Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

CRESCIMENTO

E

FORMA

ÍNDICE

Introdução 2

I – Crescimento na Natureza 3

Gnomons 16

Rectângulos de Ouro 22

II – Crescimento Populacional 31

Bibliografia 47

INTRODUÇÃO

Ao olharmos para o mundo que nos rodeia e para a sua evolução, por vezes, não nos apercebemos de como a matemática está presente em muitas das suas áreas, como por exemplo: economia, medicina, pintura, indústria, biologia, arquitectura,etc.

A beleza está nos olhos de quem vê, diz o dito popular. Será? É possível afirmar a relatividade da beleza como um princípio universal? Para os membros da escola pitagórica, que acreditavam na máxima de que tudo é número e harmonia, não era bem assim. Estes afirmavam, por exemplo, que o que está em cima é como o que está em baixo, e o que está em baixo é como o que está em cima. Eles procuraram um número que descrevesse a harmonia ou beleza dos objetos, das pessoas, das construções.

O objectivo deste trabalho consiste em relacionar o papel da matemática com a vida real. Tentaremos responder a muitas das questões que se nos colocam, quando olhamos mais atentamente para o nosso mundo. O mundo evolui de tal forma, que por vezes, nem nos apercebemos. Não é muito habitual as pessoas estarem atentas a certos pormenores como, por exemplo: quantas pétalas tem um botão de rosa?, Quais as dimensões de um cartão de crédito? E de um maço de cigarros?... As suas proporções parecem "simpáticas"...

Fique a saber que a impressão não é obra do acaso!...

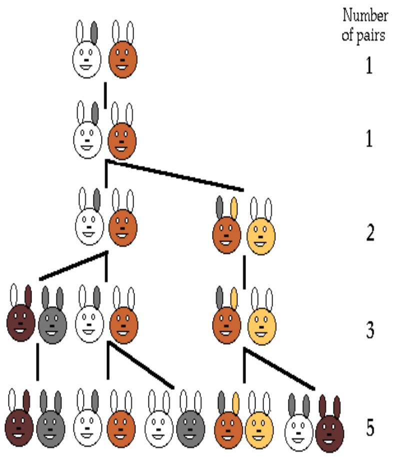
E em relação ao crescimento populacional. A população mundial tem vindo a crescer ou a diminuir? Segundo as estatísticas, o crescimento da população poderá ser representado por alguma função?

I - Crescimento na Natureza

Leonardo de Pisa é actualmente conhecido pela sua alcunha Fibonacci (de "filius Bonacci", filho de Bonacci). Nasceu no norte de Itália, sendo educado no norte de África e passou toda a sua juventude a viajar pelo Mediterrâneo, pois o pai era representante dos comerciantes da República de Pisa. Em 1202, ele questionou-se acerca da rapidez com que se reproduziam os coelhos, tendo formulado um problema que posteriormente originou a tão conhecida sucessão de Fibonacci.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55………………

Esse problema da reprodução dos coelhos tinha um cenário imaginário com as condições ideais, sob as quais os coelhos poderiam então procriar. Suponhamos que inicialmente temos um casal de coelhos e que estes só atingem a maturidade sexual ao fim de um mês. No final do primeiro mês o par inicial já atingiu a maturidade sexual. Assim no segundo mês já haverá dois pares de coelhos, o par original e o primeiro par de filhos. No terceiro mês o casal original tem outro casal de filhos e



o primeiro casal de filhos já atingiu a maturidade sexual e

assim sucessivamente.

O objectivo dele era responder à seguinte questão: “Quantos pares de coelhos existirão daqui a um ano?”

Assim sendo, o número de pares de coelhos em determinado mês é a soma dos pares de coelhos existentes nos dois meses anteriores.

Tem-se então:

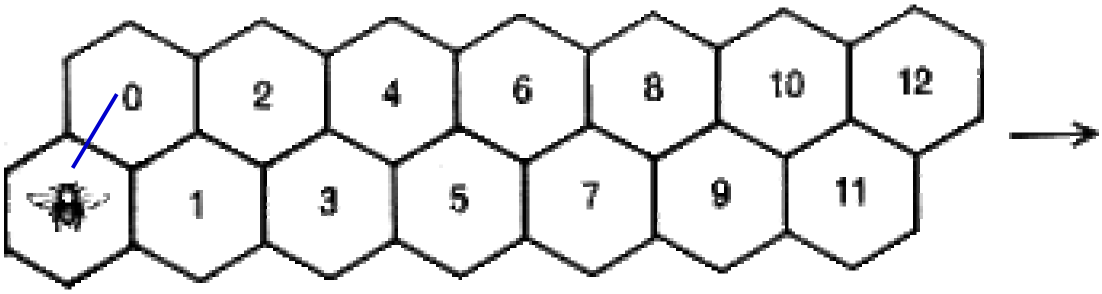
Definição recursiva da Sucessão de Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\text{ , com n natural e } n>2$$
$$F_1 = F_2 = 1$$

Apesar deste exemplo dos coelhos ser o exemplo mais clássico da sucessão de Fibonacci, actualmente considera-se que não é um exemplo muito credível devido ás condições inicialmente impostas.

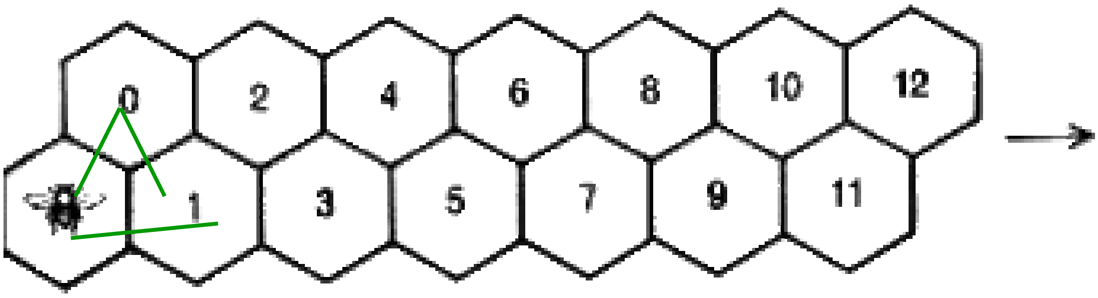
Um exemplo melhor, para a aplicação da definição recursiva anterior, é a deslocação de uma abelha na sua colmeia. Pressupondo que os favos se estendem tão longe quanto se queira sempre para o lado direito e que uma abelha se desloca para um favo adjacente, tomando o sentido da esquerda para a direita.

Quantos caminhos poderá então tomar a abelha para se deslocar para o favo 0?



