TEORIA DA PARTILHA EQUILIBRADA

Trabalho realizado por:

Carla Sofia Banaco Pimentel

Joana Raquel Amaral Correia Couto

Maria Cristina Marques Rodrigues

Sandra de Jesus Assunção Nabiça

Ano Lectivo 2004/2005

ÍNDICE:

"Dividir é necessário... "

1-INTRODUÇÃO

Desde muito tenra idade que todos nós aprendemos a partilhar. Partilhamos brinquedos, doces, prendas, atenção... Apenas mais tarde começamos a aprender formas mais abstractas de partilhar, nomeadamente, a partilhar deveres, responsabilidades, e até mesmo culpas.

De facto, basta que exista um conjunto de bens para ser dividido por um certo número de elementos (pessoas, instituições, países, etc.) para se estar perante um problema de partilha equilibrada.

Dividir em partes justas usando a razão e a lógica, ao invés de construirmos a nossa própria solução, é uma das grandes descobertas da ciência social e podemos encontrar as raízes desta descoberta em aspectos muito simples da matemática. Nasce assim a TEORIA DA PARTILHA EQUILIBRADA.

2-ENQUADRAMENTO DA TEORIA DA PARTILHA EQUILIBRADA NO ENSINO SECUNDÁRIO

A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais destina-se aos Cursos Geral de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território.

Esta disciplina pretende desempenhar um papel incontornável para os estudantes dos cursos referidos, contribuindo para uma abordagem tão completa quanto possível de situações reais, ao desenvolver a capacidade de formular e resolver matematicamente problemas e ao desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas (os estudantes devem saber ler e escrever textos com conteúdo matemático descrevendo situações concretas).

Esta disciplina, destinada a um sector de estudantes que habitualmente não nutrem empatia pela Matemática, pretende proporcionar-lhes experiências matemáticas significativas, de forma a desenvolverem capacidades de intervenção social pela compreensão e discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos. Neste curso pretende-se trabalhar a Teoria Matemática das Eleições e a Teoria da Partilha Equilibrada com recurso a actividades de índole prática.

São finalidades da disciplina:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Contribuir para formar uma atitude positiva face à ciência e particularmente para com a Matemática.

Não há formação matemática equilibrada sem uma referência à História da Matemática. Um estudante precisa de saber que as descobertas matemáticas se sucedem a um ritmo vertiginoso e que juntamente com todas as das outras áreas do saber, têm contribuído ao longo dos tempos para a compreensão e resolução dos problemas do Homem. Neste sentido, o nosso trabalho pretende focar um dos objectivos desta disciplina, familiarizar os estudantes com as dificuldades de uma partilha equilibrada.

3-DIVISÃO JUSTA

A teoria da partilha equilibrada fornece-nos métodos para a resolução de problemas de divisão de bens, de forma justa, ou seja, de modo a que todas as pessoas sintam que obtiveram uma parte justa e imparcial dos bens. De um modo geral um problema de divisão justa tem N intervenientes, chamados jogadores, que denotamos por P_1, P_2,...., P_N. Os N participantes devem dividir o conjunto S de bens em N partes disjuntas, S_1, S_2,..., S_N. O objectivo é chegar a métodos de divisão justa que envolvam apenas os participantes (isto é, não é necessária a intervenção de pessoas exteriores como juízes, advogados ou avaliadores) e que satisfaçam indivíduos com sistemas de valores diferentes. Assume-se que os jogadores são racionais e que não têm conhecimento das preferências uns dos outros.

Poderemos, ainda, questionar-nos acerca da importância desta teoria. Em grande escala este problema de partilha adquire grande importância. A divisão de nações (como foi o caso da formação da Jugoslávia nos anos 90), a divisão dos direitos de acesso à exploração do subsolo oceânico (como foi o caso da Convenção da Lei do Mar), a divisão de responsabilidades para a despoluição do ambiente (como nos tratados da NAFTA em 1994) são alguns dos exemplos de questões de amplitude mundial que se remetem a *problemas de divisão justa*.

O Julgamento de Salomão, de Nicolas Poussin (1594 - 1665)

O problema da divisão (partilha) equilibrada é mais antigo que a história bíblica do rei Salomão. Neste episódio, duas mulheres vieram à sua presença trazendo um bebé que cada uma delas reclamava como seu. Diz a Bíblia que Salomão, mandando buscar uma espada, propôs que se cortasse a criança ao meio, ficando cada uma das mulheres com metade. Uma das mulheres concordou que a metade seria justo, enquanto que a outra imediatamente desistiu da criança. Claro que era esta última a verdadeira mãe e Salomão entregou-lhe o bebé.

A tentativa de matematização do problema de divisão equilibrada data da Segunda Guerra Mundial e teve origem na Polónia com Hugo Steinhaus. Hugo Steinhaus (1887-1972) é considerado o "pai" da teoria matemática de partilhas, desenvolvendo grande parte desta nos anos 40, enquanto se escondia dos Nazis. Este matemático provou que em qualquer

Hugo Steinhaus (1887-1972)

situação e para qualquer número de jogadores (designação atribuída aos intervenientes na partilha), é possível efectuar uma divisão livre de inveja. Infelizmente não conseguiu descobrir

um procedimento que sustentasse aquele resultado.

Já nos nossos dias, Steven Brams e Alan Taylor reafirmaram que é possível arranjar um esquema de divisão equilibrada que deixe satisfeitos todos os participantes. Enquanto que Brams provava o seu esquema para três jogadores, Taylor estendia este resultado a qualquer número de jogadores e descobria o primeiro procedimento para a divisão livre de inveja de um bolo. Também, por volta de 1960, John Selfridge e Jonh Conway (independentemente um do outro) haviam dado contributos para o desenvolvimento da Teoria da Partilha.

Dependendo da natureza dos bens a partilhar o problema da divisão justa pode ser classificado em três tipos: contínuo, discreto e misto.

"Se não consegues fazer o milagre da multiplicação então faz o da divisão...".

3.1. O caso continuo

Estes métodos aplicam-se à divisão justa de objectos que podem ser finamente divididos numa grande variedade de partes, como por exemplo bolos, terrenos, dinheiro, entre outros.

No dia-a-dia são inúmeras as vezes que recorremos, de uma forma mais rudimentar, a este tipo de métodos.

Vamos abordar os seguintes métodos:

- Método do **divisor-Selector**
- Algoritmos da divisão de Steinhaus
  - **Divisor único**
  - **Selector único**
- Algoritmos da divisão da Banach e Knaster
  - **Último a diminuir**
  - **Faca deslizante**

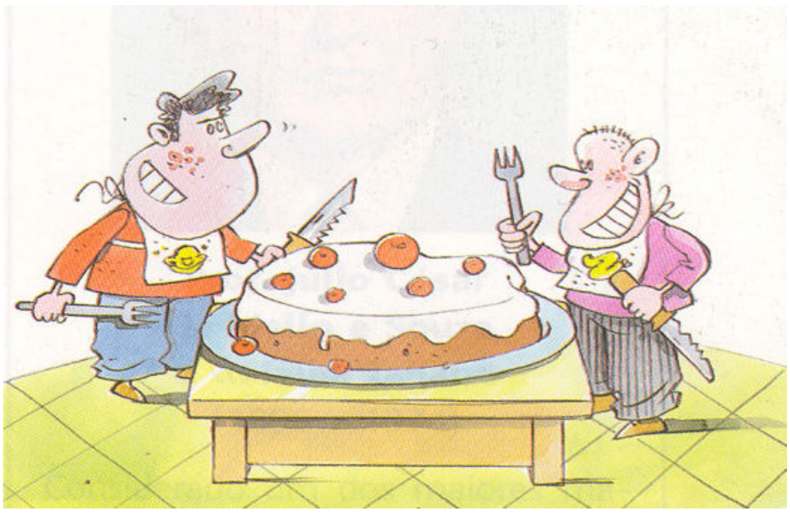
" (...) Como distribuir os bens? A necessidade de fazer este tipo de escolhas deriva, entre outras coisas, do facto de os nossos dois ideais políticos mais básicos – a liberdade e a equidade – serem, na sua forma mais pura, incompatíveis. A liberdade total tem por resultado a equidade obrigatória, e a equidade obrigatória leva à redução da liberdade. (...)

Um exemplo da faceta matemática destas questões está presente naquele gracejo sobre os dois irmãos que discutem por causa de uma grande fatia de bolo de chocolate. O irmão mais velho reclama a totalidade do bolo, enquanto o mais novo se queixa da injustiça dessa pretensão, defendendo que o bolo seja dividido ao meio. Entretanto chega a mãe, que os faz chegar a um acordo. Dá três quartos do bolo ao mais velho e um quarto ao irmão mais novo. Esta história assume um aspecto mais sério quando se identifica o irmão mais velho com a Sérvia, o irmão mais novo com a Bósnia e a mãe com as potências ocidentais. "

In As Notícias e a Matemática

Método do Divisor-Selector

Vulgarmente conhecido pelo método "tu divides eu escolho" será aquele que mais frequentemente usamos no nosso dia-a-dia. Daí que seja o mais simples e conhecido. Este método **envolve dois participantes**.



Consideremos um conjunto de bens divisíveis, S, para repartir por dois jogadores. Escolhe-se aleatoriamente um jogador e dá-se início à seguinte sucessão de passos:

1º Passo: O jogador P_1 divide o conjunto S em duas partes;

2º Passo: O jogador P_2 escolhe uma das partes;

3º Passo: O jogador P_1 fica com a parte que P_2 não escolheu.

Este método garante que cada um dos jogadores fica com a parte que considera justa: o jogador P_1 porque divide S em duas partes que considera iguais, e o jogador P_2 porque escolhe a que lhe convém. Temos então o cumprimento dos seguintes axiomas:

Axioma 1 – Qualquer jogador pode dividir o conjunto S em duas partes de modo que qualquer uma delas seja aceite por ele como justa.

Axioma 2 – Dada qualquer divisão de S em duas partes cada jogador considera que pelo menos uma das partes é aceitável.

Note-se ainda que este método pode ser aplicado a mais de dois jogadores. Se tivermos quatro jogadores o processo desdobra-se em duas etapas. A primeira, agrupar os jogadores em dois grupos (com dois jogadores cada um). Temos assim um grupo que divide e outro que escolhe. Numa segunda fase, cada par de jogadores divide a sua parte seguindo de novo o processo de um partir e outro escolher. Facilmente se consegue chegar à conclusão que este método pode ser aplicado, em geral, para **grupos em que o número de intervenientes seja uma potência de base dois**.

