Departamento de Matemática

FCTUC

TEORIA DA PARTILHA EQUILIBRADA

Trabalho realizado por:

Ana Isabel Cebola

Inês Silva

Liliana Nogueira

Raquel Santos

Coimbra, 18 de Novembro de 2003

Índice

Introdução

Será que uma partilha pode ser equilibrada e, por conseguinte, justa? A resposta a esta questão parece aparentemente fácil, mas breve nos surge à memória situações controversas de partilhas de heranças, de divisão de trabalho em empresas,... A própria complexidade do tema da partilha equilibrada estende-se à bibliografia extensa e variada que pesquisámos a este propósito, testemunhando que nem todas as partilhas reúnem consenso. De facto, os diferentes métodos abordados nos três casos por nós estudados – contínuo, discreto e misto – comprovam as fragilidades inerentes a cada partilha.

Para dar resposta à questão central do nosso trabalho, descrevemos estes diferentes métodos, equacionando os seus aspectos positivos e negativos. Da análise dos métodos descritos, tecemos algumas considerações que registámos na conclusão deste trabalho.

1.Caso contínuo

Estamos perante o Caso Contínuo quando o objecto em causa pode ser dividido em partes, como por exemplo o tempo, a terra, o dinheiro, a areia, um bolo ou uma piza.

Os métodos existentes neste caso são todos métodos de partilha justa.

1.1.Métodos de partilha justa

No geral, um problema de divisão justa consiste em n indivíduos, chamados jogadores, a quem nós fazemos corresponder os números 1, 2, …, i, …, n-1, n. Eles devem dividir um conjunto S de ganhos (ou perdas) em n partes distintas S_1, S_2, …, S_i, …, S_{n-1}, S_n. O objectivo é encontrar subconjuntos S_i tais que cada pessoa i considere a sua parte recebida (S_i) justa no seu sistema de valores pessoal.

Ou seja, o que é realmente importante para determinar se uma partilha é equilibrada ou não, é o facto de cada jogador considerar a sua parte justa.

O Método do Divisor Selector, o Método do Divisor Único, o Método do Selector Único, o Método do Último a Diminuir e o Método da Faca Deslizante são os vários métodos de partilha justa analisados neste trabalho.

1.1.1. Método do Divisor Selector

Este Método é dos métodos de partilha mais simples de usar para dois elementos. Esta técnica para dividir um objecto S de uma maneira justa entre dois jogadores 1 e 2 é vulgarmente conhecida por “um corta, o outro escolhe”:

Os passos deste Método…

Suponhamos que temos um conjunto S (divisível) para repartir por dois indivíduos. Lança-se uma moeda ao ar para decidir qual deles será o cortador. Este é designado por jogador 1 e tem como função dividir o conjunto S em duas partes de igual valor, S_1 e S_2. O outro indivíduo, o jogador 2 tem de escolher uma das peças, S_1 ou S_2. O jogador 1 fica então com a parte não escolhida pelo jogador 2.

No final deste processo, ambos obtêm uma parte que para eles equivale a pelo menos metade do valor total do conjunto S. Já que o cortador efectua a sua divisão de forma a que as duas porções lhe interessem e o outro jogador teve a oportunidade de escolher a sua porção preferida.

Este Método pode também funcionar para potências de base 2.

Exemplo:

Duas amigas, a Rita e a Sofia querem dividir um bolo de chocolate e amêndoa.

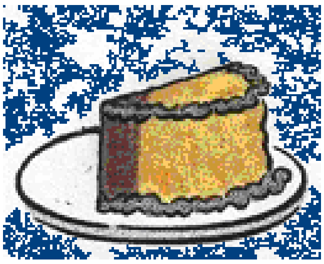
Sabemos que a Rita não tem qualquer preferência entre os sabores, e por isso cada uma das metades para ela vale 50% do bolo, enquanto que a Sofia prefere a amêndoa ao chocolate, e portanto para ela a metade de amêndoa vale 80% do bolo e a de chocolate vale apenas 20%.

Rita

Sofia

Contudo, nem uma nem outra conhece as preferências da outra. Após o lançamento da moeda ao ar, coube à Rita o papel de cortador. O seu corte é feito de modo a que as duas porções tenham igual valor. E então a Rita fez o seguinte corte:

Como era a Sofia a escolher ela optou pela parte que tinha mais amêndoa, devido à sua preferência.



Notemos que se fosse a Sofia a cortar, provavelmente, a divisão não seria a mesma. Pois se a Sofia fizesse a mesma divisão que a Rita sujeitava-se a ficar com uma metade quase só com chocolate, pois a Rita como não tem preferências podia fizer a mesma escolha da Sofia neste exemplo.

É ainda de salientar, como vimos neste exemplo, que não importa o tamanho das parcelas mas sim o valor de cada uma para quem as recebe.

1.1.2.Método do Divisor Único

Este método é uma extensão do Método de Divisor-Selector que pode ser usado para resolver problemas de partilha, envolvendo três ou mais elementos. No entanto, por uma questão de facilidade de exposição e compreensão, iremos abordar este método para o caso de três indivíduos.

Neste caso, um dos indivíduos será o divisor do bem a partilhar e os outros dois serão os selectores.

As etapas deste Método…

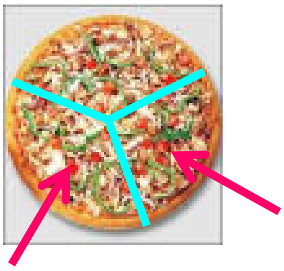
Para ilustrar o método, suponhamos que o bem a dividir é uma piza.

Na primeira etapa deste método, chamada de **divisão**, o divisor, escolhido aleatoriamente, corta a piza em três partes. A divisão desta apenas será racional se cada parte tiver igual valor para o divisor, pois caso contrário, como não sabe a parte com que vai ficar, arriscava-se a ficar com uma parte de menor valor. Suponhamos então que o divisor cortaria a piza da seguinte maneira:

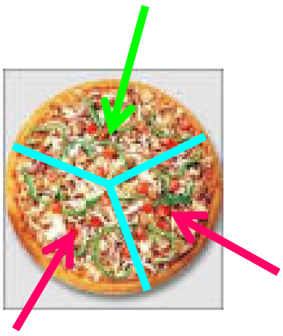
Na segunda etapa deste método decorrem as **declarações**, isto é, cada um dos selectores declara todas as partes da piza que considera aceitáveis.

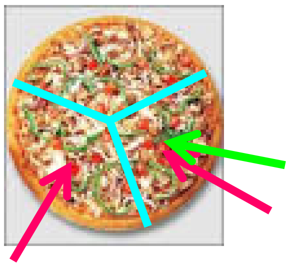
A etapa da **distribuição**, terceira e última etapa, depende da etapa anterior e podem ocorrer três casos:

O primeiro caso ocorre quando um dos selectores declara mais do que uma parte como aceitável. Suponhamos então que o selector 1 declara como aceitáveis as duas fatias indicadas na figura:

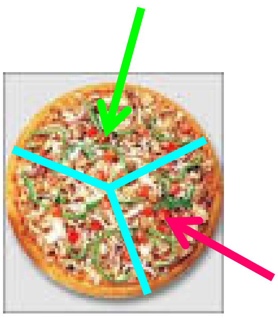


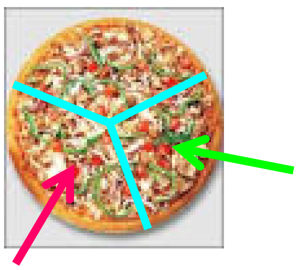
Qualquer que seja a declaração do outro selector, este ficará com a parte que considera aceitável receber. Ou seja, o selector 2 recebe a parte que escolheu, indicada na figura:



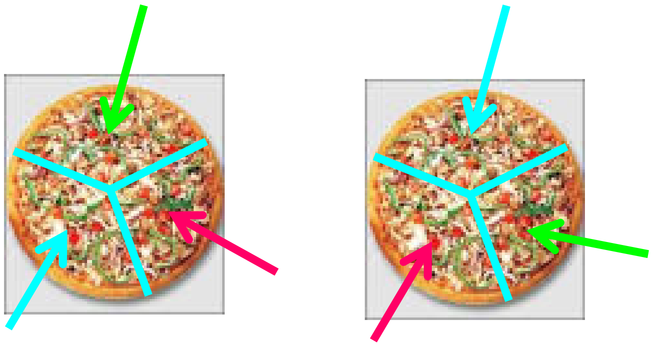


O selector 1 vai ficar com uma das partes que declarou como aceitável. No caso de o selector 2 ter escolhido uma das partes não escolhida pelo selector 1, este vai ter que optar por uma dessas partes (figura da esquerda em baixo). No caso de o selector 2 declarar uma das partes declarada pelo selector 1, este fica com a outra fatia que declarou (figura da direita em baixo).