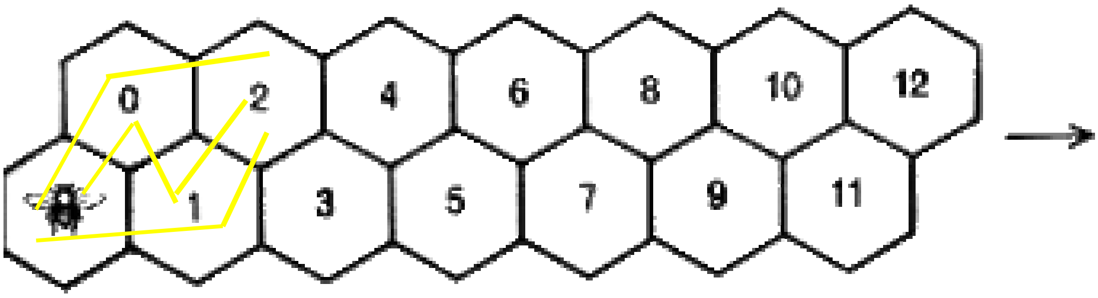
Como podemos verificar, para o favo 0 a abelha poderá apenas tomar um caminho.

E para o favo 1?



Já para o favo 1 temos 2 caminhos, um dos caminhos passa pelo favo 0 e o outro vai directamente para o 1.

E para o favo 2?



Para o favo 2 a abelha poderá tomar 1 dos 3 caminhos assinalados a amarelo.

Seguindo este raciocínio, surge agora a seguinte questão, quantos caminhos poderá tomar a abelha para o n-ésimo favo?

Seria $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, mas supondo n = 100 temos que o número de caminhos é igual ao número de caminhos para a célula 99 mais o número de caminhos para a célula 98. Como se constata este processo envolve muito trabalho e tempo. Coloca-se então a questão:

Existirá outra maneira?

Leonardo Euler descobriu uma fórmula que apesar de ter um aspecto mais complicado, apresenta uma forma mais directa de calcular os números da sucessão de Fibonacci. Sendo essa fórmula designada por:

<u>Fórmula de Binet:</u>

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Como se verifica, todos os números constituintes desta fórmula são números irracionais, logo apenas se podem obter valores aproximados.

$\sqrt{5} = 2{,}236067979...$ $\quad\quad$ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}6180339887...$ $\quad\quad$ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887...$

Este último número é muito importante, sendo designado por *phi* ou *número de ouro* e representa-se por Φ. É na Fórmula de Binet que se encontra a primeira relação entre o número de ouro e os números da sucessão de Fibonacci.

Este número é assim designado em homenagem a *Phídeas,* famoso escultor grego, por ter usado a proporção de ouro em muitos dos seus trabalhos. Surge então a seguinte questão:

Como apareceu o número de ouro?

Se quiséssemos dividir um segmento *AB* em duas partes, teríamos uma infinidade de maneiras de o fazer. Existe uma, no entanto, que parece ser mais agradável à vista, como se traduzisse uma operação harmoniosa para os nossos sentidos. Relativamente a esta divisão, um matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio:

" *Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo.* "

Ou seja, dado um segmento de recta *AB*, um ponto C divide este segmento de uma forma mais harmoniosa se existir a *proporção de ouro AB/CB = CB/AC* (sendo *CB* o segmento maior). O *número de ouro* é exactamente o valor da razão *AB/CB*, a chamada *razão de ouro.*

A divisão de um segmento feita segundo essa proporção denomina-se divisão áurea, a que Euclides chamou *divisão em média e extrema razão,* também denominado por

Divina Proporção pelo matemático Luca Pacioli ou secção áurea segundo Leonardo da Vinci. Este número é considerado por muitos o símbolo da harmonia.

Além da Fórmula de Binet, existirão mais relações entre Φ e os números da sucessão de Fibonacci?

Sim, encontra-se apartir da equação: $x^2 = x + 1$.

Esta equação tem como soluções:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Portanto tem-se que $\Phi^2 = \Phi + 1$ e calculando as sucessivas potências obtêm-se as seguintes relações:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$$
$$\ldots$$

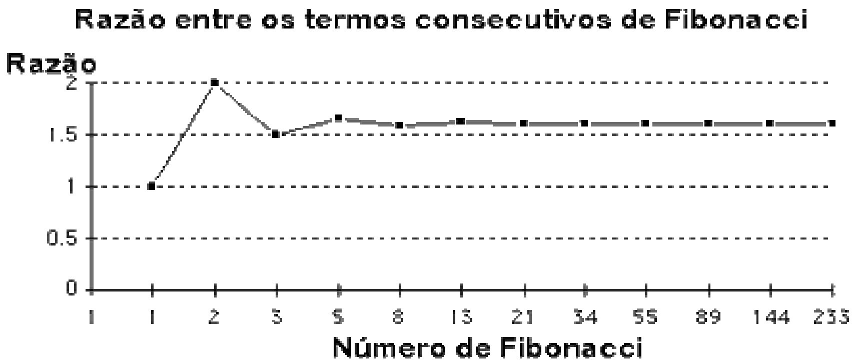
$$\Downarrow$$

$$\Phi^n = F_n \cdot \Phi + F_{n-1}$$

Esta equação é considerada a segunda relação entre o número de ouro e os números de Fibonacci. Contudo, existe ainda uma terceira que se manifesta quando se dividem dois números consecutivos da sucessão de Fibonacci.

F_{n-1}	F_n	F_n / F_{n-1}
1	1	1
1	2	2
2	3	1,5
3	5	1,666666667
5	8	1,6
8	13	1,625
13	21	1,615384615385
21	34	1,619047619048
34	55	1,617647058824
55	89	1,618181818182
89	144	1,617977528090
144	233	1,618055555556
233	377	1,618025751073
377	610	1,618037135279
610	987	1,618032786885
987	1597	1,618034447822
1597	2584	1,618033813400
2584	4181	1,618034055728
4181	6765	1,618033963167
6765	10946	1,618033998522
10946	17711	1,618033985017
17711	28657	1,618033990176
28657	46368	1,618033988205
46368	75025	1,618033988958
75025	121393	1,618033988670

Esta expansão decimal prolongar-se-à sem nunca se repetir. De facto, quando se prolongam indefinidamente as razões de Fibonacci, temos que o valor gerado se aproxima cada vez mais do número de ouro, como se constata no seguinte gráfico:



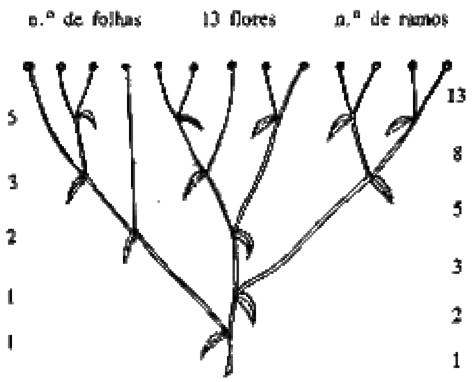
Concluimos assim que existe uma grande interligação entre os números da sucessão de Fibonacci e o número de ouro, estes encontram-se por todo o lado, na natureza e no quotidiano, sem nunca nos apercebermos.