O exercício seguinte exemplifica uma das aplicações possíveis deste método:

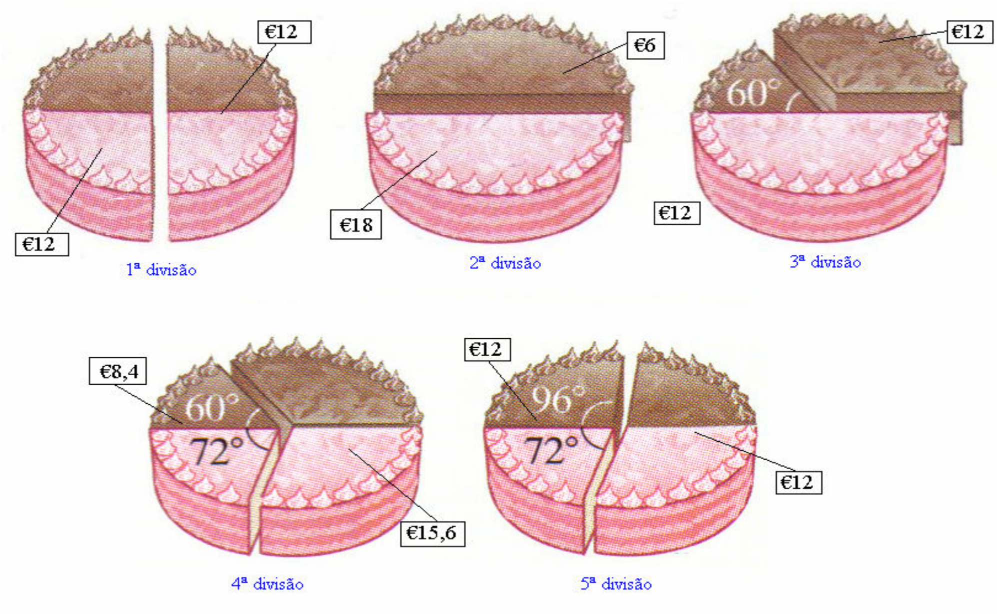
EXERCÍCIO :

O Nuno e a Liliana pretendem dividir um bolo de morango e chocolate, no valor de €24. O Nuno prefere chocolate três vezes mais do que morango e a Liliana prefere chocolate duas vezes mais do que morango.

(a) Se o Nuno for o divisor, quais das seguintes divisões serão possíveis?

1ºdivisão 2ºdivisão 3º divisão 4ºdivisão 5º divisão

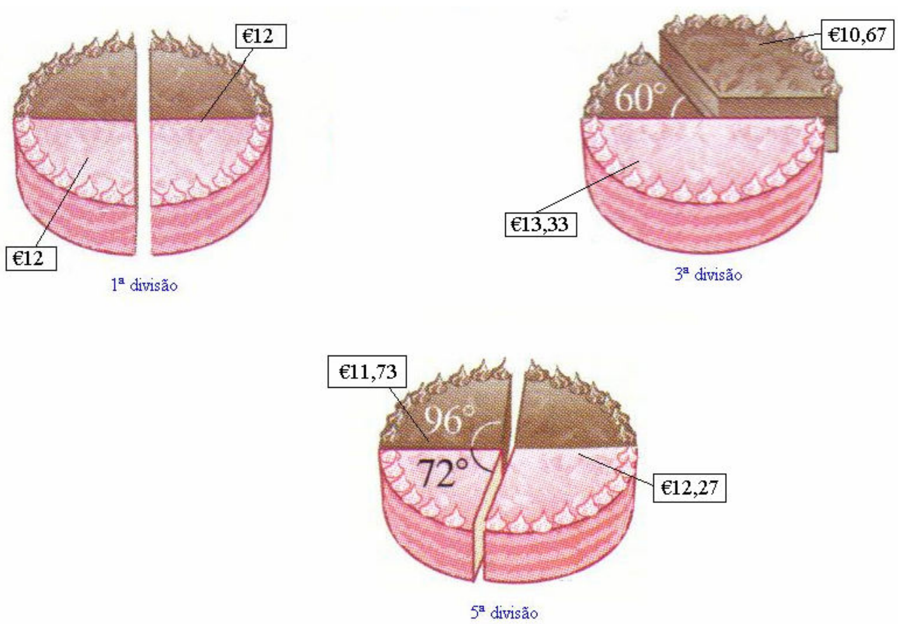
Para melhor visualizarmos a resposta à pergunta, analisemos o valor das duas parcelas em cada divisão, segundo o sistema de valores do Nuno:



Podemos agora mais facilmente compreender que a resposta a esta alínea será: 1ª, 3ª e 5ª divisões.

(b) Para cada uma das divisões de acordo com o sistema de valores do Nuno, indique qual a melhor escolha para a Liliana.

Temos que, segundo o sistema de valores da Liliana, cada parcela terá o seguinte valor em cada divisão:



Portanto, na 1ª divisão é indiferente para a Liliana ficar com uma ou outra fatia. Na 3ª divisão facilmente se observa que a melhor fatia será a que vale para ela €13,33. Analogamente, na 5ª divisão observa-se que a melhor fatia será a que para ela vale €12,27.

Este método funciona para dois participantes, e até já vimos que funciona para um número igual a uma potência de dois.

Mas e o caso de três participantes?

Método do Divisor Único

Este método é uma adaptação do anterior para três (ou mais) jogadores. Para uma melhor compreensão e facilidade de exposição passar-se-à à descrição deste método apenas para o caso da partilha entre três jogadores. Sejam então os jogadores P_1, P_2 e P_3. O objectivo é dividir um conjunto S em 3 partes disjuntas e distribui-las pelos jogadores de modo a que cada jogador considere a sua parte como justa. Mais uma vez escolhe-se um dos jogadores aleatoriamente para ser o divisor.

Este esquema de divisão justa pressupõe a passagem por três passos:

1º Passo: (Divisão) O divisor, previamente escolhido (consideremos que é o jogador P_1), divide os bens em três partes. Não sabendo qual das partes ficará para si, irá efectuar a divisão de forma a que qualquer uma delas lhe interesse.

2º Passo: (Votação) Cada um dos restantes jogadores declara, secretamente, quais das três peças são, na sua opinião justas, podendo votar em mais do que uma.

3º Passo: (Atribuição das parcelas) Esta atribuição dependerá das declarações do passo anterior dando origem a três casos distintos:

- **CASO 1:** Cada selector declara partes distintas e não mais do que uma.

Uma possível tabela para exemplificar este caso será:

Partes

		S_1	S_2	S_3
	P_1	1	1	1
Jogadores	P_2	0	1	0
	P_3	0	0	1

Partes

Assim, P_2 e P_3 ficarão com as partes escolhidas e P_1 (o divisor) ficará com a restante.

- **CASO 2:** No máximo uma das partes não é declarada. Vejamos, então, a tabela seguinte:

Partes

Jogadores		S_1	S_2	S_3	Partes
	P_1	1	1	1	
	P_2	1	0	1	
	P_3	0	0	1	

Neste caso, um dos selectores apenas declara uma parte como aceitável, portanto é essa a parte que lhe é atribuída. O outro selector escolhe duas porções. Como uma das que escolheu já foi atribuída, fica com a outra porção que também considera aceitável, ficando assim satisfeito. O divisor fica com a parcela que sobra.

- **CASO 3:** Ambos os selectores declaram as mesmas partes. Há mais do que uma parte não declarada. Neste caso, atribui-se ao divisor um dos pedaços não declarados (escolhido aleatoriamente). Os restantes dois pedaços juntam-se e aplica-se o Método Divisor-Selector. Uma possível tabela para exemplificar este caso será:

Partes

Jogadores		S_1	S_2	S_3	Partes
	P_1	1	1	1	
	P_2	1	0	0	
	P_3	1	0	0	

Este método permite que cada jogador obtenha uma parte justa (de acordo com o seu sistema de valores) sempre que os três axiomas seguintes se verificarem:

Axioma 1 – Qualquer jogador pode dividir o conjunto S em três partes, de maneira que considere qualquer das partes como justa;

Axioma 2 – Dada qualquer divisão do conjunto S em três partes, cada jogador considerará pelo menos uma das partes aceitável;

Axioma 3 – Quaisquer dois jogadores que considerem uma parte S_i não aceitável, podem obter uma divisão justa da parte restante através do método "divisor-selector".

EXERCÍCIO :

Três parceiros (Alexandra, Sandra e o André) pretendem dividir justamente uma porção de terreno usando o método do Divisor-Único. Com a ajuda de um mapa, André divide a propriedade em três parcelas (S_1, S_2, S_3).

(a) Descreva uma possível divisão justa do terreno perante as seguintes declarações:

(i) Alexandra : S_2 e S_3

(ii) Sandra : S_1 e S_3

(b) Descreva uma possível divisão justa do terreno perante as seguintes declarações:

(i) Alexandra : S_1, S_2 e S_3

(ii) Sandra : S_1

(c) Descreva uma possível divisão justa do terreno perante as seguintes declarações:

(i) Alexandra : S_1

(ii) Sandra : S_2

(d) Descreva como proceder para obter uma possível divisão justa do terreno segundo as seguintes declarações:

(i) Alexandra : S_2

(ii) Sandra : S_2

Respostas: (a) Sandra-S_1 , Alexandra-S_2 e André S_3;

(b) Sandra-S_1 , Alexandra-S_2 e André S_3;

(c) Sandra-S_2 , Alexandra-S_1 e André S_3;

(d) O André fica com S_1 e, pelo método de divisor-selector, a Sandra e a Alexandra dividem S_1 e S_2 ;

Método do Selector Único

Para simplificar abordaremos este método para o caso de três jogadores. Sendo assim, teremos dois divisores e um selector. Aleatoriamente escolhe-se um selector e os restantes serão divisores. O processo baseia-se em três passos fundamentais:

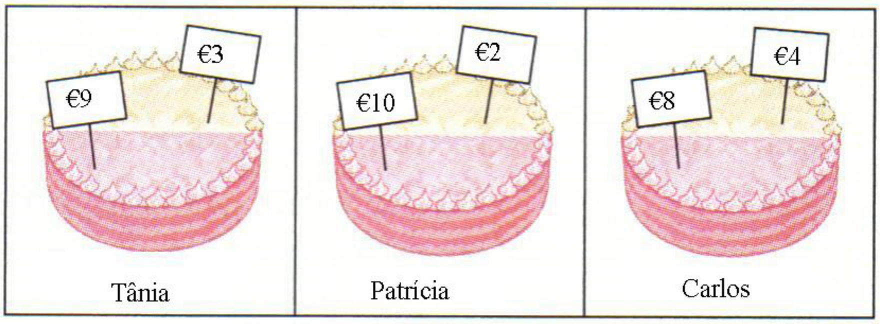
1º Passo: (Primeira divisão) Os dois divisores dividem S em duas partes justas usando o método do divisor-selector. Cada um considera que a sua parte vale pelo menos metade do total.