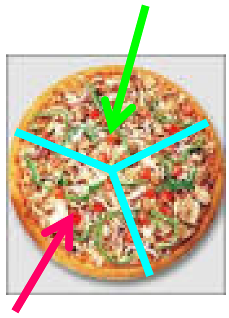




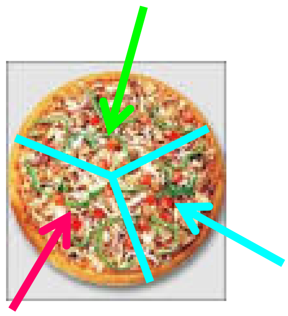
Depois de ambos os selectores receberem a sua fatia, o divisor fica com a parte que sobrou:



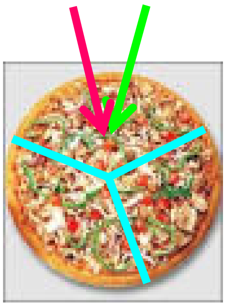
O segundo caso acontece quando os dois selectores declaram como aceitável apenas uma parte distinta:



Neste caso, cada selector fica com a parte que escolheu e o divisor fica com a restante:



No terceiro caso, ambos os selectores declaram a mesma parte. Suponhamos que no nosso exemplo, ambos os selectores declaravam como aceitável a parte indicada na figura:



Neste caso o divisor vai escolher uma das partes não escolhidas pelos selectores e estes vão utilizar o Método do Divisor-Selector para dividirem o resto da piza:

1.1.3.Método do Selector Único

Este método também pode ser aplicado a três ou mais indivíduos, mas uma vez mais vamos expô-lo apenas para três elementos. Nesta situação dois dos indivíduos serão divisores e o outro será o selector.

Como se processa este método?

Suponhamos que o objecto a dividir é um bolo. Este método aplica-se em três passos:

No passo um, chamado de **primeira divisão,** os dois divisores cortam o bolo pelo Método do Divisor-Selector.

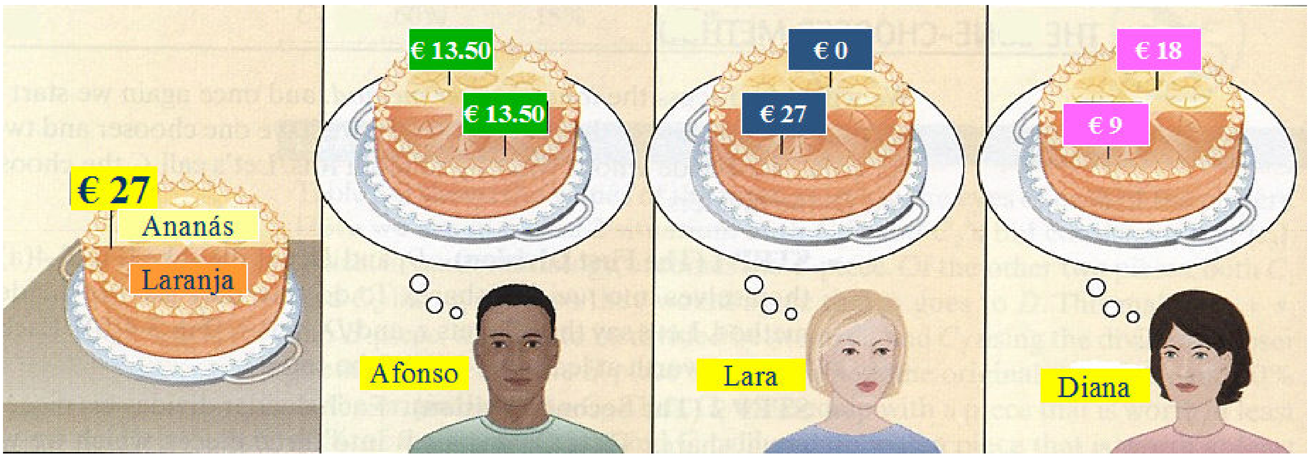
O segundo passo, com o nome de **segunda divisão**, consiste na divisão, por parte dos divisores, da sua respectiva parte em três porções consideradas de igual valor.

Na **selecção**, passo três, o selector escolhe uma parte de cada um dos divisores e cada divisor fica com o que restou da sua parte.

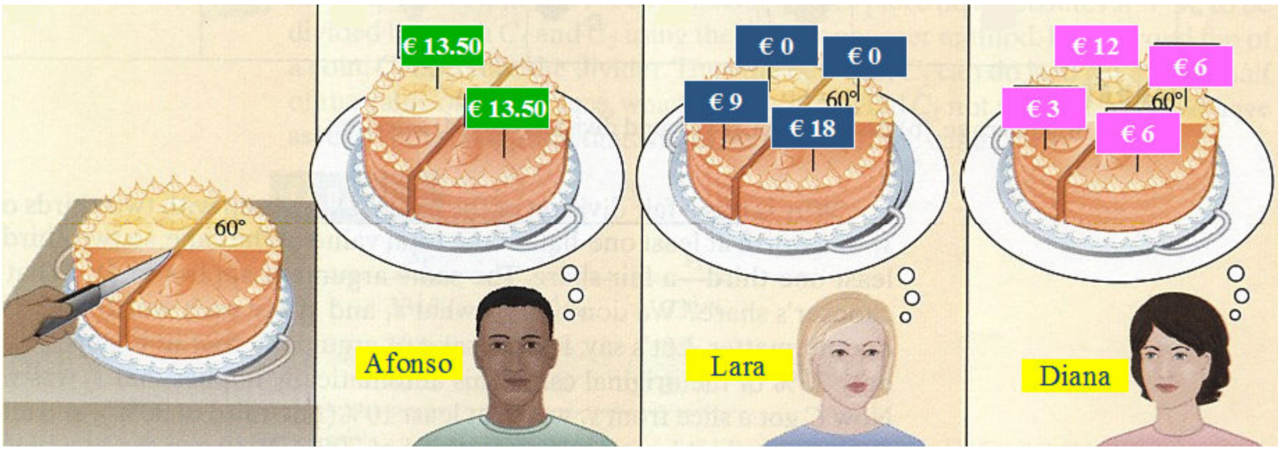
Exemplo:

Suponhamos que o Afonso, a Lara e a Diana querem dividir um bolo de laranja e ananás que custou 27€.

O Afonso não tem qualquer preferência de sabores, por isso ambas as metades para ele têm o mesmo valor (13.5€). A Lara detesta ananás, logo essa metade para ela não tem qualquer valor (0€), enquanto que a metade que tem laranja para ela vale a totalidade do bolo (27€). A Diana prefere duas vezes mais ananás do que laranja, portanto a metade que tem ananás vale, para ela, 18€ e a parte que tem laranja vale 9€.



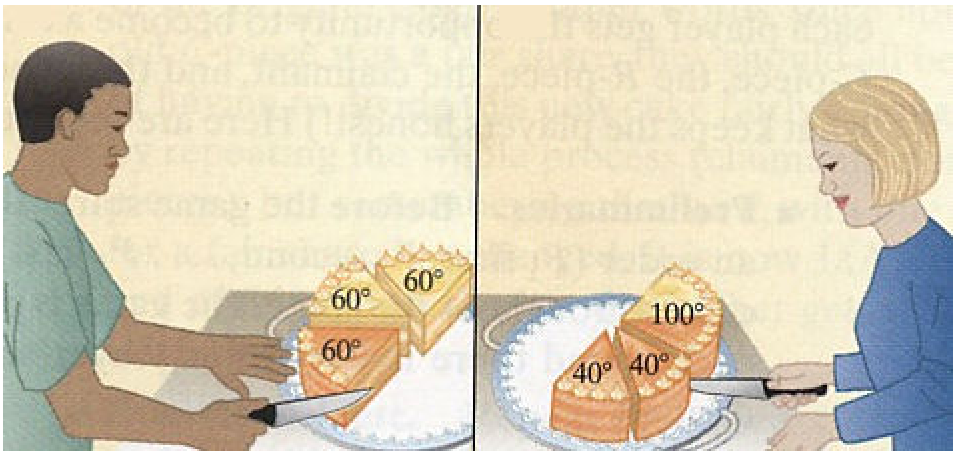
Por sorteio, vai ser a Diana a selectora e o Afonso e a Lara vão ser os divisores. Como o Afonso não tem qualquer preferência, vai ser ele o primeiro a dividir. Suponhamos que ele faz o seguinte corte:



Para o Afonso ambas as partes continuam a ter o mesmo valor. Para a Lara as porções que possuem ananás continuam a valer 0€. Para a Diana as porções que têm laranja continuam a valer o dobro das que possuem ananás.

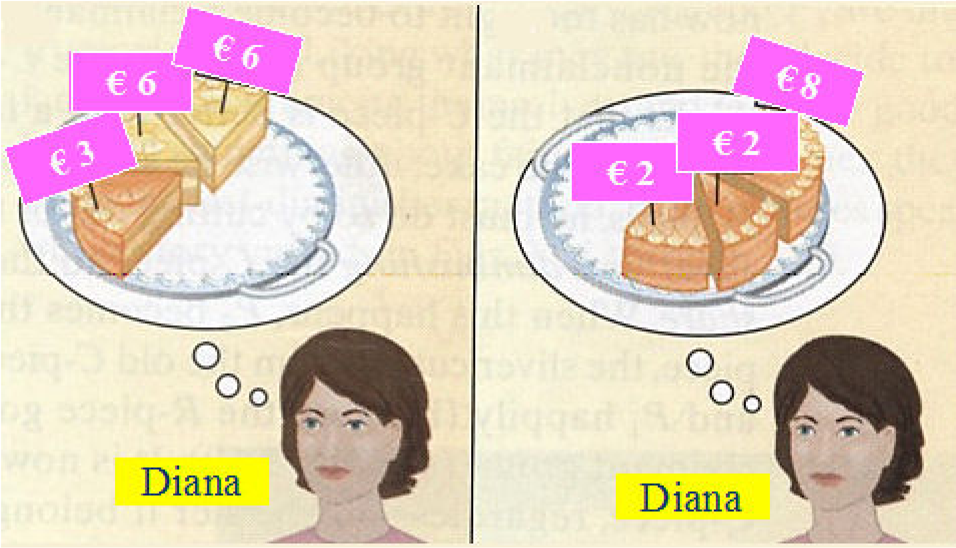
A Lara, a outra divisora, é encarregue de escolher uma das partes para dividir. Como ela não gosta de ananás, escolhe dividir a parte do bolo com mais laranja.