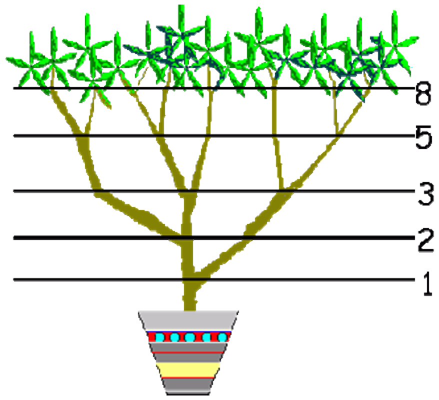
Há relativamente pouco tempo começou-se a dar importância aos números de Fibonacci, sendo o seu aparecimento não um acaso, mas o resultado de um processo físico de crescimento das plantas e dos frutos. De igual modo, também o número de Ouro, parece surgir teimosamente em vários fenómenos, aguçando a curiosidade de explicar todo o Universo com base na Matemática.

Onde aparecem os números de Fibonacci?

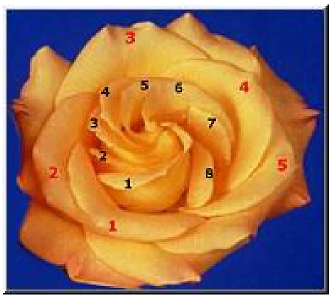
Os números de Fibonacci ligam-se facilmente à Natureza.

- ✓ Em muitas plantas os ramos crescem em quantidades baseadas nos números da sucessão de Fibonacci.



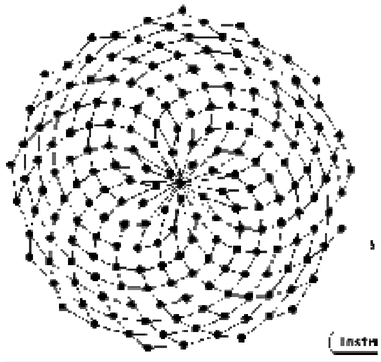


- ✓ A botânica é um filão de números de Fibonacci. As flores têm, geralmente, um número da sucessão de Fibonacci de pétalas, vejamos:



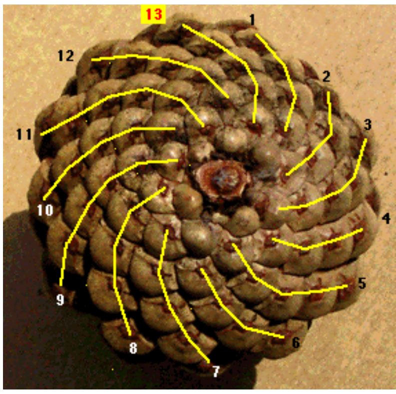
- Nas margaridas: 21, 34, 55 e até 89 pétalas;
- Columbinas e ranúnculos amarelos: 5 pétalas;
- Nos malmequeres: 13 pétalas;
- Lírios, íris e açucenas: 3 pétalas;

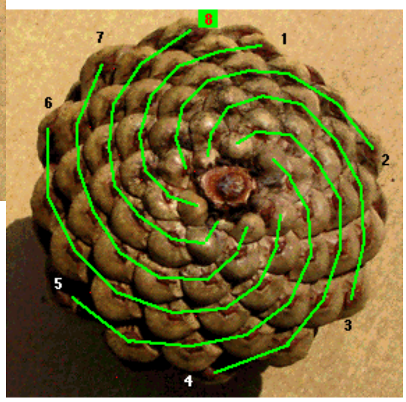
- ✓ Estes números também podem ser vistos na organização das sementes:



Na cabeça do girassol, as sementes formam espirais quer para a direita quer para a esquerda. Se contarmos ambas as espirais teremos dois números consecutivos da sucessão de Fibonacci. A maioria dos girassóis tem 34 e 55 espirais, mas já foram encontrados alguns de 13 e 21, 55 e 89 e de 89 e 144 espirais.

- ✓ Estes, podem ainda ser encontrados em muitas outras formas vegetais. Por exemplo, nos padrões de saliências dos ananases e das pinhas.

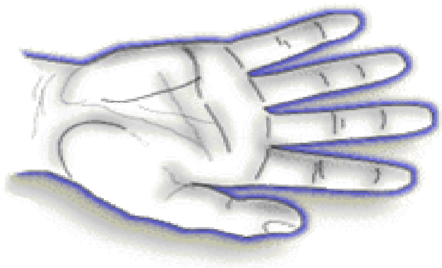




Em ambos os casos, o número total de diagonais em qualquer dos sentidos são dois números consecutivos da sucessão, 8 num sentido e 13 no outro.

- ✓ Além destes exemplos, podemos ainda encontrar os números da sucessão de Fibonacci:

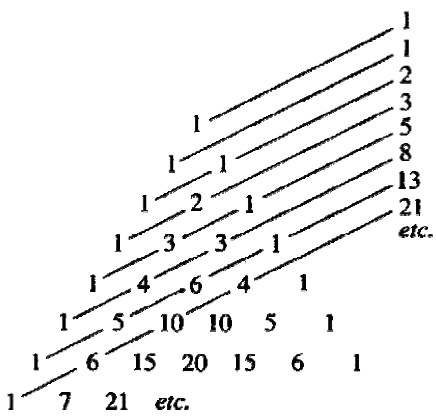
No corpo Humano



Consegue-se ver:

- 2 mãos cada uma com...
- 5 dedos, cada um tem...
- 3 partes separadas por...
- 2 nós