2º Passo: (Segunda divisão) Cada um dos divisores divide a sua parte em três porções que na sua opinião são igualmente valiosas.

3º Passo: (Selecção) O selector escolhe agora uma das três porções resultantes das divisões de cada um dos divisores para si, ficando cada divisor com o que restou das suas partes.

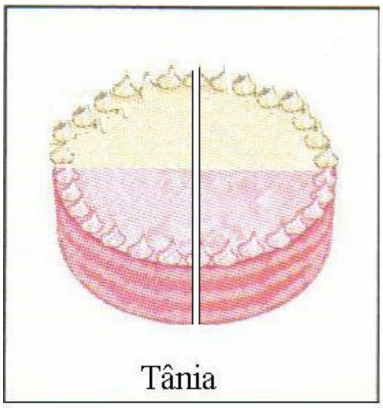
EXEMPLO:

A mãe da Tânia, da Patrícia e do Carlos comprou-lhes um bolo de morango e laranja para o lanche que custou €12. Eles decidiram dividi-lo usando o método do selector único. A Tânia prefere três vezes mais morango do que laranja, portanto a metade que tem morango vale, para ela, €9 e a outra metade vale só €3. A Patrícia prefere quatro vezes mais morango do que laranja, logo, a metade que tem morango vale, na sua opinião, €10, enquanto que a outra metade vale €2. O Carlos, por sua vez, prefere duas vezes mais morango do que laranja, valendo a metade que tem laranja €4 e a metade que tem morango €8.



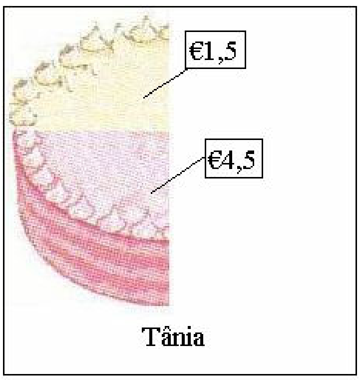
Suponhamos que a Tânia e a Patrícia são os divisores e o Carlos é o selector. Aleatoriamente, decidiu-se que seria a Tânia a efectuar a primeira divisão. Fê-lo do seguinte modo:

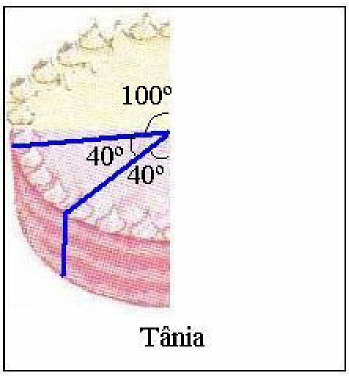
<u>1ª Divisão:</u>

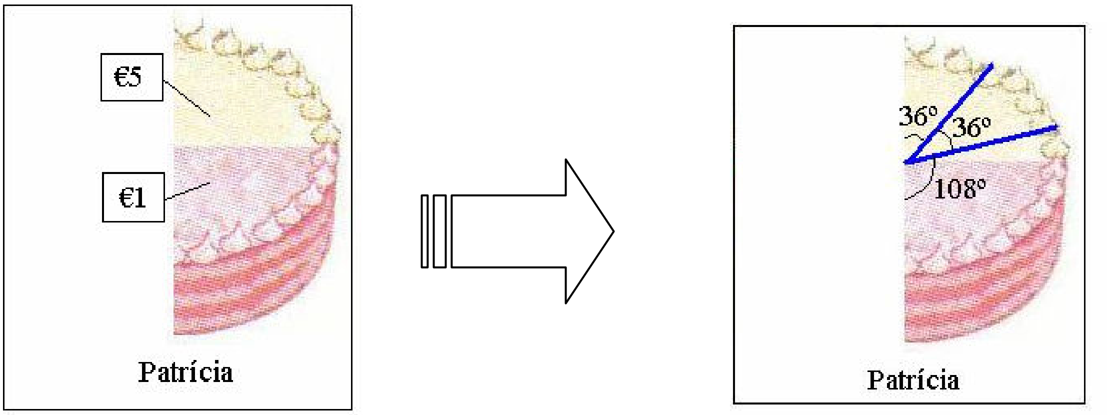


Como as duas porções têm igual valor para todos, é irrelevante qual das porções é dividida pela Tânia e qual é dividida pela Patrícia. Cada uma divide agora a sua porção em três partes que considere igualmente valiosas.

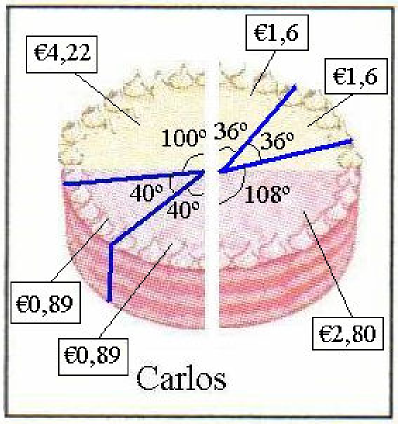
<u>2ª Divisão:</u>





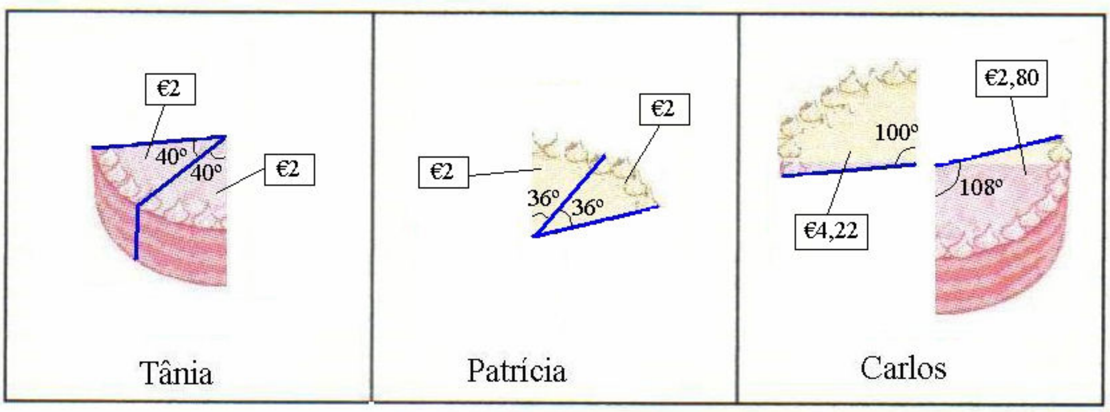


O Carlos escolhe, retirando uma parte a cada um dos outros dois. É óbvio que este escolhe as partes que para ele são mais valiosas.



No final da divisão cada um deles obtém uma parte que equivale a pelo menos 1/3 do valor total do bolo (€4):

<u>Selecção:</u>



Pode ainda verificar-se que, neste caso, o selector (o Carlos) sente que recebeu mais do que a sua parte justa, enquanto que as duas divisoras consideram que receberam exactamente a sua parte justa.

Portanto, uma das questões que surge naturalmente é: *será mais vantajoso ser selector ou divisor?*

Método do Último a Diminuir

Uma versão do método divisor-selector para o caso de N participantes é chamada de método do último a diminuir. Este método distingue-se dos anteriores por todos os jogadores serem simultaneamente divisores e selectores. Consideremos o caso de quatro jogadores. Antes de efectuar a divisão ordenam-se aleatoriamente os quatro jogadores (P_1, P_2, P_3, P_4). Esta ordem mantém-se até ao final da divisão, que se efectua do seguinte modo:

1º Passo: O jogador P_1 escolhe uma parte de S que pensa corresponder a ¼ de S.

2º Passo: De seguida o jogador P_2 pode:

a. Concordar com a divisão feita por P_1 e passar a sua vez ao jogador P_3.

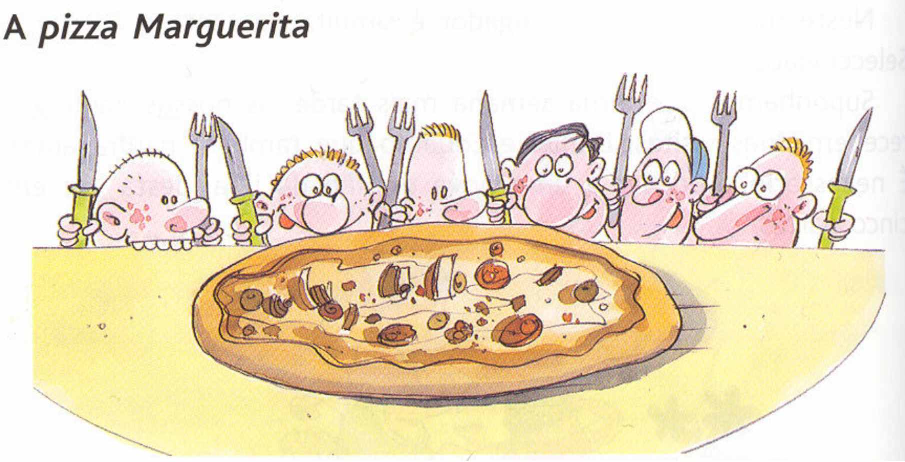
b. Discordar com a divisão e diminuir a porção escolhida por P_1, de modo a esta porção corresponder a ¼ de S, segundo o seu sistema de valores.

3º Passo: Os jogadores P_3 e P_4, de acordo com a parcela que está agora em jogo, irão proceder do mesmo modo que P_2.

4º Passo: Depois de todos os jogadores terem actuado sobre a parcela, esta é atribuída ao último jogador que optar por diminui-la, saindo assim do jogo. Este jogador será P_1 se nenhum dos restantes a considerar injusta (diminuindo-a).

5º Passo: O processo repete-se novamente (com menos um jogador) uma e outra vez até que ficam apenas dois jogadores. Nesta situação, os dois jogadores finais podem seguir este mesmo processo ou optar por usar o método do divisor-selector.