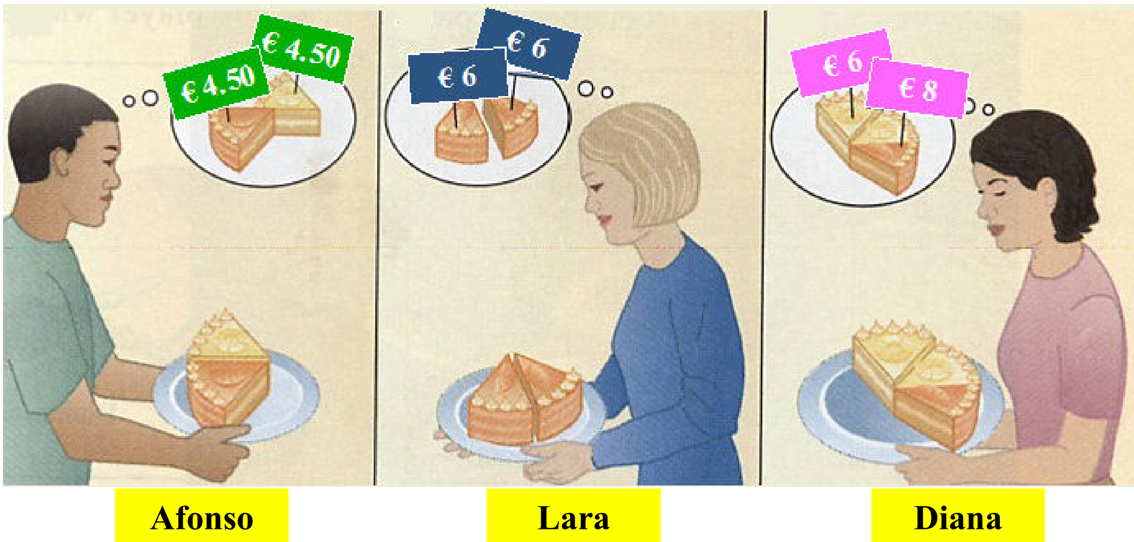
Cada um dos divisores corta agora a sua parte em três porções que considere igualmente valiosas.



Afonso **Lara**

A Diana escolhe, retirando uma parte a cada um dos outros dois. É obvio que esta escolhe as partes que para ela são mais valiosas.





No final da divisão cada um deles obtém uma parte que equivale a pelo menos 1/3 do valor total do bolo (9€).

Conclusão: O que é importante neste método é o valor e não o tamanho de cada parcela, para quem a recebe.

1.1.4.Método do Último a Diminuir

Este é talvez o método mais vantajoso para efectuar partilhas por um número de jogadores arbitrariamente grande (superior a três), uma vez que é mais ordenado que os até agora referidos e permite assegurar a honestidade de cada jogador.

No caso de participarem apenas duas pessoas, este método coincide com o método do divisor selector.

Este método consiste em dividir um objecto divisível onde todos os jogadores são simultaneamente divisores e selectores. Antes de efectuar a divisão, estipula-se a ordem dos cortadores que manter-se-á até ao final da divisão.

Este método começa quando o primeiro cortador faz um corte que para si é uma parte do bem que, na sua opinião, equivale a $1/N$ do valor total, em que N é o número total de jogadores. De seguida, os outros jogadores avaliam, um a um e pela ordem estipulada, se esta escolha é justa ou não.

Os jogadores que pensarem que aquela parcela vale no máximo $1/N$ da totalidade do valor ficarão isentos de qualquer mudança, mas os que pensarem que a parcela representa mais que $1/N$ do valor total têm permissão para a cortarem, cada um na sua vez, passando a serem os titulares dessa parcela.

Quando a primeira parcela é atribuída a um jogador sem que os outros discordem, o processo repete-se, mas agora envolvendo a partilha do restante bem por $N-1$ indivíduos.

Na penúltima ronda, restam dois indivíduos para uma parcela (que valerá $2/N$ da totalidade), nesta situação será usado o método divisor selector como foi referido em cima.

Este método é muito utilizado para dividir, por exemplo, terrenos ou bolos por um número considerável de indivíduos.

Exemplo:

Vejamos como este método funciona para três amigos, o Luís, a Sara e a Vera, que querem dividir um bolo de ananás, em que a ordem de corte é Luís – Sara – Vera. Iremos analisar os vários casos que podem acontecer.

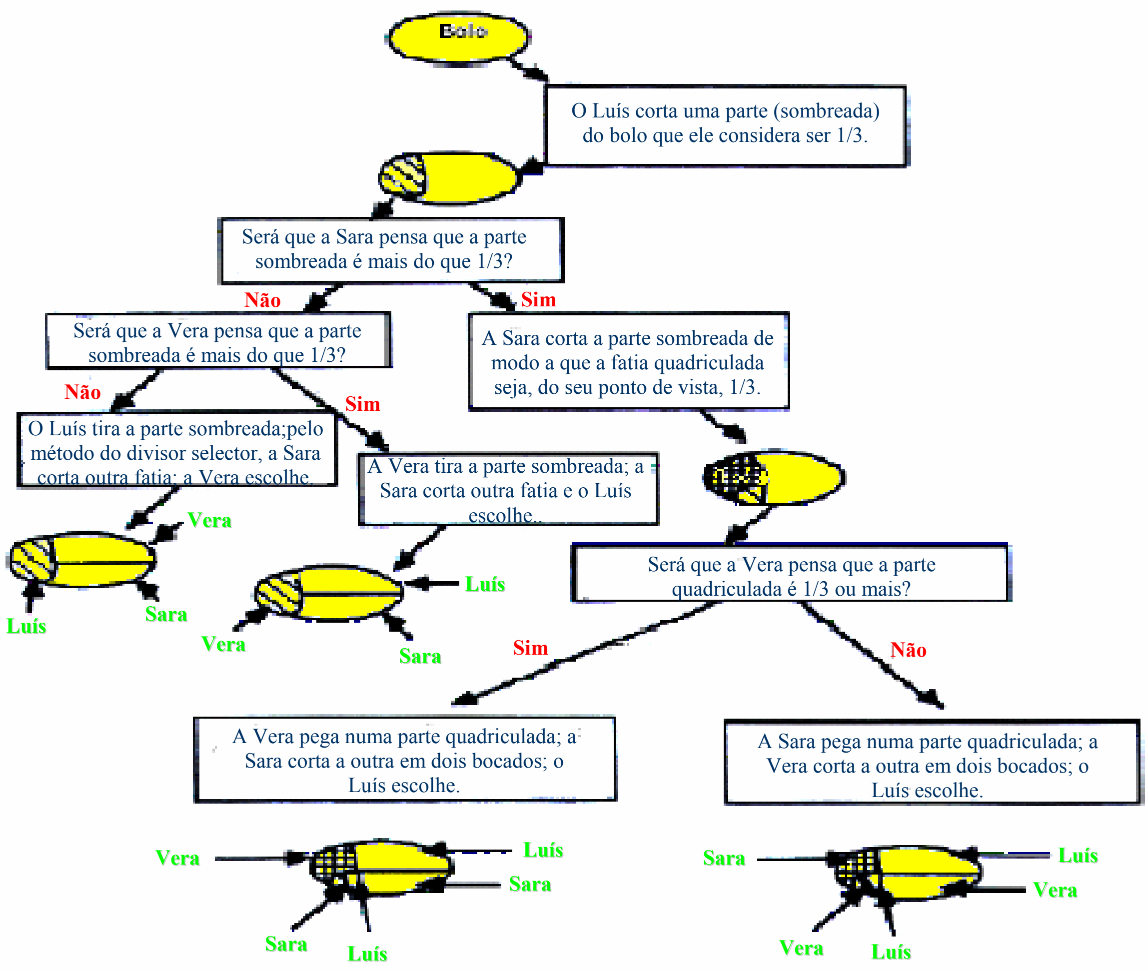
O Luís, sendo o primeiro cortador, corta a porção do bolo que para ele é 1/3 do bolo.

A Sara, como segunda cortadora, avalia a parcela cortada pelo Luís. Se para ela esta parte for inferior ou igual a 1/3, não faz nenhuma alteração e segue-se a vez da Vera a avaliar. Se a Vera a considerar com valor menor ou igual a 1/3 da totalidade do bolo, o Luís apodera-se dessa porção de bolo e através do método do divisor selector divide-se a restante porção do bolo pela Sara e pela Vera.

Se pelo contrário, a Vera considerar mais de 1/3 a parte do bolo cortada pelo Luís, esta fica com esse pedaço e a restante porção do bolo é dividida pelo Luís e pela Sara, sendo a Sara a cortadora, respeitando, assim, a ordem inicialmente estipulada.