No tão conhecido Triângulo de Pascal

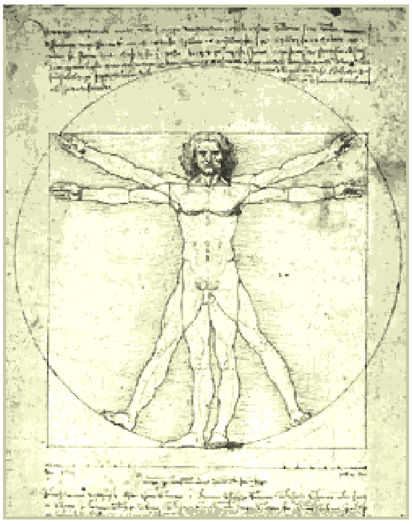


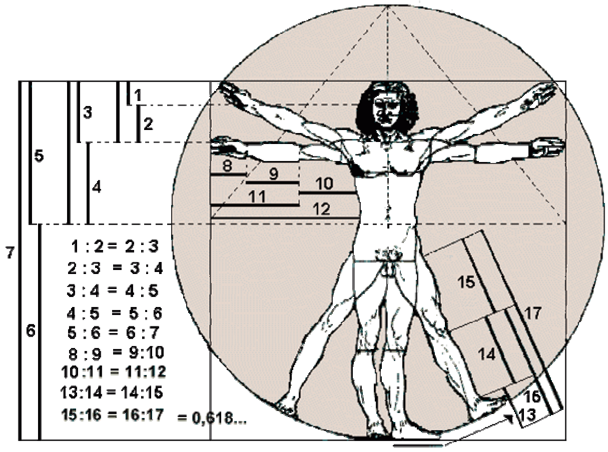
Este é um triângulo aritmético formado por números que possuem diversas relações entre si. Ao efectuarmos a soma de cada uma das diagonais, obtem-se a sucessão dos números de Fibonacci.

Apesar de todos estes exemplos, podemos ainda encontrar muitos outros…

Sabia Que….

- Ainda, no Corpo Humano…



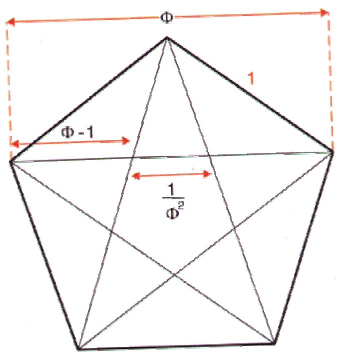


Esta gravura, conhecida por "Vitruvian Man", pertencente aos apontamentos de Leonardo da Vinci e incluída no tratado de Luca Pacioli "De Divina Proportione", demonstra a existência das proporções da Razão de Ouro no corpo humano: a distância da cabeça aos pés está para a distância do umbigo aos pés, bem como a distância do ombro ás pontas dos dedos está para a distância do cotovelo ás pontas dos dedos(assim como estas existem muitas outras). Este facto foi considerado muito significativo durante a Renascença, idade do humanismo, tendo influenciado muitos artistas da época.

- Também nos animais está presente a Razão de Ouro, se dividirmos o número de fêmeas pelo número de machos em qualquer colmeia do mundo obtemos sempre o número de ouro, **Φ.**

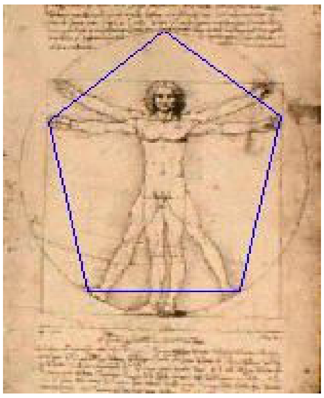
- 

  Os amantes da música podem ficar a saber que mesmo Stradivarius utilizava o número de Ouro na construção dos seus famosos violinos, bem como muitos outros artistas compunham os elementos das suas obras de acordo com essa razão.

- 

  Outra aproximação geométrica à proporção divina, pode ser feita através dum pentágono regular. A proporção entre qualquer dos lados e qualquer diagonal é a razão de ouro, assim como a intersecção de quaisquer duas diagonais.

  Se desenharmos todas as diagonais, obtemos uma estrela de cinco pontas ou pentagrama, símbolo da Escola Pitagórica. Se colocarmos o pentagrama num círculo, temos o pentáculo. Com tantas *proporções divinas* incorporadas, percebe-se agora porque ao pentagrama e, principalmente ao pentáculo, sempre foram atribuídos significados místicos e esotéricos. Ainda por cima, o cinco é um número de Fibonacci.



Leonardo da Vinci também utilizou-o para realizar um dos seus mais famosos estudos.

GNOMONS

A primeira questão que se nos coloca é: O QUE SERÃO GNOMONS?

O significado de gnomon para os antigos gregos era "Aquele que sabe", logo não é de admirar que a palavra tenha interesse para os matemáticos.

Na Geometria, tendo-se uma figura geométrica B, um gnomon de B é uma outra figura geométrica, que quando associada a esta convenientemente, origina uma figura semelhante à inicial

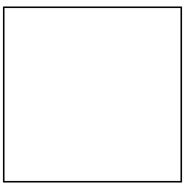


Fig B

+

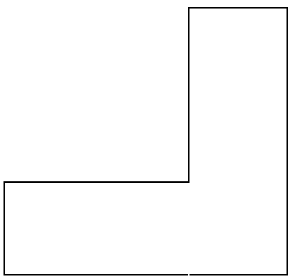


Fig G

=

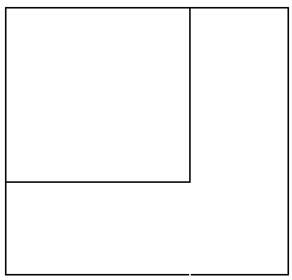


Fig B&G

O estudo dos Gnomons remonta a 2300 anos, por Aristóteles e seus discípulos.

Antes de aprofundarmos o conceito de Gnomon devemos aprofundar o conceito de semelhança geométrica. Sabemos que em geometria dois objectos são semelhantes se um for obtido à escala de outro(redução, ampliação ou igual). Por exemplo, quando projectamos a imagem de um slide numa tela, criamos uma imagem semelhante mas maior.

Para que percebamos melhor esta definição, é importante referir alguns resultados de semelhança de figuras.

✏ Dois quadrados são sempre semelhantes

✏ Duas circunferências são sempre semelhantes

✏ Dois $\frac{\text{Lado maior 1}}{\text{Lado maior 2}}$ rectângulos são semelhantes, se os $\frac{\text{Lado menor 1}}{\text{Lado menor 2}}$ seus lados são proporcionais, ou seja,

$$=$$

✏ Duas $\frac{\text{Raio exterior 1}}{\text{Raio exterior 2}}$ coroas circulares são semelhantes, se os seus raios interiores e exteriores são proporcionais, isto é,

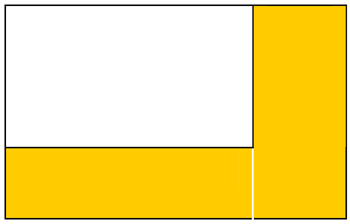
$$= \frac{\text{Raio interior 1}}{\text{Raio interior 2}}$$

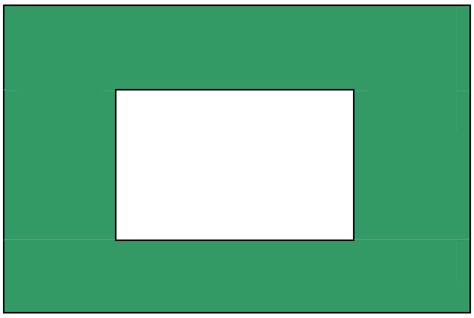
✏ Semelhança de triângulos

- AA (critério do ângulo- ângulo)
- LLL (critério do lado-lado-lado)
- LAL (critério do lado- ângulo-lado)

É de salientar que os gnomons para qualquer figura geométrica:

⇒ ***Não são únicos***





Tanto a figura geométrica amarela como a figura geométrica verde são ambas gnomons para o rectângulo, no entanto são diferentes.