EXERCÍCIO:



Quatro estudantes (João, Tiago, Inês e Maria), numa sessão contínua de estudo, decidem encomendar uma pizza Marguerita e utilizar o Método do último a diminuir, que estão a estudar para a dividir.

Aleatoriamente, foi atribuída a seguinte ordem crescente para jogar: João (J), Tiago (T), Inês (I) e Maria (M) (por comodidade, usaremos só a primeira letra do nome).

Sabendo que na 1ª volta ninguém diminui e na 2ª volta só T e I diminuem...

(a) Quem fica com a primeira fatia? *Resposta: J*

(b) Quem corta a fatia no início da 2ª volta? *Resposta: T*

(c) Quem fica com a segunda fatia? *Resposta: I*

(d) Quantas voltas são necessárias para que todos obtenham uma fatia?
Resposta: 3 voltas

Método da Faca Deslizante

Este método é utilizado para a divisão de um bolo quando temos um qualquer número de jogadores. Distingue-se dos anteriores por o divisor não ser nenhum dos jogadores; no entanto não põe em causa a validade do método como um método de divisão justa, uma vez que este jogador não interfere, ou melhor, não opina sobre a divisão.

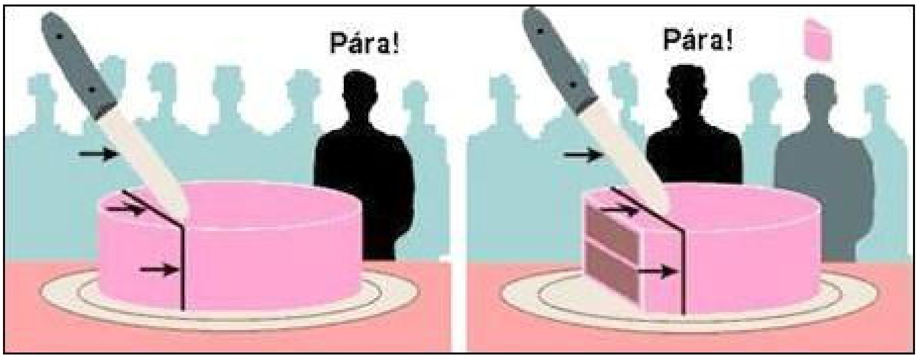
Os passos da divisão são os seguintes:

1º Passo: Alguém que não pretende ficar com nenhuma fatia do bolo move a faca contínua e lentamente sobre a porção do bolo;

2º Passo: Qualquer um dos jogadores dirá “pára” a qualquer momento;

3º Passo: Quando tal acontecer o bolo será cortado ficando a respectiva fatia para esse jogador;

Este processo deve ser repetido o número de vezes necessário até que todos os jogadores tenham uma fatia.



Este método resulta se o bolo em causa for homogéneo, mas se não for? Será possível encontrar um algoritmo em que todos os intervenientes fiquem com igual quantidade dos diversos componentes de por exemplo um bolo-rei? A resposta a esta questão foi dada por um teorema que o matemático polaco Hugo Steinhaus (1887 – 1972) demonstrou nos anos 40 e que veio a ser conhecido pelo curioso nome de Teorema da Sanduíche de Fiambre. Considere-se um objecto tridimensional com três componentes, por exemplo, uma sanduíche com pão, queijo e fiambre (não interessa a distribuição destes componentes). O que este resultado prova é que há sempre um plano que divide o objecto em duas partes, de tal forma que cada uma delas contenha igual quantidade dos três componentes. De uma forma geral, o teorema diz que em "n" dimensões há sempre um hiperplano que divide simultaneamente ao meio "n" componentes. Dado que vivemos num espaço a três dimensões e o bolo-rei tem muito mais de três constituintes, o teorema informa-nos que não há faca que os reparta todos equitativamente.

3.2. O caso discreto

Estes métodos referem-se à divisão de objectos que não podem ser subdivididos em partes mais pequenas (ou não tão facilmente divisíveis) e em que cada jogador terá que ficar com um ou mais objectos por inteiro. Como exemplo temos: divisão de uma casa por herdeiros, a partilha de rebuçados por crianças, distribuição de lugares num parlamento.
Note-se que são, mais uma vez, divisões eminentes no nosso quotidiano.
Vamos tratar os métodos seguintes:

- Método das Licitações Fechadas (também designado por Método das Licitações Secretas);
- Método dos Marcadores.

Método das Licitações Fechadas

Este método é dos mais importantes para problemas deste tipo e muito utilizado no que diz respeito a heranças. Consiste em atribuir valores monetários aos objectos e consequentemente dividi-los em partes justas, isto é, cada indivíduo terá que despender ou receber dinheiro.

Processa-se em 4 fases:

Licitação:

Etapa em que cada indivíduo atribui um valor monetário a cada objecto. Na prática quando o indivíduo atribui um valor monetário ao bem ele está a considerar não só o valor material do objecto mas também o seu valor afectivo.

Distribuição:

Como o próprio nome indica esta etapa diz respeito à distribuição dos objectos pelos indivíduos. Cada objecto caberá ao jogador que lhe atribuir maior valor.

Pagamento:

Diz respeito à etapa em que cada indivíduo terá de pagar/receber dinheiro consoante a sua proposta for superior/inferior à sua *parte justa*.

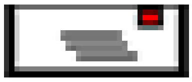
A *parte justa* varia consoante as licitações de cada jogador e calcula-se através da razão entre a soma das suas licitações e o número de jogadores.

Excesso:

Esta fase consiste em dividir o dinheiro em excesso de modo a que cada jogador receba a mesma quantia.

Para que este método seja honesto terão de se verificar as seguintes condições:

- cada indivíduo deve fazer a sua própria licitação sem conhecer a proposta dos restantes (uma forma de o fazer será através de envelopes fechados);



- cada indivíduo deve ter dinheiro suficiente para as suas licitações;
- cada indivíduo deve aceitar dinheiro em substituição do objecto.

Para melhor compreendermos este método passemos ao seguinte exemplo:

Após o falecimento do Sr. João, os seus quatro filhos, cujos nomes são respectivamente Ana, Pedro, Rita e Luís viram-se "obrigados" a partilhar os bens do seu pai. O Sr. João possuía uma casa, um cavalo e uma mota de água.

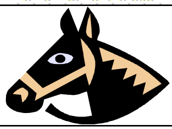
Foram de comum acordo em utilizar o método das licitações secretas.

Vejamos como se processam as quatro fases referidas anteriormente:

Licitação:

É então a altura de os filhos do Sr João fazerem as suas propostas, isto é, atribuírem o valor monetário aos bens herdados.

A tabela seguinte evidencia tais valores:

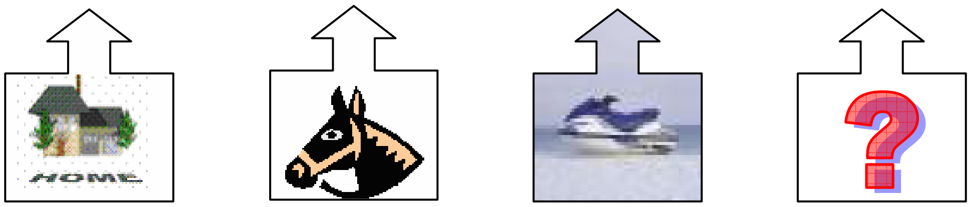
	ANA	**PEDRO**	**RITA**	**LUÍS**
	€ 120 000	€ 140 000	€ 160 000	€ 180 000
	€ 4 000	€ 5 000	€ 6 000	€ 3 000
	€ 11 000	€ 13 000	€ 10 000	€ 8 000

Distribuição:

Façamos agora a distribuição dos bens.

É óbvio pelo descrito anteriormente que cabe ao Luís ficar com a casa, a Rita com o cavalo e o Pedro com a mota de água pois ambos os herdeiros ofereceram a quantia mais elevada pelos bens, respectivamente. Neste momento a Ana tem conhecimento que não lhe caberá ficar com nenhum dos bens.

LUÍS **RITA** **PEDRO** **ANA**



Surgem então as seguintes questões: O que recebe afinal a Ana? Não está a ser prejudicada?

É o que vamos responder de seguida!

Pagamento:

Vejamos qual é a ***parte justa*** dos bens relativamente a cada herdeiro.

A tabela seguinte evidencia tais valores:

	ANA	**PEDRO**	**RITA**	**LUÍS**
	€ 120 000	€ 140 000	€ 160 000	€ 180 000
	€ 4 000	€ 5 000	€ 6 000	€ 3 000
	€ 11 000	€ 13 000	€ 10 000	€ 8 000
Soma das licitações	€ 135 000	€ 158 000	€ 176 000	€ 191 000
Parte justa	€ 33 750	€ 39 500	€ 44 000	€ 47 750

Esta é a altura em que é necessário abrir uma conta em nome da herança ("banca").

Comparando o valor do objecto recebido por cada herdeiro com o valor que ele estimou ser a parte justa, cada indivíduo terá de pagar à/receber da "banca" consoante o valor da parte justa for superior/inferior ao valor do objecto obtido. Torna-se assim evidente que se a um dos herdeiros não for atribuído nenhum objecto ele terá que ser reembolsado pela "banca", este valor não é mais do que o que este considera ser a sua parte justa da herança. Isto permitir-nos-á responder às questões pendentes em relação à Ana.

Vejamos o que acontecerá a cada um dos herdeiros neste exemplo concreto:

LUÍS **Pagar** € 180 000 - € 47 750 = € 132 250

RITA **Receber** € 44 000 - € 6 000 = € 38 000

PEDRO **Receber** € 39 500 - € 13 000 = € 26 500

ANA **Receber** € 33 750

Excesso:

Feitas as operações bancárias temos:

€ 132 250 - € 38 000 - € 26 500 - € 33 750 = € 34 000

Sobram assim na conta criada em nome da herança € 34 000. Logo dividimos este valor pelos quatro herdeiros cabendo assim a cada um € 8 500 (€ 34 000 / 4 = € 8 500).

Temos assim:

LUÍS **Pagou** € 132 250 - € 8 500 = € 123 750

RITA **Recebeu** € 38 000 + € 8 500 = € 46 500

PEDRO **Recebeu** € 26 500 + € 8 500 = € 35 000

ANA **Recebeu** € 33 750 + € 8 500 = € 42 250

Globalmente temos:

LUÍS	**RITA**	**PEDRO**	**ANA**
 **-** **€ 123 750**	 **+** **€ 46 500**	 **+** **€ 35 000**	**€ 42 250**

Relativamente à sua própria avaliação:

LUÍS **Recebe** € 180 000 - € 123 750 = € 56 250

RITA **Recebe** € 6 000 + € 46 500 = € 52 500

PEDRO **Recebe** € 13 000 + € 35 000 = € 48 000

ANA **Recebe** € 42 250

Isto mostra que:

- Todos acabaram por receber mais € 8 500 do que aquilo que consideravam justo!