Suponhamos agora que a Sara avalia a porção do bolo que o Luís cortou como sendo mais de 1/3. Então corta essa parte de modo a obter uma fatia que seja, do seu ponto de vista, 1/3 uma vez que é a segunda cortadora. Agora a Vera avalia essa fatia. Se ela achar que é menos que 1/3 esta é atribuída à Sara e, pelo método do divisor selector, a Vera, terceira cortadora, corta cada uma das restantes partes e o Luís escolhe uma de cada. Se a Vera avaliar a fatia num terço ou mais, pega nessa parte; a Sara corta as restantes em dois bocados cada e o Luís escolhe uma de cada.

Para perceber melhor esta explicação, segue-se um diagrama que exemplifica os vários casos que podem ocorrer neste exemplo.



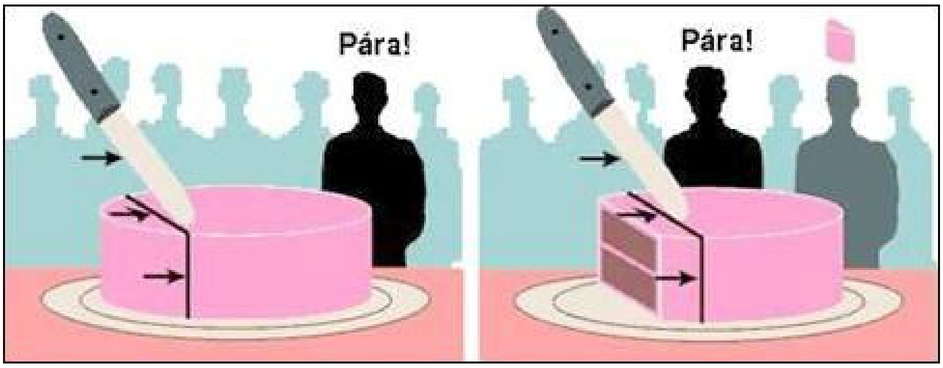
1.1.5.Método da Faca Deslizante

O método da faca deslizante pode ser utilizado para dividir um bolo por um número qualquer de pessoas.

Neste método, alguém que não quer nenhuma fatia de bolo move a faca contínua e lentamente sobre a porção do bolo. Qualquer uma das pessoas pode dizer "pára" a qualquer momento. Quando isto acontece, o bolo é cortado e essa fatia pertence à pessoa que disse "pára".

As outras pessoas repetem o processo com a restante porção de bolo.

A figura seguinte ilustra um pouco como este método funciona.



2.Caso discreto

Neste caso, os objectos não podem ser divididos em partes arbitrariamente pequenas de nenhuma maneira.

Podemos ainda subdividi-lo em dois subcasos. Num dividem-se objectos, como por exemplo casas, carros, cd's, chocolates,... No outro, distribuem-se pessoas, como por exemplo distribuição de lugares numa assembleia.

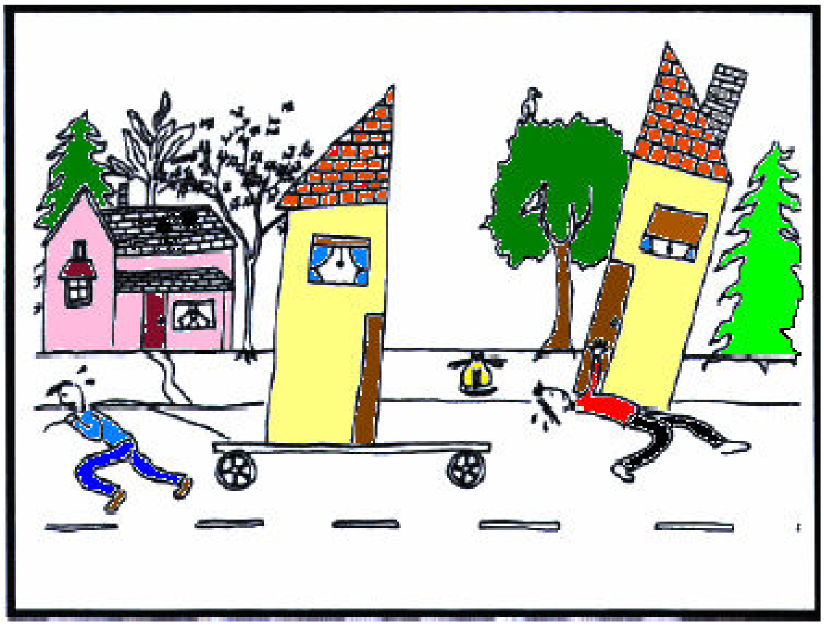
2.1. Métodos de partilha justa

Uma abordagem neste caso é tentar atribuir valores numéricos, quantias em euros, aos objectos e depois dividir o total em partes justas.

A abordagem final pode pois ser alcançada atribuindo os valores numéricos ou os próprios objectos.

O Método das licitações secretas e o Método dos marcadores são os métodos de patilha justa estudados no nosso trabalho.

2.1.1.Método das licitações secretas



SERÁ ESTA A MELHOR FORMA DE DIVIDIR BENS?

NÃO!

Este método é antigo e especialmente utilizado por advogados e juízes. Para que este método seja válido têm que ser satisfeitas certas condições, cada herdeiro deve ter dinheiro suficiente para as suas licitações, cada herdeiro deve aceitar dinheiro como um substituto de qualquer bem e é obrigatório que cada herdeiro, antes de licitar, não tenha nenhuma informação útil sobre as licitações dos outros herdeiros.

Este método processa-se em três etapas.

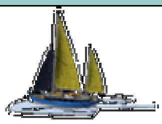
Na primeira etapa, designada por LICITAÇÃO, cada herdeiro atribui um valor monetário a cada bem da herança, colocando o valor da sua licitação dentro de um envelope fechado. No final são abertos os envelopes e registados respectivos valores das suas licitações.

A segunda etapa é conhecida por DISTRIBUIÇÃO. Nesta, cada bem é entregue ao herdeiro que lhe atribuiu maior valor monetário. Se o valor atribuído a cada bem for superior/inferior à divisão justa, então o herdeiro terá de pagar/receber a diferença, respectivamente.

Por último, temos a terceira etapa que se designa por EXCESSO, esta ocorre quando existe dinheiro em excesso, que deve ser dividido igualmente pelos herdeiros.

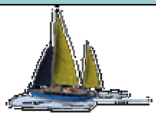
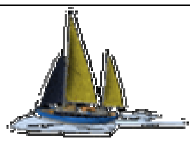
Exemplo:

Suponhamos que temos de dividir uma herança, constituída por uma casa, um barco e um carro por quatro herdeiros, a Ana, a Raquel, a Inês e a Liliana. Depois da realização da primeira etapa registaram-se na tabela seguinte as suas licitações.

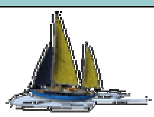
	ANA	RAQUEL	INÊS	LILIANA
	€ 120 000	€ 200 000	€ 140 000	€ 180 000
	€ 60 000	€ 40 000	€ 90 000	€ 50 000
	€ 30 000	€ 24 000	€ 20 000	€ 20 000

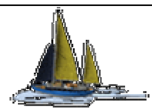
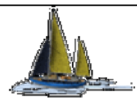
Seguidamente calcula-se a soma das ofertas de cada herdeiro, que consiste da soma dos três valores atribuídos aos bens. Tem-se também em consideração a porção justa de cada herdeiro que se obtém através do quociente entre a soma das ofertas e o número de herdeiros, neste caso quatro.

Passamos à atribuição dos bens, que adquirem o valor máximo que lhe foi dado. Neste caso, a Raquel recebe a casa, a Inês o barco e a Ana o carro, pois foram os herdeiros que lhes atribuíram maior valor monetário. Depois dos bens serem atribuídos é necessário calcular a diferença entre a porção justa e o bem. Por vezes esta diferença pode ser negativa, isto acontece quando o bem que o herdeiro recebeu vale mais que a sua porção justa. Assim sendo, este terá de pagar essa diferença. O herdeiro receberá a diferença quando esta for positiva.

	Ana	Raquel	Inês	Liliana
	€ 120 000	€ 200 000	€ 140 000	€ 180 000
	€ 60 000	€ 40 000	€ 90 000	€ 50 000
	€ 30 000	€ 24 000	€ 20 000	€ 20 000
Soma das ofertas	€ 210 000	€ 264 000	€ 250 000	€ 250 000
Porção justa	€ 52 500	€ 66 000	€ 62 500	€ 62 500
Objecto atribuído				
Diferença	€ 22 500	€(-) 134 000	€ (-) 27 500	€ 62 500

A realização da terceira etapa é necessária no nosso exemplo. O excesso obtém-se subtraindo a soma das diferenças de valor positivo à soma das diferenças de valor negativo, isto é, subtrair a soma dos valores que a Liliana e Ana têm que receber à soma dos valores que a Inês e a Raquel têm de pagar, perfazendo um excesso total de 76500€. Este excesso é dividido igualmente pelos herdeiros.