⇒ ***Não são reversíveis***

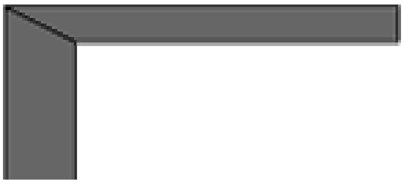


Fig A

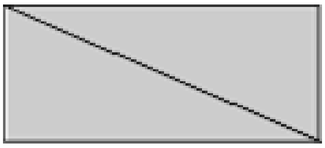
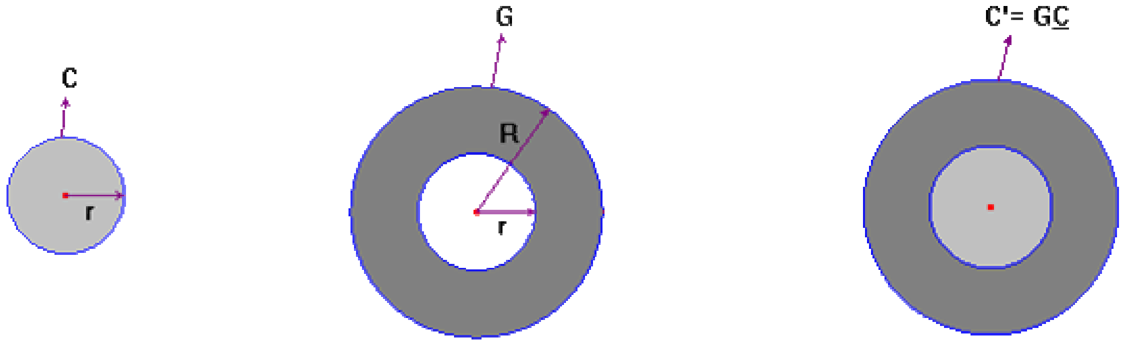


Fig B

A figura A é um gnomon da figura B, pois se as associarmos convenientemente obtemos uma figura semelhante a B. No entanto, o mesmo não acontece se admitirmos que a figura B é um gnomon da figura A.

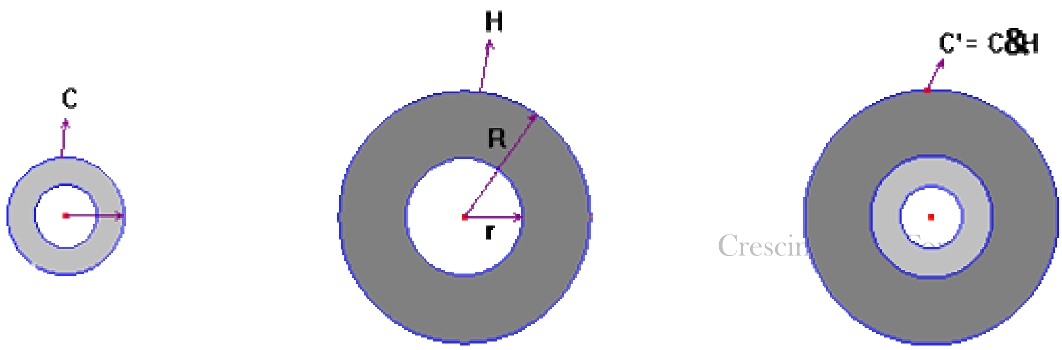
Exemplos:

1. A circunferência C tem por gnomon a coroa circular G (esta não é única), o raio interior de G é r (pois tem de ser igual ao raio de C) e o raio exterior de G pode ser qualquer valor R, desde que este seja maior que r. Associando convenientemente G a C obtemos uma circunferência semelhante a C.



2. Considerando agora uma coroa circular C de raio exterior r e raio interior s e uma coroa circular H de raio interior r e raio exterior R (qualquer).

   Será H um gnomon da coroa circular C?



Podemos ser tentados a responder afirmativamente à questão. No entanto pelos critérios de semelhança atrás mencionados, verificamos que

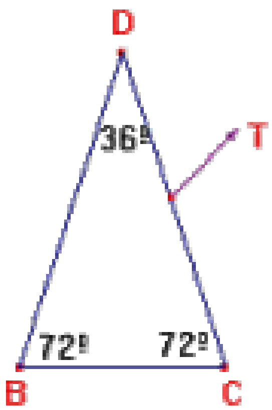
$$\frac{\text{Raio exterior1}}{\text{Raio exterior2}} = \frac{\text{Raio interior1}}{\text{Raio interior2}}$$

ou seja, neste caso tem-se:

$$\frac{r}{R} = \frac{s}{s} \Leftrightarrow R = r$$

O que é impossível, logo não há semelhança entre C e C'.

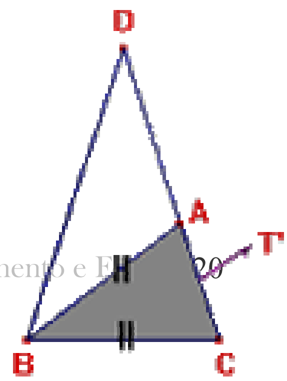
3. Consideremos agora um triângulo isósceles T, cujos vértices são B, C e D e as medidas dos seus ângulos são 72º, 72º e 36º, respectivamente.



Pretendemos um gnomon de T. Como proceder?

Iremos utilizar um método construtivo. Consideremos um ponto A pertencente ao segmento CD, de modo que BC seja congruente com AB.

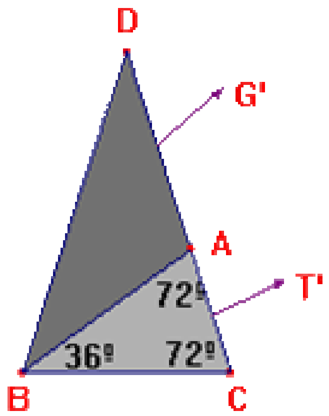
O triângulo obtido T' é isósceles como T, sendo o ângulo em A e o ângulo em C congruentes, logo o triângulo T e T' são semelhantes.