Esta quantia não é mais do que o valor que coube a cada um deles da divisão do excesso.

- Nenhum dos herdeiros tem assim motivos para se considerar injustiçado! 

Método dos Marcadores

Como já referimos este método faz parte dos problemas de Partilha Equilibrada no caso discreto.

Supondo que temos N indivíduos pelos quais queremos distribuir M objectos, este método consiste em:

- alinhar por uma ordem fixa durante todo o processo de divisão, os M objectos a partilhar sendo esta (normalmente para esta sequência utilizam-se Array's);

- de seguida cabe a cada indivíduo partir a sequência em N partes que ele considera justas, de forma a que os restantes não tenham conhecimento da maneira como o fez. Uma forma de o fazer será cada indivíduo colocar marcas nos lugares onde pretende partir a sequência (teremos assim N-1 marcas distintas por parte de cada indivíduo) e entregar a sua proposta num envelope fechado;

- no final cada indivíduo ficará com uma das N partes da sequência que considerou justa não sabendo, à priori, qual delas.

Para melhor compreender este método, analisemos o seguinte exemplo:

Após o Euro 2004, a UEFA decidiu em conjunto com as Federações de Futebol de cada país interveniente neste evento que seriam doados equipamentos dos jogadores das diferentes selecções a instituições de caridade de cada país.

A Federação Portuguesa de Futebol decidiu distribuir estes equipamentos pelas seguintes instituições:

- Casa do Gaiato
- Santa Casa da Misericórdia
- APPACDM

A Portugal couberam os seguintes equipamentos:

- 2 equipamentos do Beckham 
- 1 equipamento do Raul 
- 2 equipamentos do Zidane 
- 1 equipamento do Poborsky 
- 1 equipamento do Nikopolidis 
- 1 equipamento do Ronaldo 
- 3 equipamentos do Figo 
- 1 equipamento do R.Carvalho 

Aleatoriamente, coloca-se os equipamentos por ordem e numeraram-se como se indica a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Seguidamente, os representantes de cada instituição marcam em anonimato (por exemplo num papel) os segmentos da sequência que consideram como partes justas.

Obtemos a seguinte divisão:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Notar que:

- C_1 e C_2 dizem respeito à Casa do Gaiato;
- S_1 e S_2 dizem respeito à Santa Casa da Misericórdia;
- A_1 e A_2 dizem respeito à APPACDM.

De seguida faz-se a distribuição dos equipamentos pelos representantes das 3 instituições, isto é, é atribuído um segmento a cada instituição.

Observa-se assim a linha da esquerda para a direita até encontrar o primeiro marcador respeitante ao primeiro conjunto de marcadores.

Neste exemplo, o primeiro marcador que encontramos (C_1) diz respeito à Casa do Gaiato pelo que lhe é entregue o seu segmento (1).

Casa do Gaiato:

1

A Casa do Gaiato recebe uma parte justa dos equipamentos e os marcadores respeitantes a esta instituição são retirados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Procura-se de seguida o primeiro do segundo conjunto de marcadores. Uma vez que encontramos dois (A_2 e S_2) na mesma posição, qual deles devemos escolher? Vamos tirar à sorte com, por exemplo, o lançamento de uma moeda. Suponhamos que coube à Santa Casa da Misericórdia. Atribui-se a esta instituição o segundo segmento (4-9) que vai do seu primeiro marcador (S_1) até ao segundo (S_2).

Temos então:

Santa Casa da Misericórdia:

4	5	6	7	8	9

É a altura de retirar os marcadores respeitantes à Santa Casa da Misericórdia.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

É então trivial que o único segmento que resta para a APPACDM seja o 10-12.

Assim sendo temos:

APPACDM:

10	**11**	**12**

Mas como podemos ver restam ainda 2 equipamentos para distribuir:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

O número de equipamentos que resta é demasiado pequeno para aplicar novamente o método.

É de notar que o vamos fazer aleatoriamente, isto é, organiza-se uma ordem pela qual as instituições vão escolher um a um os equipamentos que restam até que estes se esgotem. Neste exemplo estipula-se a seguinte: Casa do Gaiato – Santa Casa da Misericórdia – APPACDM.

O representante da Casa do Gaiato escolhe o equipamento do Raul (3), de seguida o representante da Santa Casa da Misericórdia escolhe o equipamento do Zidane (2). Não resta assim mais nenhum equipamento para distribuir pela APPACDM.

Temos assim a seguinte distribuição final:

Casa do Gaiato :

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Santa Casa da Misericórdia:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

APPACDM:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Após a exposição do método, podemos verificar algumas vantagens e desvantagens deste, que passamos a referir:

Vantagens:

- não requer dinheiro (ao contrário do método anterior);

Desvantagens:

- não é eficaz se o número de indivíduos for superior ao número de objectos a distribuir (ao contrário do método anterior);
- só é justo em condições restritas, isto é, quando os objectos a dividir são de valores baixos e homogéneos (torna-se assim praticamente impossível dividir de modo justo por exemplo um conjunto de rebuçados e um barco).

3.3. O caso misto

Este tipo de problemas da divisão justa refere-se à divisão de bens em que há um conjunto de objectos que são divisíveis e um outro que tem objectos não divisíveis. Podemos então dividir este tipo de problemas em dois casos, no primeiro usamos métodos contínuos e no segundo métodos discretos. Para melhor ilustrar este caso suponhamos, por exemplo, uma herança com casas (entre outros bens discretos) e dinheiro para dividir.

4-DIVISÃO PROPORCIONAL

"Este é um dos poucos assuntos em que a História, a Politica e a Matemática se ligam."

Peter Tannenbaum in **EXCURSIONS IN MODERN MATHEMATICS**

Recentemente passámos por um período de eleições: autárquicas/01, legislativas/02 e europeias/04.

Nas legislativas de 2002 vimos como foram disputados os 230 lugares da Assembleia da República e como a eleição de mais um deputado era determinante para cada partido político.

Ao longo dos anos, desenvolveram-se vários métodos de partilha ligados a este tipo de problemas de divisão proporcional. Seguidamente, analisaremos vários métodos de divisão proporcional que fazem parte da história dos EUA e o método usado em Portugal.

Os problemas da divisão proporcional enquadram-se nos problemas de partilha equilibrada e integram-se no caso discreto. Neste caso, tentaremos distribuir objectos iguais por jogadores sujeitos a partes diferentes.

Lugares num Parlamento

O exemplo mais comum que se prende com este tipo de partilha é a divisão dos lugares num parlamento pelos diferentes círculos eleitorais (Assembleia da República Portuguesa), países (Parlamento Europeu) ou estados (Estados Unidos da América).

Em 1787, delegados dos 30 estados encontraram-se, em Filadélfia, para redigir uma constituição para a nova nação. A decisão final está consagrada nas secções 2 e 3 do artigo 1 da Constituição dos EUA, que estabelece que a legislatura é formada por duas Câmaras:

- a **Câmara dos Representantes**, onde cada estado tem um número de representantes que é função da sua população;
- o **Senado**, representado por dois senadores de cada estado.

A maioria das democracias europeias segue um esquema similar. A Constituição Portuguesa estabelece que os 230 lugares da Assembleia da República são distribuídos da seguinte forma:

- 4 lugares são atribuídos aos círculos eleitorais estrangeiros (2 ao círculo europeu e 2 ao círculo não europeu), independentemente das suas populações;
- 226 lugares são distribuídos pelos 20 círculos eleitorais, em proporção com a população respectiva.

O problema da divisão proporcional é saber como se consegue esta proporção. Por exemplo, segundo os dados do censo eleitoral de 1790 dos EUA, das 3615920 pessoas com direito ao voto, 353523 pertenciam ao estado de Carolina do Norte. Portanto, como a Câmara dos Representantes era constituída por 105 membros, ao estado de Carolina do Norte caberiam

$\frac{353523}{3615920} \times 105 = 10{,}265$ lugares. Mas, 10,265 não é um número inteiro. Como resolver este problema de divisão proporcional?

Métodos Eleitorais

Para solucionar o problema de divisão proporcional surgiram os métodos eleitorais. Método eleitoral define-se como o mecanismo matemático pelo qual se transformam votantes/votos (população) em mandatos (lugares num parlamento).

Nos EUA, para encontrar o número de representantes da Câmara, correspondente a cada estado da união, usaram-se vários métodos eleitorais. Estes foram-se combinando à medida que se foram conhecendo as suas virtudes e defeitos. Como veremos, nenhum é matematicamente perfeito e a sua aplicação depende em grande medida de uma decisão política.

Entre os mais usados e importantes estão os métodos de Alexander Hamilton, Thomas Jefferson, John Quincy Adams, Daniel Webster e, o actual, Huntington-Hill.

Antes de passarmos a descrevê-los, necessitamos de algumas definições.

Sejam: **n**: número de círculos eleitorais;

p: população total recenseada;

pi: população do círculo *i*, *i*=1,2,…,n;

m: número de mandatos;

ai: número de mandatos atribuídos ao círculo *i*, *i*=1,2,…,n.

Chama-se **divisor eleitoral** (ou quociente eleitoral) ao quociente entre a população total recenseada e o número de mandatos a atribuir, isto é, $D = \frac{p}{m}$

Chama-se **quota** do círculo *i* a $q_i = \frac{p_i}{p} \times m = \frac{p_i}{D}$

Os arredondamentos, por defeito ($[q_i]$) e por excesso ($[q_i]+1$), da quota q_i designam-se, respectivamente, por **quota mínima** e **quota máxima**.

Assim, o problema de divisão proporcional consiste em atribuir $a_1, a_2, ..., a_s$ ($s \leq m$) mandatos a cada círculo de tal forma que a_i seja o mais aproximado possível da sua quota q_i e se tenha $\sum_{i=1}^{s} a_i = m$.

Matematicamente, seria óptimo que funcionassem os arredondamentos convencionais. Mas, como vamos ver, o método convencional não funciona.