	Ana	Raquel	Inês	Liliana
	€ 120 000	€ 200 000	€ 140 000	€ 180 000
	€ 60 000	€ 40 000	€ 90 000	€ 50 000
	€ 30 000	€ 24 000	€ 20 000	€ 20 000
Soma das ofertas	€ 210 000	€ 264 000	€ 250 000	€ 250 000
Porção justa	€ 52 500	€ 66 000	€ 62 500	€ 62 500

Objecto atribuído				
Diferença	€ 22 500	€ (-) 134 000	€ (-) 27 500	€ 62 500
Excesso total	€ 76 500			
Divisão do excesso	€ 19 125	€ 19 125	€ 19 125	€ 19 125
Distribuição final	 + € 41 625	 - € 114 875	 - € 8 375	 € 81 625

No final, cada herdeiro recebe o bem, caso este lhe tenha sido atribuído. É calculada a soma da diferença com a divisão do excesso, se esta for positiva o herdeiro irá receber essa quantia, caso contrário terá de pagá-la.

2.1.2.Método dos marcadores

Para perceber melhor este método, vamos explicá-lo com base num exemplo. Pretendemos distribuir 12 cd's por três amigos, o Francisco, o Gonçalo e o Pedro. Numa primeira etapa, colocamos os cd's numerados, aleatoriamente, em linha, tal como se verifica na figura:

Seguidamente colocam-se os marcadores, ou seja, cada amigo escreve num papel onde pretende colocar os marcadores de modo a dividir a linha dos cd's em três segmentos que eles considerem ser justo. Note-se que cada indivíduo deve fazer a divisão de uma forma independente, ou seja, nenhum amigo deve conhecer a forma como os outros dividiram os cd's. Obtivemos por exemplo a seguinte divisão:

Num terceiro passo, para melhor percebermos como funcionam os marcadores, constrói-se uma tabela para colocar os segmentos efectuados por cada amigo.

	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3
Francisco	1	2-3	4-12
Gonçalo	1-5	6-10	11-12
Pedro	1-3	4-9	10-12

Por exemplo, o Francisco considera justo um dos amigos receber apenas o cd número um, outro os cd's dois e três e o último amigo receberia os cd's número quatro até ao número doze. Já o Gonçalo faz a divisão de outro modo e o Pedro doutro. Por isso é que os marcadores estão dispostos da forma indicada na figura.

O próximo passo é o da distribuição. Observa-se a linha da esquerda para a direita até se encontrar o primeiro marcador.

No nosso exemplo o primeiro marcador que encontramos pertence ao Francisco (F_1), pelo que, lhe é entregue o seu segmento.

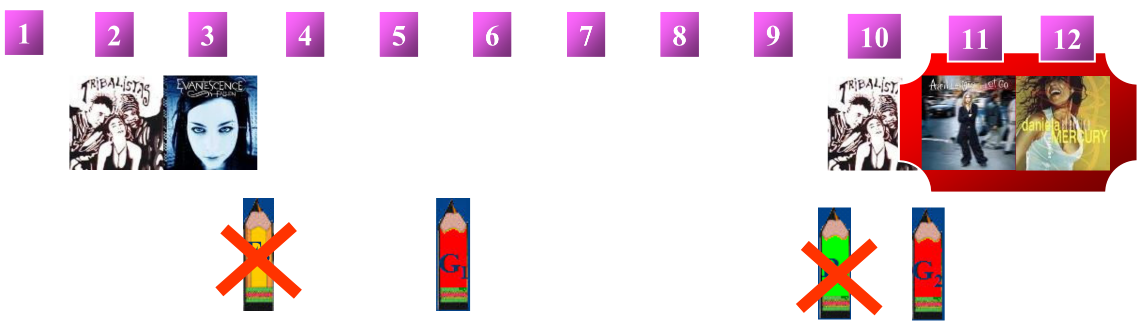
Os marcadores do Francisco são então retirados, e procura-se agora o primeiro marcador do segundo segmento.

	1	2	3
F		~~2-3~~	
G		6-10	
P		4-9	

Se olharmos para a coluna 2 da tabela, verificamos que o segmento mais próximo é o 4-9, que pertence ao Pedro, portanto, este segmento é-lhe entregue e retiram-se também os seus marcadores.

Se olharmos agora para a coluna 3 da tabela, verificamos que resta apenas um segmento, o 11-12 e que pertence ao Gonçalo, portanto entregamos-lhe este segmento.

	1	2	3
F			~~4-12~~
G			11-12
P			~~10-12~~



Todos os amigos receberam cd's. Contudo ainda sobram alguns. Passemos ao passo da distribuição: estipula-se aleatoriamente uma ordem entre os amigos e cada um vai escolhendo um cd até acabarem. Neste caso a ordem será Gonçalo – Francisco – Pedro.

Se nesta fase do método ainda sobrarem mais cd's que o número de amigos, usa-se novamente o Método dos Marcadores.

Tal como se verifica na figura em baixo, no final da distribuição, o Francisco receberá os cd's 1 e 3, o Pedro receberá os cd's 2 e do 4 ao 9 e o Gonçalo receberá o 10, 11 e 12.

Para que este método possa funcionar correctamente, são necessárias determinadas circunstâncias, tais como, haver um número de cd's superior ao número de amigos e cada amigo poder dividir os cd's em segmentos de valor igual.

2.2.Divisão proporcional

A divisão proporcional é um processo que consiste na divisão de objectos iguais onde os jogadores são sujeitos a diferentes quotas.

Os Métodos de Hamilton, Jefferson, Adams, Webster-Willcox e de Huntington-Hill são os métodos de divisão proporcional que iremos analisar.

2.2.1.Definições necessárias

Para conseguirmos estudar estes métodos é fundamental compreendermos algumas definições.

Um ponto de partida natural é calcular a razão entre o número total de habitantes e o número total de lugares a distribuir, uma espécie de média de pessoas representadas por cada lugar.

Dum modo geral, para cada problema de distribuição proporcional no qual a população total P e o número de lugares para serem distribuídos M, a razão P/M dá o número de pessoas representadas por cada lugar. Chamaremos ao número P/M quociente eleitoral (standard divisor).

$$\text{quociente eleitoral} = \frac{\text{nº total de habitantes}}{\text{nº total de lugares}}$$

Usando o quociente eleitoral, calculamos a fracção do número total de lugares, que cada estado pode ocupar, se os lugares não forem indivisíveis. Este número, que chamamos de – quota do estado – é obtido dividindo o número de habitantes do estado pelo quociente eleitoral.

$$\text{quota do estado} = \frac{\text{nº de habitantes do estado}}{\text{quociente eleitoral}}$$

Associada a cada quota de estado há dois números inteiros a considerar: a **quota mínima** (aproximação da quota às unidades, por defeito) e a **quota máxima** (aproximação da quota às unidades, por excesso).

Existem métodos de divisão proporcional que nem sempre respeitam a chamada **regra da quota**. Esta diz-nos que cada estado deve receber a sua quota mínima ou a sua quota máxima na distribuição final.

Satisfazer a regra da quota parece ser o mínimo que podemos pedir a um método de divisão proporcional para o considerar justo.

2.2.2.Método de Hamilton

Embora não tenha sido o primeiro a aparecer, vamos discuti-lo primeiro, porque ele é matematicamente mais simples. É também conhecido como método do maior resto ou método de Vinton.

Este método divide-se em três passos que se encontram na tabela seguinte.

1º passo: Calcular a quota de cada círculo eleitoral;

2º passo: atribuir a cada círculo um número de lugares igual à parte inteira da quota (quota mínima);

3º passo: atribuir os lugares sobrantes, um a um, aos círculos com quota com maior parte decimal.

A ideia essencial defendida pelo método de Hamilton é a de que todos os Estados têm direito pelo menos à sua quota mínima. Tendo ainda alguns Estados a possibilidade de ter a sua quota máxima (aproximação da quota por excesso).

Exemplo:

Pretendemos realizar um Encontro de Estudantes de Matemática das Universidades de Lisboa, Coimbra e Beira Interior. Mas existem apenas 176 lugares nesse Encontro para serem distribuídos pelas três Universidades.

Universidades	Nº Estud.	Quota	Quota mínima	P.Decimal	Lugar	Nº Rep.
Lisboa	9230	92,3	92	0,3		92
Coimbra	8231	82,31	82	0,31		82
Beira Interior	139	1,39	1	0,39	1º	2
Total	17600					
Nº lugares	176		175			**176**
Q. eleitoral	100					

Para fazer esta distribuição é necessário calcular o **quociente eleitoral** que é obtido pelo total de estudantes sobre o número de lugares, neste caso toma o valor de cem. O quociente eleitoral significa que uma universidade levará ao encontro um representante por cada cem estudantes.

De seguida calculamos a **quota** de cada Universidade, que é dada pelo número de estudantes sobre o quociente eleitoral. A quota é o número exacto de representantes que cada Universidade deveria ter no encontro. Mas como já foi visto não se pode dividir pessoas da mesma forma que se divide, por exemplo, um bolo. Temos, então, de calcular a **Quota mínima** que é a aproximação da quota por defeito. E assim distribuímos **175 lugares**, falta ainda distribuir um lugar para completar o total de lugares do Encontro. Com esse objectivo vamos calcular a **Parte decimal** de cada Universidade que é igual à quota menos a quota mínima. O lugar sobrante é atribuído à Universidade com maior parte decimal, neste caso à **Beira Interior**.

Utilizando este método, a Universidade de Lisboa leva ao Encontro de Estudantes de Matemática noventa e dois representantes, a de Coimbra oitenta e dois e a da Beira Interior dois.

Conclusões relativas a este Método:

De facto, para uma só aplicação, este método é provavelmente o mais simples de usar.

