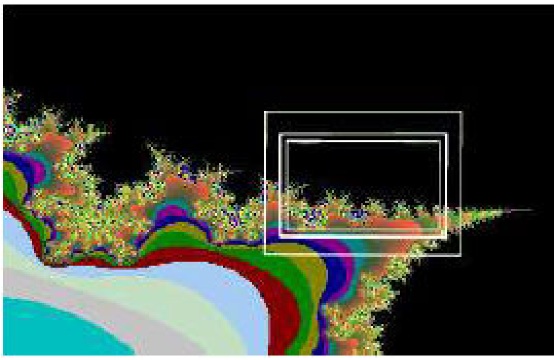


— Incrível! Parece que o planeta escondia dentro ainda mais complexidade.

— A impressão de estar a olhar para o infinito era o que se aproximava mais da descrição daquele momento.

— Uma vontade irresistível de prosseguir dominou toda a Tripulação.

— E o capitão ordenou uma nova aproximação.

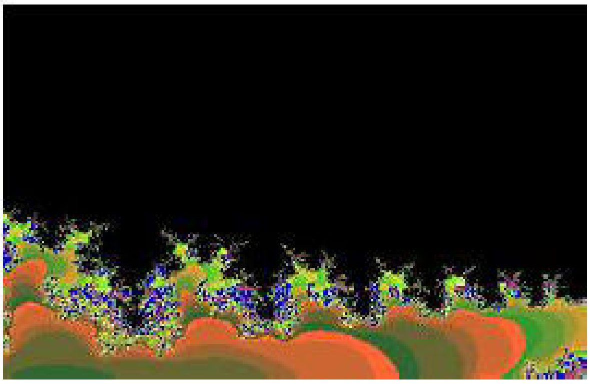


Com certeza estavam diante de uma nova dimensão. Não de formas, mas de percepção da realidade.

— Tenente, chegue um pouco mais perto!

— Capitão, acredito que já estamos perto demais.

— Do que tem medo? Faça o que eu digo!



Subitamente aquele minúsculo ponto adentrando as formas do Caos desapareceu

Um silêncio gelado se fez neste canto do universo.

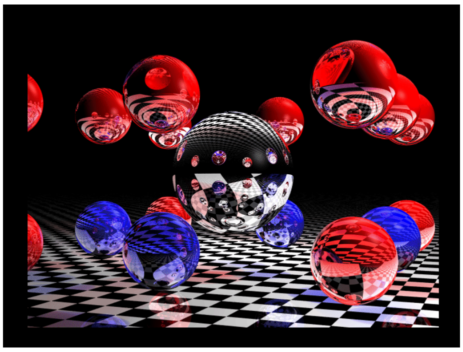
Existia somente uma esperança...

A de que se olhássemos bem fundo no interior daquele planeta um dia iríamos encontrar a resposta.

CONCLUSÃO

"A Arte é uma mentira que nos permite reconhecer a verdade"

Pablo Picasso



As figuras Fractais geradas pelos métodos descritos (e muitos outros existem!) podem ser classificadas de extremamente belas, embora isso seja uma opção estética e portanto pessoal. Contudo, não é o facto de haver arte nos desenhos dos Fractais que é importante (assunto relativamente ao qual a opinião de artistas e cientistas pode ser diferente), mas sim o facto de os Fractais mostrarem que também os sistemas complexos são passíveis de um estudo sistemático, que até o Caos tem as suas regras. Os matemáticos e os físicos já não estão limitados ao estudo de sistemas simples e lineares: têm diante de si o mundo real, bem mais complexo e fascinante.

O trabalho foi, antes de mais muito gratificante para nós, porque nos levou a descobrir um tema do qual tínhamos apenas uma noção muito vaga (e julgamos que muito vaga continua, comparando com o que ainda tínhamos para aprender). À medida que fomos compreendendo os vários conceitos nele envolvidos, fomos sendo capazes de os sintetizar e de os apresentar de forma ordenada, a curiosidade sobre os Fractais cresceu amplamente. Para isso também muito contribuiu o constatar que a Geometria Fractal está patente em tantos lugares (sobretudo em objectos e em seres naturais) e que formas tão complexas e por vezes tão bonitas podem ser criadas, ou simuladas, por processos matemáticos muito simples.

Outra surpresa para nós, foi a grande aplicabilidade do estudo dos Fractais, nomeadamente dos conceitos de estrutura e de dimensão Fractal a um campo tão vasto de áreas, desde as ciências naturais às económico-sociais e à tecnologia.

A sensação de termos pegado na ponta de uma enorme meada de fio enrolado, mas não muito emaranhado, porque afinal tudo a pouco e pouco vai fazendo sentido, é agradável e ao mesmo tempo inquietante. É estimulante pensar que neste processo, por detrás de cada porta que se abre e de cada conceito que se entende está um mundo de aplicabilidades do mesmo e de outros conceitos e ideias correlacionados. E assim, cada porta que se abre leva a outras que se abrem para outras, e ainda mais outras... tal e qual como no processo de criação de uma estrutura Fractal – sempre igual, sem nunca acabar e tornando o todo cada vez mais complexo e mais bonito.

Vale a pena continuar a estudar o conceito de Fractal, as suas aplicabilidades e a formalizar meios de apresentar esta ideia matemática aos alunos.

BIBLIOGRAFIA

Mandelbrot, Benoit B., "Objectos Fractais", Gradiva, 1998

Peitgen and H. Richter, "The Beauty of Fractals", Excursions in modern mathemathics, 2001

http://atelier.uarte.rcts.pt/assistent/magdag/pagina2.asp
plato.stanford.cdu/entries/russel/
pwp.netcabo.pt/naturasofia/ciencia2.htm
www.br.gov.br/batebyte/edicoes/1998/bb73/frac.htm
www.cienciaonline.org/revista/02-05/antigo-especial/
www.cin.ufpe.br
www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fractais.htm
www.fortunity.com/tatooine/servalon/272/galileu.htm
www.fractais.net/
www.ime.verj.br/~projerio/monografia/1999/introducao.html
www.Isi.usp.br/usp/rod/images/fractal/fractal-complex.html
www.josecn.hpg.ig.com.br/alammoore2-htm
www.mathcurve.com/fractals/fractales.shtml
www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexm21.html
www.proarte.pro.br
www.renascimento.com.br.galeria.htm
www.terravista.pt/BaiaGatas/1243/Index.htm
www.terravista.pt/mussulo/1362/softfract.htm
www.vol.com.br/folha/educacao/ult305u964.shtml

Trabalho realizado por:

Ana Isabel Resende
Catarina Neves
Sandra Castanheira