Tomemos como exemplo a distribuição de acentos parlamentares na Assembleia da República Portuguesa. Observemos os seguintes dados retirados do site do Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral (www.stape.pt), do Ministério da Administração Interna:

Mandatos a atribuir:	**226**
Eleitores inscritos:	**8687945**
Número de círculos:	**20**

01 Lisboa	1785480	**11** Viana do Castelo	228575
02 Porto	1430272	**12** Madeira	223834
03 Braga	674399	**13** Vila Real	218050
04 Setúbal	653797	**14** Castelo Branco	186795
05 Aveiro	582032	**15** Açores	186641
06 Santarém	385044	**16** Guarda	168220
07 Leiria	379862	**17** Bragança	148039
08 Coimbra	373642	**18** Évora	145306
09 Viseu	351016	**19** Beja	138507
10 Faro	320049	**20** Portalegre	108385

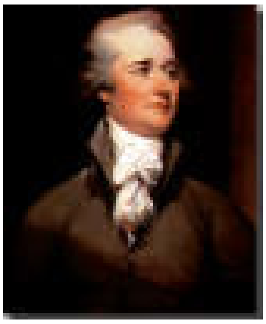
Método Convencional

Aplicando o método convencional ao nosso exemplo, temos a seguinte tabela:

Círculo eleitoral	p_i	q_i	a_i
Lisboa	1785480	46,446	46
Porto	1430272	37,206	37
Braga	674399	17,543	18
Setúbal	653797	17,007	17
Aveiro	582032	15,140	15
Santarém	385044	10,016	10
Leiria	379862	9,881	10
Coimbra	373642	9,720	10
Viseu	351016	9,131	9
Faro	320049	8,325	8
Viana do Castelo	228575	5,946	6
Madeira	223834	5,823	6
Vila Real	218050	5,672	6
Castelo Branco	186795	4,859	5
Açores	186641	4,855	5
Guarda	168220	4,376	4
Bragança	148039	3,851	4
Évora	145306	3,780	4
Beja	138507	3,603	4
Portalegre	108385	2,819	3
Totais	8687945		227

Facilmente se verifica pela tabela que este método não funciona, pois tem-se que $\sum_{i=1}^{20} a_i = 227 \neq 226$.

Método de Hamilton



Alexander Hamilton
(1755-1804)

O método de Hamilton foi um dos primeiros métodos apresentados nos EUA. Alexander Hamilton foi o 1º Secretário do Tesouro dos EUA e ajudante do então presidente George Washington, tendo fundado nesse período o Banco Nacional. O seu método foi aprovado em 1791, logo após o censo de 1790, mas foi vetado pelo presidente Washington (1º veto presidencial da história dos EUA). Posteriormente, em 1852, foi aprovado pelo Congresso e manteve-se em vigor até 1901.

De todos os métodos que vamos analisar, este é o matematicamente mais simples.

Vejamos o algoritmo:

- Calcular o divisor eleitoral;
- Para cada estado, calcular a quota;
- Atribuir a cada estado a sua quota mínima;
- Distribuir os lugares que sobram (um a um) pelos estados, por ordem decrescente das partes decimais das suas quotas.

A tabela seguinte é o resultado deste método aplicado ao nosso exemplo.

Círculo eleitoral	p_i	q_i	$[q_i]$	q_i-$[q_i]$		a_i
Lisboa	1785480	46,446	46	0,446	0	46
Porto	1430272	37,206	37	0,206	0	37
Braga	674399	17,543	17	0,543	0	17
Setúbal	653797	17,007	17	0,007	0	17
Aveiro	582032	15,140	15	0,140	0	15
Santarém	385044	10,016	10	0,016	0	10
Leiria	379862	9,881	9	0,881	1	10
Coimbra	373642	9,720	9	0,720	1	10
Viseu	351016	9,131	9	0,131	0	9
Faro	320049	8,325	8	0,325	0	8
Viana do Castelo	228575	5,946	5	0,946	1	6
Madeira	223834	5,823	5	0,823	1	6
Vila Real	218050	5,672	5	0,672	1	6
Castelo Branco	186795	4,859	4	0,859	1	5
Açores	186641	4,855	4	0,855	1	5
Guarda	168220	4,376	4	0,376	0	4
Bragança	148039	3,851	3	0,851	1	4
Évora	145306	3,780	3	0,780	1	4
Beja	138507	3,603	3	0,603	1	4
Portalegre	108385	2,819	2	0,819	1	3
Totais	8687945		215		11	226

Numa breve análise à tabela verificamos que Hamilton segue a ***regra da quota***, isto é, **o resultado da divisão de lugares para um estado será sempre a quota máxima ou a quota mínima.**

O método de Hamilton estava a ser usado, em 1880, quando surgiu um problema curioso: o **Paradoxo de Alabama.**

Paradoxo de Alabama

O Paradoxo de Alabama acontece quando um aumento no número total de lugares, força um estado a perder um dos seus lugares.

Aumentemos apenas um lugar no Parlamento Português, ou seja, $m = 227$. A distribuição de mandatos surge da seguinte forma:

Círculo eleitoral	p_i	q_i	$[q_i]$	$q_i-[q_i]$		a_i	H
Lisboa	1785480	46,651	46	0,651	1	47	46
Porto	1430272	37,370	37	0,370	0	37	37
Braga	674399	17,621	17	0,621	1	18	17
Setúbal	653797	17,083	17	0,083	0	17	17
Aveiro	582032	15,207	15	0,207	0	15	15
Santarém	385044	10,060	10	0,060	0	10	10
Leiria	379862	9,925	9	0,925	1	10	10
Coimbra	373642	9,763	9	0,763	1	10	10
Viseu	351016	9,171	9	0,171	0	9	9
Faro	320049	8,362	8	0,362	0	8	8
Viana do Castelo	228575	5,972	5	0,972	1	6	6
Madeira	223834	5,848	5	0,848	1	6	6
Vila Real	218050	5,697	5	0,697	1	6	6
Castelo Branco	186795	4,881	4	0,881	1	5	5
Açores	186641	4,877	4	0,877	1	5	5
Guarda	168220	4,395	4	0,395	0	4	4
Bragança	148039	3,868	3	0,868	1	4	4
Évora	145306	3,797	3	0,797	1	4	4
Beja	138507	3,619	3	0,619	0	3	4
Portalegre	108385	2,832	2	0,832	1	3	3
Totais	8687945		215		12	227	

Beja, um círculo pequeno, perde um mandato para Braga, um círculo grande.

Este problema não é único. Este método produz mais dois paradoxos: o **Paradoxo da População** e o **Paradoxo dos Estados Novos**.

Paradoxo da População

O Paradoxo da População acontece quando um estado X perde lugares para o estado Y, mesmo que a população de X tenha crescido muito mais do que a de Y.

Observemos a tabela com algumas alterações nas populações dos círculos:

Círculo eleitoral	p_i	q_i	$[q_i]$	$q_i-[q_i]$		a_i	H
Lisboa	1757800	46,019	46	0,019	0	46	46
Porto	1414072	37,020	37	0,020	0	37	37
Braga	679399	17,787	17	0,787	1	18	17
Setúbal	649897	17,014	17	0,014	0	17	17
Aveiro	573532	15,015	15	0,015	0	15	15
Santarém	382444	10,012	10	0,012	0	10	10
Leiria	379862	9,945	9	0,925	1	10	10
Coimbra	373742	9,784	9	0,784	1	10	10
Viseu	344156	9,010	9	0,010	0	9	9
Faro	306049	8,012	8	0,012	0	8	8
Viana do Castelo	227575	5,958	5	0,958	1	6	6
Madeira	223834	5,860	5	0,860	1	6	6
Vila Real	221050	5,787	5	0,787	1	6	6
Castelo Branco	186795	4,890	4	0,890	1	5	5
Açores	186641	4,886	4	0,886	1	5	5
Guarda	180220	4,718	4	0,718	0	4	4
Bragança	148039	3,876	3	0,876	1	4	4
Évora	145306	3,804	3	0,804	1	4	4
Beja	143807	3,765	3	0,765	0	3	4
Portalegre	108385	2,837	2	0,837	1	3	3
Totais	8687945		215		11	226	

Beja, cuja população aumentou 5300, perdeu um mandato para Braga, cuja população aumentou 5000. Portanto, volta a ser um círculo pequeno a perder para um círculo grande.

Paradoxo dos Novos Estados

O **Paradoxo dos Novos Estados** acontece quando a adição de um novo estado, com a sua quota de lugares, pode afectar a divisão de lugares dos outros estados.

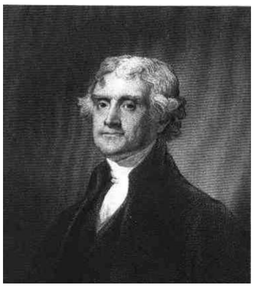
Para melhor compreensão deste paradoxo, introduza-se mais um círculo ao nosso exemplo: o círculo estrangeiro com uma população de 180612. Considerando $m = 230$ e reordenando os círculos, por ordem decrescente das populações, surge a tabela:

Círculo eleitoral	p_i	q_i	$[q_i]$	$q_i-[q_i]$		a_i	H
Lisboa	1785480	46,305	46	0,305	0	47	46
Porto	1430272	37,093	37	0,093	0	37	37
Braga	674399	17,490	17	0,490	0	17	17
Setúbal	653797	16,956	16	0,956	1	17	17
Aveiro	582032	15,095	15	0,095	0	15	15
Santarém	385044	9,986	9	0,986	1	10	10
Leiria	379862	9,851	9	0,851	1	10	10
Coimbra	373642	9,690	9	0,690	1	10	10
Viseu	351016	9,103	9	0,103	0	9	9
Faro	320049	8,300	8	0,300	0	8	8
Viana do Castelo	228575	5,928	5	0,928	1	6	6
Madeira	223834	5,805	5	0,805	1	6	6
Vila Real	218050	5,655	5	0,655	1	6	6
Castelo Branco	186795	4,844	4	0,844	1	5	5
Açores	186641	4,840	4	0,840	1	5	5
Estrangeiro	180612	4,684	4	0,684	1	5	--
Guarda	168220	4,363	4	0,363	0	4	4
Bragança	148039	3,839	3	0,839	1	4	4
Évora	145306	3,768	3	0,768	1	4	4
Beja	138507	3,592	3	0,592	0	3	4
Portalegre	108385	2,811	2	0,811	1	3	3
Totais	8687945		217		13	230	

Como podemos verificar, Beja perde um mandato. Mais uma vez, um círculo pequeno perde para um círculo maior.

Por tudo isto, o método de Hamilton não é perfeito. Embora siga a regra da quota, produz paradoxos e favorece estados grandes.