A única confusão que pode ocorrer é quando existem duas partes decimais iguais porque dificulta a atribuição de lugares. Nesse caso, seguindo o nosso exemplo, será a Universidade com quota mínima mais elevada que irá receber o lugar extra. Contudo, pode surgir alguma controvérsia se este método for aplicado repetidamente durante um certo período de tempo.

Mas Hamilton defendia que o seu método era justo e aceitável e por isso tentou influenciar o presidente Washington a utilizá-lo.

Todavia este método não é perfeito, possui falhas, as chamadas Falhas do Método de Hamilton.

2.2.2.1.Falhas do Método de Hamilton

São três as falhas do Método de Hamilton: o Paradoxo de Alabama, o Paradoxo da População e o Paradoxo dos Novos Estados.

A descoberta do paradoxo de Alabama, em 1880, foi o golpe fatal do Método de Hamilton. Ironicamente, só mais tarde, quando este método já não era usado é que foram descobertas as outras duas deficiências o Paradoxo da População (1900) e o Paradoxo dos Novos Estados (1907).

2.2.2.1.1.Paradoxo de Alabama

O Paradoxo de Alabama é considerado o maior defeito do Método de Hamilton. Acontece quando o aumento no tamanho do corpo legislativo implica a perda de um representante de um estado individual. Para melhor compreendermos esta falha, analisemos o seguinte exemplo:

Suponhamos que, no mesmo exemplo do Método de Hamilton, há um aumento do número de lugares de representantes no Encontro de Estudantes de Matemática de 176 para 177.

É então necessário fazer uma nova distribuição dos lugares.

Universidade	Nº Estud.	Quota	Quota mínima	P.Decimal	Lugar	Nº Rep.
Lisboa	9230	92.82	92	0.82	1º	93
Coimbra	8231	82.77	82	0.77	2º	83
Beira Interior	139	1.40	1	0.40		1
Total	17600					
Nº lugares	177		175			177
Q. eleitoral	99.44					

Para isso seguem-se os mesmos passos do exemplo do método de Hamilton. E obtém-se esta distribuição de representantes pelas três Universidades. A Universidade de Lisboa fica com 93 representantes, Coimbra com 83 e a Beira Interior com 1.

Reparem que a Beira Interior pelo Método de Hamilton tinha dois representantes e agora só ficou com um. Ou seja, o número de lugares aumentou, contudo a Universidade da Beira Interior perdeu um representante, é aqui que achamos o paradoxo. Pois seria de esperar que a única alteração na distribuição anterior fosse o aumento de um representante por uma das Universidades, já que havia um lugar extra a distribuir.

A nível matemático, o paradoxo de Alabama resulta de erros de aritmética básica. Já que quando se aumenta o número de lugares a serem distribuídos, cada quociente eleitoral sobe mas não da mesma maneira. E assim a ordem para a atribuição de lugares extra fica desordenada com o facto de alguns Estados que tinham prioridade deixaram de a ter e vice-versa. Em consequência alguns Estados podem perder lugares que já tinham adquirido, como se verificou no nosso exemplo.

2.2.2.1.2.Paradoxo da População

O Paradoxo da População diz que um estado X pode perder lugares para um estado Y mesmo que a população de X cresça muito mais do que a de Y.

Vejamos como pelo seguinte Exemplo, a criação de um Núcleo de estudantes de Matemática da Universidade de Évora.

Com o intuito de criar um Núcleo justo, este terá de ter alunos dos quatro anos do curso nos seus 25 membros. Pelo mesmo processo que temos vindo a utilizar, obtemos a seguinte distribuição:

Anos	Nº Estud.	Quota	Quota mínima	P.Decimal	Lugar	Nº Rep.
1º	400	10.929	10	0.929	1º	11
2º	90	2.459	2	0.459		2
3º	225	6.148	6	0.148		6
4º	200	5.464	5	0.464	2º	6
Total	915					
Nº lugares	25		23			25
Q. eleitoral	36.6					

Imaginemos agora que se transferiram para esta universidade vinte alunos, nove para o 2º ano e onze para o 4º ano. É necessário fazer uma nova distribuição, pelo mesmo processo utilizado anteriormente.

Anos	Nº Estud.	Quota	Quota mínima	P.Decimal	Lugar	Nº Rep.
1º	400	10.695	10	0.695	1º	11
2º	99	2.647	2	0.647	2º	3
3º	225	6.106	6	0.106		6
4º	211	5.642	5	0.642		5
Total	935					
Nº lugares	25		23			25
Q. eleitoral	37.4					

Repare-se que em comparação com o 2º ano, o 4º ano ganhou mais alunos, onze, enquanto o 2º ano apenas ganhou nove, contudo perdeu um representante. O 2º ano tinha dois representantes e ficou com três enquanto o 4ºano tinha seis e ficou com cinco. E aqui encontramos o paradoxo. Pois se um ano ganha mais alunos deveria ganhar mais representantes.

2.2.2.1.3.Paradoxo dos Novos Estados

O Paradoxo dos Novos Estados ocorre quando o aparecimento de um novo estado e um aumento do número de lugares afectar a divisão de lugares dos outros estados.

Utilizemos o mesmo exemplo, mas em que contabilizamos também o ano de estágio e aumentamos o número de membros do Núcleo de 25 para 28.

Anos	Nº Estud.	Quota	Quota mínima	P.Decimal	Lugar	Nº Rep.
1º	400	10.821	10	0.821	1º	11
2º	90	2.435	2	0.435	2º	3
3º	225	6.087	6	0.087		6
4º	200	5.411	5	0.411		5
5º	120	3.246	3	0.246		3
Total	1035					
Nº lugares	28		26			28
Q. eleitoral	36.964					

Verificamos que os três lugares extra foram automaticamente para o 5º ano, reparamos também que o 2º ano tinha dois representantes e ficou com três enquanto que o 4º ano tinha seis representantes e ficou com cinco. Ou seja, o aparecimento de um novo ano, o 5º, e o aumento do número de lugares do núcleo de 25 para 28, afectou a divisão de lugares dos outros anos. Mas se os três lugares a mais foram para o novo ano, o 5º, não deveria haver alteração na distribuição dos outros anos, contudo essa alteração verificou-se. Ou seja, ocorreu o Paradoxo dos novos estados.

Conclusões:

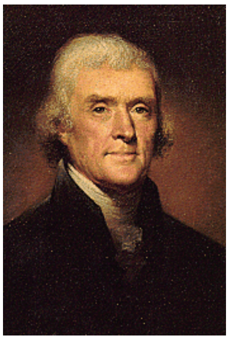
A existência destes três paradoxos não significa que o método de Hamilton seja inválido ou incorrecto.

Ao utilizar o método de Hamilton, cada estado recebe ou a sua quota mínima ou a sua quota máxima na distribuição final. Isto é, satisfaz a REGRA DA QUOTA.

A maior fragilidade deste método surge no 3º passo, quando se atribui os lugares sobrantes aos Estados com quota com maior parte decimal. Seria bom eliminá-lo, modificando a quota, para que não haja lugares sobrantes a distribuir.

2.2.3.Método de Jefferson

O método de Jefferson é um método de divisão proporcional de grande importância histórica e matemática, sendo também conhecido como o método de grandes divisores, e na Europa como o método de D´Hondt. Este método foi utilizado nos Estados Unidos durante 5 décadas (até 1832) e continua a ser usado em muitos países nomeadamente Portugal, Áustria, Brasil, Finlândia, Alemanha e países baixos. Consiste em 2 passos:

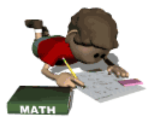


1º passo: encontrar um quociente eleitoral (modificado) de modo que as quotas modificadas arredondadas, às unidades, por defeito (quotas mínimas modificadas) somem o número exacto de lugares;

2º passo: atribuir a cada círculo a sua quota mínima modificada.

Quando este método começou a ser utilizado pelos Estados Unidos, muitas pessoas tinham dúvidas quanto ao seu sucesso, devido ao uso de um quociente modificado, mas nada na Constituição exige que se tenha de utilizar o quociente eleitoral e não outro.

Este método, geralmente, é utilizado por tentativa e erro. Utilizando o exemplo do Encontro de Estudantes de Matemática das três universidades e, numa primeira tentativa, utilizando o quociente modificado de 100.5, temos o seguinte resultado:



Universidade	Nº Estud.	Quota modificada	Quota mín. mod.
Lisboa	9230	91.84	91
Coimbra	8231	81.90	81
Beira Interior	139	1.38	1
Total	17600		
Nº lugares	176		**173**
Q. eleitoral	100		
Q. modificado	**100.5**		

Nesta primeira tentativa, obtivemos no final a distribuição de 173 lugares, ou seja, com o quociente modificado de 100.5 não conseguimos a distribuição dos 176 lugares para o Encontro. Vejamos agora uma segunda tentativa com o quociente modificado de 99:

Universidade	Nº Estud.	Quota modificada	Quota mín. mod.
Lisboa	9230	93.23	93
Coimbra	8231	83.14	83
Beira Interior	139	1.40	1
Total	17600		
Nº lugares	176		**177**
Q. eleitoral	100		
Q. modificado	**99**		

Neste segundo caso, obtivemos 177 lugares distribuídos, ou seja, um número superior de lugares. Tentemos agora, numa terceira tentativa, um quociente modificado de 99.2:

Universidade	Nº Estud.	Quota modificada	Quota mín. mod.
Lisboa	9230	93.04	93
Coimbra	8231	82.97	82
Beira Interior	139	1.40	1
Total	17600		
Nº lugares	176		**176**
Q. eleitoral	100		
Q. modificado	**99.2**		

Nesta terceira tentativa já estão distribuídos os 176 lugares existentes para o Encontro. Utilizando este Método temos então uma distribuição final de 93 representantes para a Universidade de Lisboa, 82 para a Universidade de Coimbra e 1 para a Universidade da Beira Interior.