Será que já encontrámos algum gnomon para o triângulo T ???

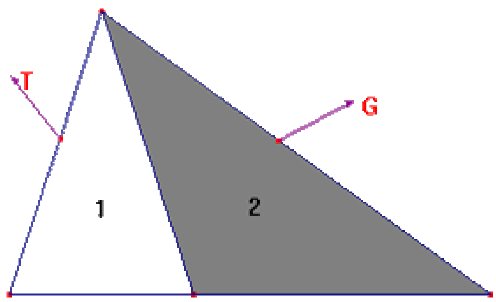
Para o triângulo T ainda não encontrámos, mas para o triângulo T' temos já um gnomon.

Qual será?

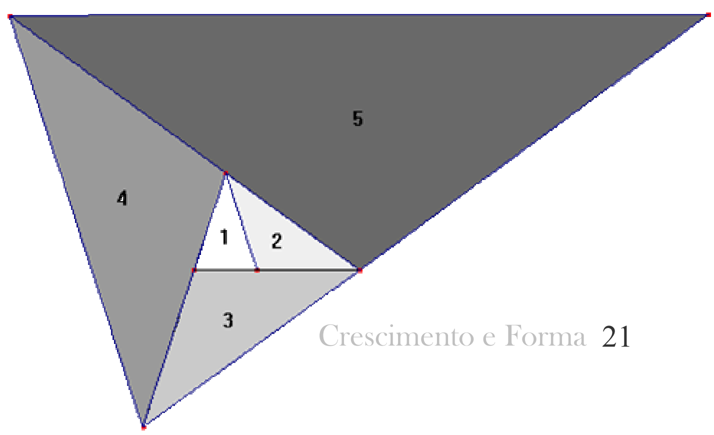


O gnomon de T' é G', que por coincidência é também um triângulo isósceles cujos vértices são A, B, D e as medidas dos seus ângulos são 108º, 36º e 36º, respectivamente. É de salientar que T' associado a G', origina o triângulo inicial T.

Como o triângulo T' é semelhante ao nosso triângulo inicial T, basta associar a um dos lados maiores de T, um triângulo isósceles cujas medidas dos seus ângulos são 36º, 36º e 108º.



Sabemos agora como determinar um gnomon para T, ou melhor, para qualquer triângulo cujas medidas dos ângulos sejam 72º, 72º e 36º.



Imaginemos que repetiamos este processo indefinidamente. Obteríamos uma série de triângulos isósceles que iriam ter sempre as medidas de ângulos 72º, 72º e 36º.

Estamos perante um interessante exemplo, porque:

- a figura inicial e o seu gnomon são do mesmo tipo, neste caso, triângulos isósceles;

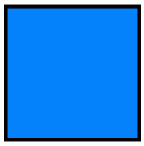
- todos os triângulos com o trio de ângulos 36º-36º- 108º ou 72º-72º-36º, são designados por **triângulos de ouro**, porque o quociente entre um dos lados maiores e o menor é igual ao número de ouro.

RECTÂNGULOS DE OURO

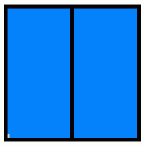
Para além dos triângulos de ouro, existem também rectângulos com propriedades especiais, os chamados rectângulos de ouro. Estes são assim designados porque como nos triângulos de ouro, a razão entre o lado maior e o lado menor é igual ao número de ouro.

Para construirmos um rectângulo que apresenta entre os seus lados a razão de ouro procedemos da seguinte forma:

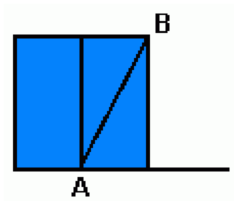
i. Desenhamos um quadrado de lado unitário;



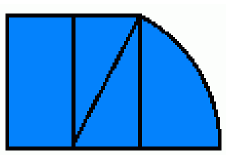
ii. Dividimos um dos lados do quadrado ao meio;



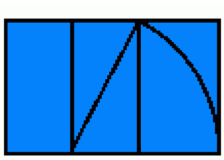
iii. Traçamos uma diagonal do vértice A do último rectângulo ao vértice oposto B e prolongamos a base do quadrado;



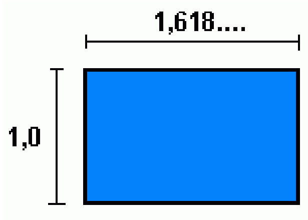
iv. Usando a diagonal como raio, traçamos um arco do vértice direito superior do rectângulo à base que foi prolongada;



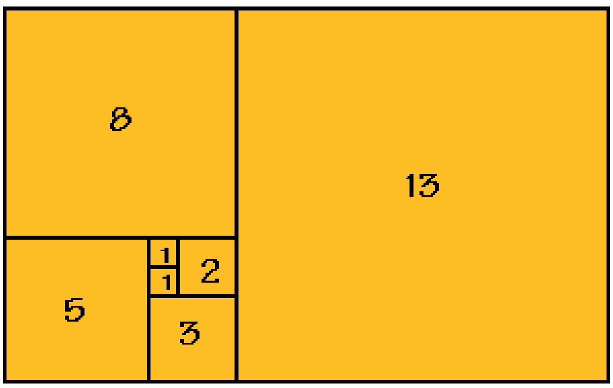
v. Pelo ponto de intersecção do arco com o segmento da base traçamos um segmento perpendicular à base. Prolongamos o lado superior do quadrado até encontrarmos este último segmento para formar o rectângulo;

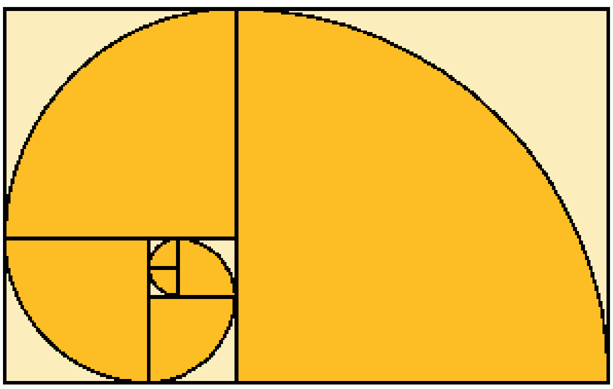


O rectângulo construído - rectângulo dourado - possui os seus lados na razão áurea.