Método de Jefferson



Thomas Jefferson
(1743-1826)

Devido ao veto presidencial, em 1791, a Câmara dos Representantes adoptou o método de Jefferson, que permaneceu até 1832. Thomas Jefferson, na altura secretário de estado de George Washington, propôs um método que contornava os erros paradoxais de Hamilton.

O algoritmo deste método é o seguinte:

- Encontrar o número D (divisor eleitoral) tal que, quando as quotas modificadas dos vários estados (população do estado a dividir por D) são arredondadas por defeito (**quota mínima** modificada), a soma dessas quotas dá exactamente o número de lugares a distribuir, isto é,

$$\left[\frac{p_1}{D}\right]+\left[\frac{p_2}{D}\right]+\ldots+\left[\frac{p_n}{D}\right]=m\,;$$

- Atribuir a cada estado a quota mínima (modificada).

Este divisor D é facilmente encontrado através de uma folha de cálculo. Para o nosso divisor $D = 38442{,}23$ obtém-se $m = 215(-11)$. Para que m aumente, D tem que diminuir. Para $D = 37500$ obtém-se $m = 219(-7)$. Para $D = 37000$ obtém-se $m = 226$, o valor pretendido.

Assim, observando a tabela e comparando com os resultados de Hamilton verifica-se que o método de Jefferson viola a regra da quota e favorece os estados grandes.

Círculo eleitoral	p_i	q_i	$[q_i]$	H
Lisboa	1757800	48,256	48	46
Porto	1414072	38,656	38	37
Braga	679399	18,227	18	17
Setúbal	649897	17,670	17	17
Aveiro	573532	15,731	15	15
Santarém	382444	10,407	10	10
Leiria	379862	10,267	10	10
Coimbra	373742	10,098	10	10
Viseu	344156	9,487	9	9
Faro	306049	8,650	8	8
Viana do Castelo	227575	6,178	6	6
Madeira	223834	6,050	6	6
Vila Real	221050	5,893	5	6
Castelo Branco	186795	5,049	5	5
Açores	186641	5,044	5	5
Guarda	180220	4,546	4	4
Bragança	148039	4,001	4	4
Évora	145306	3,927	3	4
Beja	143807	3,743	3	4
Portalegre	108385	2,929	2	3
Totais	8687945		226	

Como veremos, a diferença entre este método e os seguintes está apenas no processo pelo qual se arredondam as quotas.

Método de Adams


John Quincy Adams (1767-1848)

No ano em que foi aprovado o método de Hamilton, John Quincy Adams apresentava o seu método. Ainda que fosse um excelente conhecedor de História e Matemática, o seu método nunca viria a ser aprovado.

O método de Adams é análogo ao método de Jefferson:

- Encontrar o número D (divisor eleitoral) tal que, quando as quotas modificadas dos vários estados (população do estado a dividir por D) são arredondadas por excesso (**quota máxima** modificada), a soma dessas quotas dá exactamente o número de lugares a distribuir, isto é,

$$\left[\frac{p_1}{D}\right]+\left[\frac{p_2}{D}\right]+\ldots+\left[\frac{p_n}{D}\right]+n=m\,;$$

- Atribuir a cada estado a quota máxima (modificada).

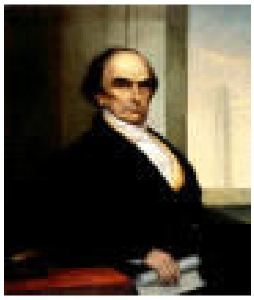
Para o nosso divisor $D = 38442{,}23$ obtém-se $m = 235(+9)$. Para que m diminua, D tem que aumentar. Para $D = 39000$ obtém-se $m = 230(+4)$. Para $D = 40000$ obtém-se $m = 226$, o valor pretendido.

Assim, surge a seguinte tabela:

Círculo eleitoral	p_i	q_i	$[q_i]+1$	H
Lisboa	1757800	44,637	45	46
Porto	1414072	35,757	36	37
Braga	679399	16,860	17	17
Setúbal	649897	16,345	17	17
Aveiro	573532	14,551	15	15
Santarém	382444	9,626	10	10
Leiria	379862	9,497	10	10
Coimbra	373742	9,341	10	10
Viseu	344156	8,775	9	9
Faro	306049	8,001	9	8
Viana do Castelo	227575	5,714	6	6
Madeira	223834	5,596	6	6
Vila Real	221050	5,451	6	6
Castelo Branco	186795	4,670	5	5
Açores	186641	4,666	5	5
Guarda	180220	4,206	5	4
Bragança	148039	3,701	4	4
Évora	145306	3,633	4	4
Beja	143807	3,463	4	4
Portalegre	108385	2,710	3	3
Totais	8687945		226	

Pela tabela é fácil de verificar que este método viola a regra da quota e favorece os estados pequenos.

Método de Webster



Daniel Webster
(1782-1852)

Juntamente com Adams, em 1832, o senador Daniel Webster apresentava o seu método. Este método seria adoptado em 1842 e permaneceria durante 10 anos, voltando a ser utilizado entre 1901 e 1941.

Seguindo a mesma filosofia de Jefferson e Adams, este método propõe:

- Encontrar o número D (divisor eleitoral) tal que, quando as quotas modificadas dos vários estados (população do estado a dividir por D) são arredondadas pelo processo convencional, a soma dessas quotas dá exactamente o número de lugares a distribuir;
- Atribuir a cada estado a quota modificada, arredondada pelo método convencional.

Assim, procedendo da mesma forma que anteriormente, para $D = 39000$ obtém-se $m = 226$.

Na seguinte tabela, verifica-se que, por coincidência, a distribuição de mandatos que resulta da aplicação deste método é igual à distribuição apresentada no método de Hamilton.

Círculo eleitoral	p_i	q_i	AC	H
Lisboa	1757800	45,782	46	46
Porto	1414072	36,674	37	37
Braga	679399	17,292	17	17
Setúbal	649897	16,764	17	17
Aveiro	573532	14,924	15	15
Santarém	382444	9,873	10	10
Leiria	379862	9,740	10	10
Coimbra	373742	9,581	10	10
Viseu	344156	9,000	9	9
Faro	306049	8,206	8	8
Viana do Castelo	227575	5,861	6	6
Madeira	223834	5,739	6	6
Vila Real	221050	5,591	6	6
Castelo Branco	186795	4,790	5	5
Açores	186641	4,786	5	5
Guarda	180220	4,313	4	4
Bragança	148039	3,796	4	4
Évora	145306	3,726	4	4
Beja	143807	3,551	4	4
Portalegre	108385	2,779	3	3
Totais	8687945		226	

O método de Webster iria ser um bom método de divisão proporcional, pois valida a ideia matemática que as quotas devem ser arredondadas como é usual nos números. Mas, além de favorecer os pequenos estados, viola a regra da quota. No entanto, este problema é mais teórico do que prático, já que as violações da regra da quota, neste método, são raras. Este é, ainda hoje, considerado por muitos especialistas, o método mais proporcional.

Nos anos 70, dois matemáticos, Michel L. Balinski e H. Peyton Young, propuseram encontrar um método que não violasse a regra da quota e não produzisse paradoxos. Em 1980 chegaram ao seguinte resultado:

Teorema da Impossibilidade de Balinski e Young:
Não há métodos de divisão proporcional perfeitos. Qualquer método de divisão proporcional que não viole a regra da quota produz paradoxos, e qualquer método de divisão proporcional que não produza paradoxos viola a regra da quota.

Método de Huntington-Hill

Este teorema inclui o actual método usado nos E.U.A. para distribuir os lugares da Câmara dos Representantes pelos 50 estados. Tal método deve-se a Josept A. Hill, chefe estatístico da "Oficina dos Censos", e a Edward V. Huntington, professor de mecânica e matemática na Universidade de Harvard. Este método, também conhecido como o método da média geométrica, foi desenvolvido em 1911 e recomendado, em 1929, por um grupo de matemáticos que o considerou o melhor possível da divisão proporcional. Em 1941, o presidente Franklin D. Roosevelt assinou a lei que estabelece este método como o oficial.

Este método tem o seguinte algoritmo:

- **Regra de Arredondamento de Huntington-Hill**: se a quota está entre L e L+1, o ponto de viragem é H $\sqrt{L\times(L+1)}$. Se a quota é inferior a H, arredonda-se por defeito, caso contrário, arredonda-se por excesso;
- Encontrar o número D (divisor eleitoral) tal que, quando as quotas modificadas dos vários estados (população do estado a dividir por D) são arredondadas pelo processo de arredondamento de Huntington-Hill, a soma dessas quotas dá exactamente o número de lugares a distribuir;
- Atribuir a cada estado a quota modificada, arredondada pelo método convencional.

Assim, procura-se um divisor D que satisfaça as condições do algoritmo. Para $D = 39100$ obtém-se $m = 226$. Para cada círculo, calcula-se a respectiva quota e o respectivo ponto de viragem H, como ilustra a seguinte tabela:

Círculo eleitoral	p_i	q_i	Ponto de viragem	a_i	H
Lisboa	1785480	45,664	45,497	46	46
Porto	1430272	36,579	36,497	37	37
Braga	674399	17,248	17,493	17	17
Setúbal	653797	16,721	16,492	17	17
Aveiro	582032	14,885	14,491	15	15
Santarém	385044	9,848	9,487	10	10
Leiria	379862	9,715	9,487	10	10
Coimbra	373642	9,556	9,487	10	10
Viseu	351016	8,977	8,485	9	9
Faro	320049	8,185	8,485	8	8
Viana do Castelo	228575	5,846	5,477	6	6
Madeira	223834	5,725	5,477	6	6
Vila Real	218050	5,577	5,477	6	6
Castelo Branco	186795	4,777	4,472	5	5
Açores	186641	4,773	4,472	5	5
Guarda	168220	4,302	4,472	4	4
Bragança	148039	3,786	3,464	4	4
Évora	145306	3,716	3,464	4	4
Beja	138507	3,542	3,464	4	4
Portalegre	108385	2,772	2,449	3	3
Totais	8687945			226	

Observando a tabela, verifica-se que a coluna correspondente à distribuição de mandatos é igual à de Hamilton. Embora neste caso não se verifique, é perceptível que este método viola a regra da quota.

Método d'Hondt


Victor d'Hondt

O método eleitoral utilizado em Portugal é o método d'Hondt. Este método foi apresentado pelo belga Victor d'Hondt, jurista e professor universitário de Direito Civil.