Uma questão que se coloca nesta altura é o facto deste quociente modificado ser ou não único. Vejamos que, considerando um quociente modificado de 99.18, obtivemos a mesma distribuição de lugares, ou seja, obtivemos a distribuição dos 176 lugares existentes:

Universidade	Nº Estud.	Quota modificada	Quota mín. mod.
Lisboa	9230	93.06	93
Coimbra	8231	82.99	83
Beira Interior	139	1.40	1
Total	17600		
Nº lugares	176		**176**
Q. eleitoral	100		
Q. modificado	**99.18**		

Mas este método pode ser utilizado também sem ser por tentativas. Para isso é necessário o cálculo da quota máxima e das quotas modificadas 1 e 2:

$$\text{Quota máxima} = \text{Quota mínima} + 1$$

$$\text{Quota modificada 1} = \frac{\text{Nº Estudantes}}{\text{Quota mínima}}$$

$$\text{Quota modificada 2} = \frac{\text{Nº Estudantes}}{\text{Quota máxima}}$$

Depois de calculadas as quotas mínimas, este método aplica-se procurando nas duas colunas das quotas modificadas, em simultâneo, o valor mais elevado, já que neste exemplo falta apenas um lugar para distribuir no final do cálculo das quotas mínimas. A universidade com quota modificada superior ficará com o restante representante. Temos então o seguinte resultado:

Universidade	Nº Est.	Q	Q mín.	Q max.	Q mín+2	Q. mod.1	Q. mod.2	Lugar	Nº Rep.
Lisboa	9230	92.3	92	93	94	**99.247**	98.191	1º	93
Coimbra	8231	82.31	82	83	84	99.169	97.988		82
B. Interior	139	1.39	1	2	3	69.5	46.333		1
Total	17600								
Nº lugares	176		**175**						**176**
Q. eleitoral	100								

Podemos concluir que também neste exemplo são distribuídos os 176 lugares existentes no Encontro. Será que com este Método encontramos a perfeição?

Este método também possui uma falha. O que acontece aqui é que, por vezes, viola a regra da quota. O problema está na análise simultânea das duas colunas das quotas modificadas.

Suponhamos que os estudantes de Arquitectura da Universidade de Coimbra vão realizar um Simpósio com 300 lugares. Neste Simpósio queremos que estejam presentes estudantes de todos os anos. Efectuando o cálculo das quotas mínimas, ficam por distribuir 3 lugares no Simpósio. Depois de calculadas as quotas modificadas, procuram-se nas duas colunas, em simultâneo, os 3 valores mais elevados. Obtivemos no final a seguinte distribuição:

Anos	Nº Est.	Q	Q mín.	Q max.	Q mín+2	Q. mod.1	Q. mod.2	Lugar	Nº Rep.
1º	328	39.36	39	40	41	8.200	8.000		39
2º	1388	166.56	166	167	168	**8.311**	**8.262**	1º 2º	168
3º	30	3.6	3	4	5	7.500	6.000		3
4º	420	50.4	50	51	52	8.235	8.077		50
5º	136	16.32	16	17	18	8.000	7.556		16
6º	198	23.76	23	24	25	**8.250**	7.920	3º	24
Total	2500								
Nº lugares	300		**297**						**300**
Q. eleitoral	8.333								

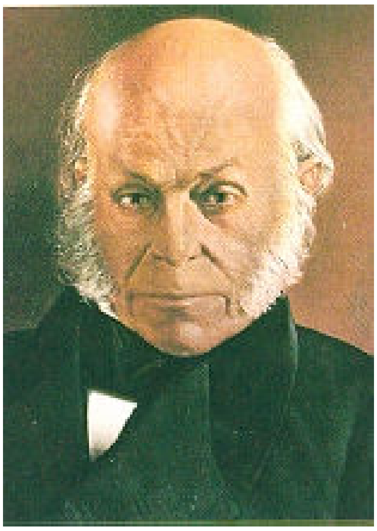
Podemos verificar que neste exemplo é violada a regra da quota, já que o 2º ano terá no Simpósio 168 representantes, número diferente da quota mínima (166) e da quota máxima (167).

2.2.4.Método de Adams

Como o método de Jefferson violava a regra da quota, John Quincy Adams, propôs um outro método que se baseava exactamente na mesma ideia, mas em vez da quota mínima modificada utilizava a quota máxima modificada.

Adams pensou que ao criar este método não iria violar a regra da quota, a maior fragilidade do método de Jefferson.

Este método segue dois passos.



1º Passo: encontrar um quociente eleitoral (modificado) de modo que as quotas modificadas arredondadas, às unidades, por excesso (quotas máximas modificadas) somem o número exacto de lugares;

2ºPasso: atribuir a cada círculo a sua quota máxima modificada.

Tal como o Método de Jefferson, este também funciona por tentativas. Vejamos como, pelo exemplo que já temos vindo a utilizar, o Encontro de Estudantes de Matemática.

Numa primeira tentativa, experimentámos 104 como quociente modificado.

Universidade	Nº Estudantes	Quota modificada	Quota Max. Mod.
Lisboa	9230	88.75	89
Coimbra	8231	79.14	80
Beira Interior	139	1.34	2
Total	17600		
Nº lugares	176		**171**
Q. Eleitoral	100		
Q. Modificado	**104**		

Soma Inferior

Como podemos verificar na tabela, este quociente modificado não é adequado, uma vez que obtivemos uma soma inferior ao número de lugares desejado. Assim, tentemos de novo, com o quociente modificado 99.

Universidade	Nº Estudantes	Quota modificada	Quota Max. Mod.
Lisboa	9230	93.23	94
Coimbra	8231	83.14	84
Beira Interior	139	1.4	2
Total	17600		
Nº lugares	176		**180**
Q. Eleitoral	100		
Q. Modificado	**99**		

Soma Superior

Temos outra tentativa falhada! Desta vez, com uma soma superior à pretendida. O quociente modificado de 100.5 foi a nossa próxima tentativa.

Universidade	Nº Estudantes	Quota modificada	Quota Max. Mod.
Lisboa	9230	91.84	92
Coimbra	8231	81.9	82
Beira Interior	139	1.38	2
Total	17600		
Nº lugares	176		**176**
Q. Eleitoral	100		
Q. Modificado	**100.5**		

Com este valor, atingimos o nosso objectivo. Os 176 lugares ficaram distribuídos. A Universidade de Lisboa leva ao encontro 92 representantes, a de Coimbra 82 e a da Beira Interior 2.

No nosso exemplo, a regra da quota não foi violada. No entanto, este método viola esta regra. O problema começa na escolha do quociente modificado. Contudo, os exemplos são escassos pois este método nunca foi utilizado na prática.

2.2.5.Método de Webster-Willcox

Daniel Webster propôs uma ideia básica, que arredondássemos as quotas para o inteiro mais próximo, método que usamos para arredondar decimais em quase todas as situações – por defeito se a parte decimal é inferior a 0,5 por excesso no caso contrário, pois sempre pensou que esta era a única maneira justa de arredondar números. A ideia de Webster era usar quotas modificadas escolhidas especificamente de maneira que quando acabamos de fazer os arredondamentos convencionais obtemos exactamente o número de lugares a distribuir.

O seu método segue os seguintes passos:

1º Passo: encontrar um quociente eleitoral (modificado) de modo que as quotas modificadas arredondadas, às unidades, de modo convencional somem o número exacto de lugares;

2º Passo: atribuir a cada círculo a sua quota arredondada de modo convencional.

A escolha do quociente modificado implica que este método se resolva por tentativas. Continuando com o mesmo exemplo, o Encontro de Estudantes de Matemática, começamos por utilizar o valor 101 para quociente modificado.

Universidade	Nº Estudantes	Quota modificada	Q. Mod. Arredondada
Lisboa	9230	91.39	91
Coimbra	8231	81.50	82
Beira Interior	139	1.38	1
Total	17600		
Nº lugares	176		**174**
Q. Eleitoral	100		
Q. Modificado	**101**		

Soma Inferior

Com este valor obtivemos uma soma inferior à pretendida, logo estamos perante uma tentativa falhada. Procedemos do mesmo modo agora com o quociente modificado de 99.5.

Universidade	Nº Estudantes	Quota modificada	Q. Mod. Arredondada
Lisboa	9230	92.76	93
Coimbra	8231	82.72	83
Beira Interior	139	1.40	1
Total	17600		
Nº lugares	176		**177**
Q. Eleitoral	100		
Q. Modificado	**99.5**		

Soma Superior

Mais uma vez a tentativa fracassou, por isso tentemos de novo com o quociente 99.78.

Universidade	Nº Estudantes	Quota modificada	Q. Mod. Arredondada
Lisboa	9230	92.50	93
Coimbra	8231	82.49	82
Beira Interior	139	1.39	1
Total	17600		
Nº lugares	176		**176**
Q. Eleitoral	100		
Q. Modificado	**99.78**		

Conseguimos o pretendido, os 176 lugares foram distribuídos, 93 para a Universidade de Lisboa, 82 para a de Coimbra e 1 para a da Beira Interior.