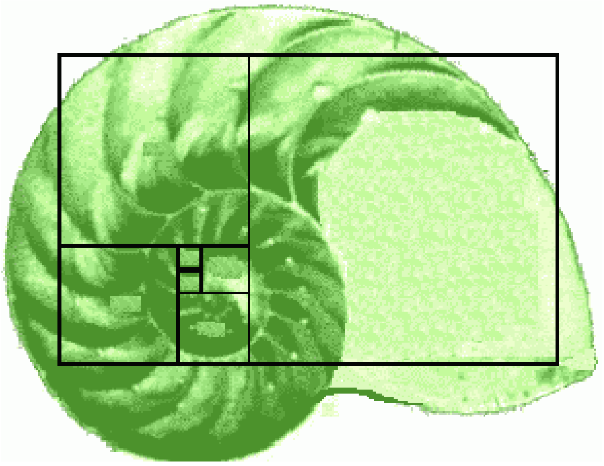


Para além desta construcção do rectângulo de ouro existe ainda uma outra. Anexando dois quadrados de lado 1, obtemos um retângulo 2x1, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. Anexando agora outro quadrado de lado 2 (o maior lado do retângulo 2x1) tem-se um retângulo 3x2. Continuando a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior, a sequência dos lados dos próximos quadrados é: 3,5,8,13,... que é a sequência de Fibonacci. Esta sucessão de rectângulos que acabámos de construir é designada por **Sucessão de Rectângulos de Fibonacci.** Uma particularidade da sucessão é que cada quadrado adicionado é um gnomon do rectângulo anterior.





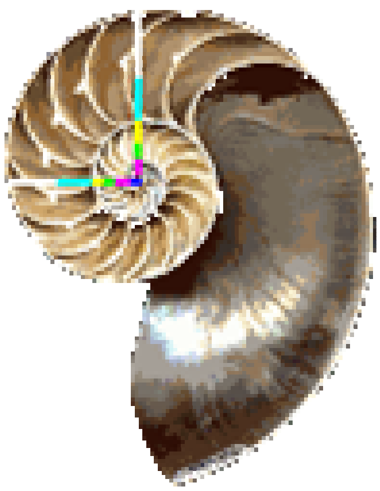
Agora, usando um compasso, se traçarmos um quarto de círculo em cada quadrado de acordo com a figura abaixo, obtém-se uma espiral, denominada por **Espiral de Fibonacci.**



A Espiral de Fibonacci está presente tanto na natureza, como exemplo, apresentamos a *Concha de Náutilus.*

Este animal segue uma Espiral de Fibonacci e apresenta outras curiosidades, como por exemplo, a razão entre o diâmetro de cada espiral e a anterior é o número de ouro, para além disso cada espiral é um gnomon do próprio animal, à medida que ele cresce o número de espirais aumenta mas ele apresenta sempre o mesmo aspecto exterior.

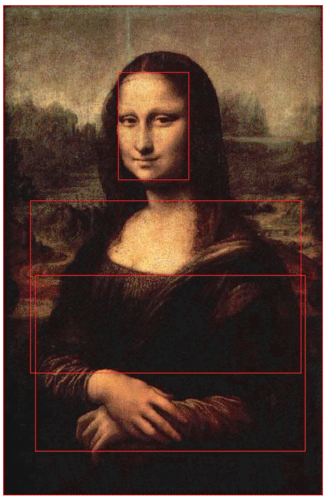
Esta espiral para além de estar presente nos animais, encontra-se também na forma da nossa galáxia.

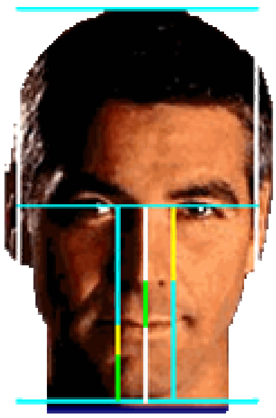


O rectângulo de ouro é um objecto matemático que marca forte presença no domínio das artes, nomeadamente na arquitectura, na pintura, e até na publicidade. Este facto não é uma simples coincidência já que muitos testes psicológicos demonstraram que o rectângulo de ouro é de todos os rectângulos, o mais agradável à vista.

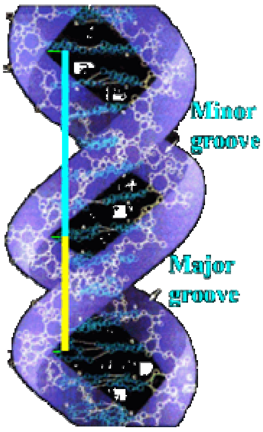
Até hoje não se conseguiu descobrir a razão de ser dessa beleza, mas a verdade é que existem inúmeros exemplos onde o rectângulo de ouro aparece. Até mesmo nas situações mais práticas do nosso quotidiano, encontramos aproximações do rectângulo de ouro, por exemplo, no caso dos cartões de crédito, nos bilhetes de identidade, no novo modelo da carta de condução, nos cartazes de publicidade, nas caixas dos cereais, assim como na forma rectangular da maior parte dos nossos livros e até nos maços de tabaco.

Coincidentemente ou não, o número de ouro está presente em muitos lugares que despertam a nossa experiência estética. Em produções ligadas à arte, principalmente na pintura, como nas obras renascentistas de Leonardo da Vinci, a exemplo do quadro Monalisa. Há indícios de que do século V a .c. ao Renascimento a arte tomou como critério estético o número de ouro. Este está presente no rosto humano e animal, pois é a razão entre o comprimento do rosto e a distância entre o queixo e os olhos.

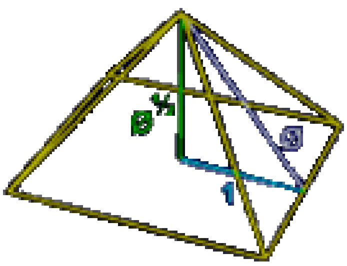




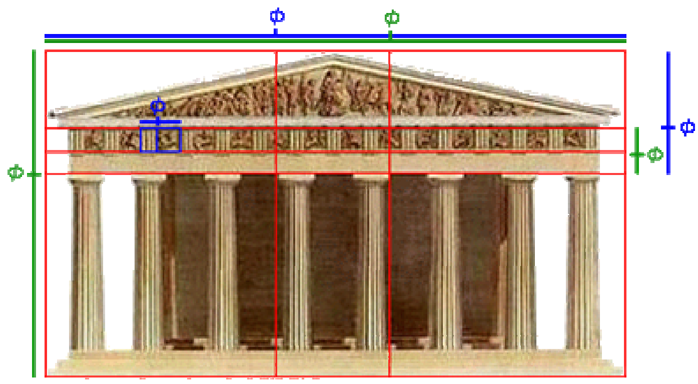
O número de ouro é também a razão entre a espiral maior e a espiral menor numa cadeia de DNA.