O algoritmo é o seguinte:

- Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista, no círculo eleitoral respectivo;
- O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1,2,3,4,etc., sendo os quocientes alinhados por ordem decrescente, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo;
- Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série;
- No caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

Como exemplo prático, consideremos o círculo de Viseu e os respectivos dados das Legislativas/02.

Assim, usando o método d'Hondt passo a passo, vamos distribuir os 9 mandatos, que couberam ao círculo de Viseu, pelos 3 partidos mais votados: PPD/PSD (109261 votos), PS (65410 votos) e CDS-PP (22283 votos).

1º passo: "Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista…"

Partido	PSD	Partido Socialista	CDS-PP
$p_{i,\ i=1,2,3}$	p_1=109261	p_2=65410	p_3=22283

2º passo: "O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1,2,3,4,etc.…"

a+1 \ Partido	PSD	Partido Socialista	CDS-PP
1	109261	65410	22283
2	54630,5	32705	11141,5
3	36420,33	21803,33	7427,67
4	27315,25	16352,5	5570,75
5	21852,2	13082	4456,6
6	18210,17	10901,67	3713,83

"…sendo os quocientes alinhados por ordem decrescente, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo;"

109261 ; 65410 ; 54630,5 ; 36420,33 ; 32705 ; 27315,25 ; 22283 ; 21852,2 ; 21803,33

3º passo: "Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série;"

Partido / a+1	PSD	Partido Socialista	CDS-PP
1	**109261**	**65410**	**22283**
2	**54630,5**	**32705**	**11141,5**
3	**36420,33**	**21803,33**	**7427,67**
4	**27315,25**	**16352,5**	**5570,75**
5	**21852,2**	**13082**	**4456,6**
6	**18210,17**	**10901,67**	**3713,83**

Assim, ao PPD/PSD são atribuídos 5 mandatos, ao PS 3 mandatos e ao CDS-PP 1 mandato.

Método de Jefferson ⟷ Método d'Hont

O método de Hondt é meramente um procedimento sistemático para executar o método de Jefferson. A vantagem do método de Hondt é que evita a experimentação-erro do método de Jefferson.

O método desenvolvido por Jefferson é equivalente ao algoritmo apresentado e baseia-se no seguinte: em vez de procurar um divisor D, comum a todos os partidos, tal que

$\left[\frac{p_1}{D}\right]+\left[\frac{p_2}{D}\right]+\ldots+\left[\frac{p_n}{D}\right]=m$, procuram-se divisores não nulos $d_1, d_2,..., d_r$, $r \le n$, não necessariamente iguais, que verifiquem a igualdade $\left[\frac{p_1}{d_1}\right]+\left[\frac{p_2}{d_2}\right]+\ldots+\left[\frac{p_r}{d_r}\right]=m$.

Método de Jefferson

Sejam n:=nº partidos;
m:=nº de mandatos;
p_i:=nº de votos do partido *i, i=1,…,n*, tal que $p_1 \ge \ldots \ge p_n$;
a_i :=nº de mandatos atribuídos ao partido i.

1º passo: $d = p_1$

$$\frac{p_1}{d}=1 \quad \to \quad a_1 := 1$$
$$\frac{p_i}{d}<1 \quad \to \quad a_i := 0\,,\; i = 2,...,n$$

2º passo: diminui-se *d* de tal forma que

- o partido *1* receba o próximo mandato; então,
$$\frac{p_1}{d}=a_1+1 \quad \text{, isto é, } \; d := \frac{p_1}{a_1+1};$$
- o partido *i* recebe o mandato $a_i + 1$ se
$$\left[\frac{p_i}{d}\right]=a_i+1;$$
Atribui-se um mandato ao partido *1* e aos partidos que verificam a condição anterior, por ordem decrescente dos divisores $d_i = \frac{p_i}{a_i+1}$, enquanto $\sum_{i=1}^{n} a_i \le m$. Seja, para $i = 1,...,n$, $a_i := \left[\frac{p_i}{d}\right]$.

3º passo: se já foram atribuídos os m mandatos, termina o processo; senão, volta-se ao 2º passo.

Para exemplo prático, retomemos o exemplo anterior:

$$\text{9 mandatos} \begin{cases} \to \text{PPD/PSD} & p_1=109261 \\ \to \text{PS} & p_2=65410 \\ \to \text{CDS-PP} & p_3=22283 \end{cases}$$

PSD	Partido Socialista	CDS-PP	$a_1+a_2+a_3$
$\frac{p_1}{d}=1 \quad \to \quad a_1:=1$	$\frac{p_2}{d}<1 \quad \to \quad a_2:=0$	$\frac{p_3}{d}<1 \quad \to \quad a_3:=0$	$1 \neq m$ (faltam distribuir 8 mandatos)
$\frac{p_1}{d}=2 \Leftrightarrow d=54630{,}5$ $d_1=54630{,}5$ $a_1:=2$	$\left[\frac{p_2}{d}\right]=[1{,}2]=1$ $d_2=\frac{p_2}{1}=65410$ $a_2:=1$	$\left[\frac{p_3}{d}\right]=[0{,}41]=0$ $a_3:=0$	$3 \neq m$ (faltam distribuir 6 mandatos)
$\frac{p_1}{d}=3 \Leftrightarrow d=36420{,}33$ $d_1=36420{,}33$ $a_1:=3$	$\left[\frac{p_2}{d}\right]=[1{,}8]=1$ $a_2:=1$	$\left[\frac{p_3}{d}\right]=[0{,}61]=0$ $a_3:=0$	$4 \neq m$ (faltam distribuir 5 mandatos)
$\frac{p_1}{d}=4 \Leftrightarrow d=27315{,}25$ $d_1=27315{,}25$ $a_1:=4$	$\left[\frac{p_2}{d}\right]=[2{,}39]=2$ $d_2=\frac{p_2}{2}=32705$ $a_2:=2$	$\left[\frac{p_3}{d}\right]=[0{,}82]=0$ $a_3:=0$	$6 \neq m$ (faltam distribuir 3 mandatos)
$\frac{p_1}{d}=5 \Leftrightarrow d=21852{,}2$ $d_1=21852{,}2$ $a_1:=5$	$\left[\frac{p_2}{d}\right]=[2{,}99]=2$ $a_2:=2$	$\left[\frac{p_3}{d}\right]=[1{,}02]=1$ $d_3=\frac{p_3}{1}=22283$ $a_3:=1$	$8 \neq m$ (falta distribuir apenas 1 mandato)
$\frac{p_1}{d}=6 \Leftrightarrow d=18210{,}17$ $d_1=18210{,}17$ $a_1:=5$	$\left[\frac{p_2}{d}\right]=[3{,}6]=3$ $d_2=\frac{p_2}{3}=21803{,}33$ $a_2:=3$	$\left[\frac{p_3}{d}\right]=[1{,}22]=1$ $a_3:=1$	$9 = m$

Assim, podemos concluir que, segundo o método de Jefferson, o partido i receberá o seu $a+1$ mandato quando, para um certo d, $\frac{p_i}{d}=a+1$, o que sucede quando o número de mandatos atribuídos é igual a m. Então, podemos afirmar que atribuímos os mandatos seguindo uma ordem de prioridades por meio da função

$$di=\frac{p_i}{a+1}.$$

A tabela ao lado contém todos estes dados e é igual à tabela que surgiu quando aplicámos o método de Hondt ao mesmo exemplo.

Sendo assim, se o resultado da aplicação dos dois métodos é igual então os dois algoritmos são equivalentes.

Partido / a+1	PSD	Ordem Prioridade	Partido Socialista	Ordem Prioridade	CDS-PP	Ordem Prioridade
1	**109261**	**1**	**65410**	**2**	**22283**	**7**
2	**54630,5**	**3**	**32705**	**5**	**11141,5**	
3	**36420,33**	**4**	**21803,33**	**9**	**7427,67**	
4	**27315,25**	**6**	**16352,5**		**5570,75**	
5	**21852,2**	**8**	**13082**		**4456,6**	
6	**18210,17**		**10901,67**		**3713,83**	

5 - CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho tivemos oportunidade de aprofundar os nossos conhecimentos acerca da Teoria da Partilha Equilibrada. Pudemos constatar que esta teoria nos permitiu conhecer diversos métodos e suas aplicações. Observámos que tanto na divisão justa como na divisão proporcional, a divisão efectuada pode originar diferentes resultados consoante o método utilizado. No entanto, não se pode considerar que um método é melhor do que outro. No caso da partilha justa, a divisão é justa somente se o for no sistema de valores de cada jogador. Relativamente à divisão proporcional também não se atinge a perfeição como vimos através do Teorema da Impossibilidade de Balinski e Young.

Como já foi referido, a Teoria da Partilha Equilibrada é um dos temas abordados na nova disciplina do secundário denominada Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). Uma vez que se dirige a um sector de estudantes que na sua maioria não se sente motivado para a Matemática, a implementação desta disciplina poderá encontrar algumas dificuldades. Apesar de apresentar a Matemática de uma forma mais simples e aliciante, não deixa de requerer algumas bases o que poderá complicar o desempenho do professor. É de notar que os manuais escolares apenas se encontraram à disposição dos professores mesmo antes do início do ano lectivo. Verificámos que os manuais que tivemos oportunidade de consultar não apresentam todos os métodos que referimos. Para além disso não existe consenso nos métodos que expõem nem na designação que lhes atribuem e em alguns casos a exposição dos métodos está um pouco confusa.

Na nossa opinião, foi importante a realização deste trabalho não só pelo conteúdo do tema, mas também, pelo facto de nos alertar para algumas dificuldades que poderemos encontrar no ensino desta nova disciplina (MACS).

6 - BIBLIOGRAFIA

- Apontamentos de **Aplicações da Matemática**, do Doutor J. M. Simões Pereira;

- **LONGO, Elisabete; BRANCO, Isabel;** *Matemática Aplicada às Ciências Sociais*; Texto Editora; 2004;

- **TEMPORÃO, Cristina; CARDADEIRO, Filomena; PELES, Paula;** *Matemática Aplicada às Ciências Sociais;* Plátano Editora; 2004

- **PAULOS, John Allen** ; *As notícias e a Matemática ;* Publicações Europa-América ; 1997;

- **TANNENBAUM, Peter; ARNOLD, Robert;** *Excursions in Modern Mathematics*; Prentice Hall, Inc; 2001;

PESQUISA NA INTERNET:

- www.stape.pt
- www.eleicoes.mj.pt
- www.uam.es
- www.ams.org
- www.prof2000.pt
- www.mat.uc.pt