Surge agora uma questão, será este o método ideal?

Não, pois este método também viola a regra da quota, todavia os seus exemplos são raros. Apesar disto, do ponto de vista prático este é considerado por muitos especialistas o melhor de todos os métodos de divisão proporcional.

2.2.6.Método de Huntington-Hill

O método actualmente usado na distribuição proporcional dos lugares da Câmara dos Representantes dos Estados Unidos da América é conhecido pelo método de Huntington-Hill ou método das proporções iguais.

O arredondamento deste método não é nenhum dos nossos já conhecidos, este recorre à chamada regra de arredondamento de Huntington-Hill.

REGRA DE ARREDONDAMENTO DE HUNTINGTON-HILL:

Se a quota está entre L e L+1, o ponto de viragem é H $=\sqrt{L(L+1)}$. Se a quota é inferior a H, arredonda-se por defeito, caso contrário, arredonda-se por excesso.

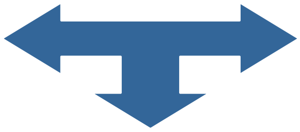
Tal como os outros métodos, também este segue dois passos.

1º Passo: encontrar um quociente modificado tal que quando cada quota modificada é arredondada pela regra de Huntington-Hill, o total dos arredondamentos é exactamente o número de lugares a distribuir;

2º Passo: Atribuir a cada círculo a sua quota modificada arredondada pela regra de Huntington-Hill.

Este método também funciona por tentativas, daí termos tentado o quociente modificado 104 no mesmo exemplo do Encontro de Estudantes de Matemática.

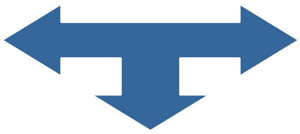
Universidade	Nº Estudantes	Q. Modificada	Ponto Viragem	Q. Mod. Arredondada
Lisboa	9230	88.75	88.50	89
Coimbra	8231	79.14	79.50	79
Beira Interior	139	1.34	1.41	1
Total	17600			
Nº lugares	176			**169**
Q. Eleitoral	100			
Q. Modificado	**104**			



Soma Inferior

O cálculo da quota modificada é feito do mesmo modo que nos outros casos já referidos anteriormente. De acordo com a regra de Huntington-Hill, o ponto de viragem é H= $\sqrt{L(L+1)}$. Para percebermos melhor este cálculo, façamos um estudo para o caso da Universidade de Lisboa. Reparemos que L=88, daí o ponto de viragem ser 88.50. Como 88.75 é superior a 88.50, o arredondamento faz-se por excesso, logo o número de representantes vai ser 89. Este tipo de raciocínio é feito também para as outras universidades. Contudo, este quociente modificado não serve para o caso em questão visto que a soma dos lugares distribuídos é inferior à pretendida, logo temos a necessidade de tentar um novo quociente modificado, desta vez 99.5.

Universidade	Nº Estudantes	Q. Modificada	Ponto Viragem	Q. Mod. Arredondada
Lisboa	9230	92.76	92.50	93
Coimbra	8231	82.72	82.50	83
Beira Interior	139	1.40	1.41	1
Total	17600			
Nº lugares	176			**177**
Q. Eleitoral	100			
Q. Modificado	**99.5**			



Soma Superior

Fazendo novamente os mesmos cálculos, chegamos a uma soma superior à pretendida, por isso tentámos o quociente modificado 99.78.

Universidade	Nº Estudantes	Q. Modificada	Ponto Viragem	Q. Mod. Arredondada
Lisboa	9230	92.50	92.50	93
Coimbra	8231	82.49	82.50	82
Beira Interior	139	1.39	1.41	1
Total	17600			
Nº lugares	176			**176**
Q. Eleitoral	100			
Q. Modificado	**99.78**			

Finalmente encontrámos um quociente modificado cuja soma da distribuição dos lugares tenha dado 176. Esta distribuição dá-nos 93 representantes para a Universidade de Lisboa, 82 para a de Coimbra e 1 para a da Beira Interior.

Este exemplo não viola a regra da quota, no entanto há situações em que viola uma vez que também utiliza o quociente modificado.

2.3.Teorema da impossibilidade de Balinski e Young

Por muitos anos, a última esperança de todos os interessados no problema da divisão proporcional era que os matemáticos encontrassem um método de divisão proporcional perfeito: um que nunca violasse a regra da quota, que não produzisse paradoxos e que tratasse grandes ou pequenos estados da mesma forma.

Em 1980 essa esperança dissipou-se com a surpreendente descoberta feita por dois matemáticos - Michael L. Balinsky e H. Peyton Young – que ficou conhecida como o **teorema da impossibilidade de Balinsky e Young** que afirmava:

"Qualquer método de partilha que não viole a regra da quota produz paradoxos e qualquer método de partilha que não produza paradoxos viola a regra da quota."

2.4. Quadro final

Concluímos assim que não existem métodos perfeitos. Para verificar isso, observemos a tabela seguinte com a distribuição final para o Encontro de Matemática para os diferentes Métodos de Divisão Proporcional:

Viola a regra da quota

Favorece universidades pequenas

Universidade	Nº Estud.	Quota	*Hamilton*	*Jefferson*	*Adams*	*Webster*	*Huntington*
Lisboa	9230	92.30	92	93	92	93	93
Coimbra	8231	82.31	82	82	82	82	82
Beira Interior	139	1.39	2	1	2	1	1
Total	17600						
Nº lugares	176		176	176	176	176	176
Q. eleitoral	100						

Favorece universidades grandes

Possui paradoxos

Podemos notar nesta tabela que cada um dos métodos efectua uma distribuição diferente. Isto mostra claramente que os métodos são de facto todos diferentes. No entanto, é possível que dois métodos diferentes produzam partilhas idênticas.

Dos cinco métodos, o de Hamilton tem uma estreita ligação com as quotas eleitorais, ao passo que os outros quatro (Jefferson, Adams, Webster e Huntington) estão baseados na filosofia que as quotas podem ser modificadas através da escolha apropriada do divisor.

3.Caso misto

O caso misto é uma combinação entre o caso contínuo e o discreto, ou seja, existem objectos divisíveis e indivisíveis para distribuir.

Este caso ocorre quando, por exemplo, numa herança há uma casa, um piano e um terreno para dividir por vários herdeiros. Um primeiro processo é aplicar o método das licitações secretas aos três bens e, portanto, atribuir um valor monetário ao terreno. Um outro processo é aplicar o método das licitações secretas apenas à casa e ao piano e aplicar um método do caso contínuo, previamente estabelecido, ao terreno.



4.Aplicações no secundário

A Matemática não está só ligada aos números. Existe uma grande variedade de temas que são estudados matematicamente. Assim, introduziu-se no ensino secundário uma nova reforma onde a matemática é estudada tendo em conta cada curso.

A TEORIA DA PARTILHA EQUILIBRADA é um tema que está ligado à vida de todos nós e é muito aliciante devido à sua tentativa de haver uma divisão justa, desde o poder, a bens materiais, ou ainda a partilha duma herança pelos herdeiros. Além disso, é um tema muito importante das Ciências Sociais no qual são ferramentas matemáticas que dão contributos incontornáveis para a tomada de decisões.

Foi criada, então, a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, (MACS), que será introduzida no próximo ano lectivo (2004/2005) no curso geral de Ciências Sociais e Humanas e no curso tecnológico de Ordenamento de Território.

O tema da Teoria da Partilha Equilibrada estudar-se-á no capítulo dos Métodos de Apoio à Decisão, um dos capítulos do 10º ano.

Até à data ainda não existem manuais para esta nova disciplina.

5.Conclusão

A teoria da partilha equilibrada permite-nos conhecer diversos métodos de partilha e as suas aplicações. Esta teoria é importante pois está presente no nosso dia a dia quando, por exemplo queremos dividir um bolo, uma herança ou distribuir pessoas num congresso.

Neste trabalho analisámos dois tipos de partilha, o de partilha justa e o de divisão proporcional e tanto num caso como noutro, o resultado obtido é diferente consoante o método utilizado. Contudo, não se pode considerar que um método é melhor do que outro pois a divisão é justa somente se o for no sistema de valores pessoal, no caso de partilha justa. Relativamente à divisão proporcional também não se atinge a perfeição tal como vimos pelo Teorema da Impossibilidade de Balinski e Young.

Concluímos assim que “ justiça depende de quem a define…”

6.Bibliografia

TANNENBAUM, Peter e ARNOLD, Robert (2001). *Excursions in Modern Mathematics*. Prentice Hall, Inc;

GARFUNKEL, Salomon e Steen, Lynn (1998). For All practical purposes – Introduction to contemporary mathematics. Freeman

http://www.mat.uc.pt/~jsoares/tt/e2.htm

http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/macs/ligacoes.html

http://www.prof2000.pt/users/coimbracom/formacao/macs/sessao3.htm

http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/tannenbaum/

http://www.colorado.edu/education/DMP/activities/

http://www.terra.com.br/matematica/arq11-4.htm

http://www.prof2000.pt/users/coimbracom/formacao/macs/partilha/activ_part_discr.doc

http://www.ctl.ua.edu/math103/apportionment/paradoxs.htm