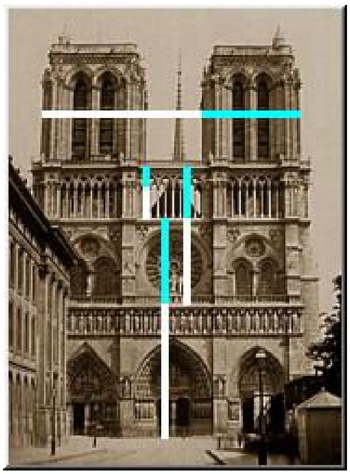
Mas, a história deste enigmático número perde-se na antiguidade. No Egipto as pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a razão áurea : a razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. Esta razão ou secção áurea surge em muitas estátuas da antiguidade.

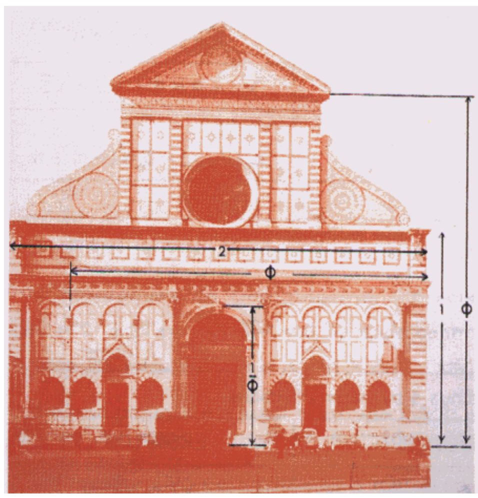


Construído muitas centenas de anos depois (entre 447 e 433 a. C.), o Partenon Grego ou o Templo das Virgens, templo representativo do século de Péricles e uma das obras arquitectónicas mais admiradas da antiguidade, contém a Razão de Ouro no rectângulo que contêm a fachada (Largura / Altura). Isto revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa. O escultor e arquitecto encarregado da construção deste templo foi Fídias.



Outras obras arquitectónicas onde esta razão está presente, são: a Catedral de Notre Dame (em Paris) e a Basílica de Santa Maria Novella (em Florença).





No entanto, esta razão não está apenas presente em obras arquitectónicas da antiguidade, como exemplo disso temos o actual Edifício das Nações Unidas.

Curiosidades...

Na natureza, a distribuição das cores quentes (vermelho, laranja e amarelo), neutras (ocre e cinza) e frias (azul e verde), são distribuídas segundo a proporção áurea. É por isso que não encontramos naturalmente grandes quantidades de vermelho, laranja ou amarelo e sim muito azul e verde, e que, entre as cores quentes e as frias temos o cinza e o ocre que são neutras.

Na Eneida, poesia épica de autoria de Virgílio, século I a. c., encontramos, além das condições exigidas para ser um épico, que há em cada poema uma mudança de assunto ou na forma que o poeta utilizou para separar os versos em partes. Em muitos poemas é possível separar os versos numa parte maior (PM) e numa parte menor (pm), e, tomando o total dos versos (PM + pm) e dividindo pela parte maior obtemos valores muitos próximos de 1,618, que é uma excelente aproximação da razão áurea.

II – Crescimento Populacional

Este termo tornou-se muito vago, devido ao facto de nos nossos dias, se atribuírem diversos significados a "crescimento" e a "população".

O crescimento não se verifica apenas na natureza mas também a nível populacional. A palavra ***populacional*** deriva do latim *populus que significa povo, daí na sua* interpretação original, a palavra se referir a populações humanas. Por essa razão, quando se fala em crescimento populacional muitas vezes se pensa em populações humanas. Mas, o que é referido para o estudo das populações humanas, vale também para os estudos biológicos das relações entre organismos e seus ambientes ou ainda para os estudos de populações de vírus e bactérias.

Ao analisarmos a história, apercebemo-nos que a evolução da matemática sempre teve um papel fundamental no desenvolvimento das sociedades. A ligação entre o estudo das populações e a matemática, remonta então ao início das civilizações. Nessa época, uma das razões que levou os humanos a inventarem os primeiros sistemas numéricos, foi a necessidade de, por exemplo, contarem os seus animais, contarem as pessoas da sua tribo, entre outros.

Normalmente pensa-se, que a palavra crescimento está associada a coisas que crescem, que se tornam maiores, mas isso não é o que realmente se verifica, pois existem dois tipos de crescimento:

Crescimento negativo ou declínio	Crescimento positivo
↓	↓
A população diminui	A população aumenta

O crescimento de uma população é um processo dinâmico, ou seja, é uma situação que se vai alterando ao longo do tempo e na qual se podem diferenciar dois tipos de situação:

Crescimento contínuo – as mudanças ocorrem permanentemente. A toda a hora, a todo o minuto, a todo o segundo há uma mudança.

Crescimento discreto – as mudanças **-transições-** efectuam-se periodicamente, isto é, as alterações não ocorrem sistematicamente, havendo intervalos de tempo em que a população se mantém constante. O período entre as transições tanto pode ser fracções de segundos, minutos, horas, dezenas de anos ou séculos.

O processo do crescimento discreto é o mais comum e natural no estudo das mudanças populacionais, sendo portanto o nosso alvo de estudo.

O problema básico do **crescimento populacional** é prever o que acontecerá a uma dada população ao longo do tempo. A principal forma de solucionar este problema, é descobrir as regras que regem as transições, as quais são denominadas por **regras de transição.** Ou seja, se soubermos como se altera uma certa população em cada transição, podemos determinar como se altera a mesma, após muitas transições. Neste sentido, o fluxo e o refluxo de uma população ao longo do tempo podem ser convenientemente apresentados numa sequência de números, à qual chamamos **sequência populacional.** Tendo como características principais:

☑ Toda a sequência populacional começa com a população inicial**:**

$\mathbf{P_0}$ (geração "zero").

☑ A sequência continua com P_1, P_2 ,... .
Onde $\mathbf{P_n}$ é o tamanho da população na n-ésima geração.

Este estudo das regras de transição, ou seja, o estudo contínuo do crescimento populacional, deu origem a diferentes modelos de crescimento populacional. Nós apenas iremos estudar alguns dos modelos mais básicos, sendo eles:

- **Modelo de Crescimento Linear;**
- **Modelo de Crescimento Exponencial;**
- **Modelo de Crescimento Logístico.**

Todos estes modelos são um produto da sofisticação teórica da ciência e o seu objectivo é constituir objectos mais simples, utilizando as ferramentas da matemática. Em particular, as equações diferenciais, que levam à evolução de instrumentos, permitindo não apenas uma compreensão adequada de um determinado fenómeno e das suas tendências no tempo, mas também a formulação de programas de intervenção que possam ordenar, organizar, mudar, prever e mesmo prevenir, no que diz respeito à sua ocorrência e seus desdobramentos, fenómenos, sejam eles físicos, naturais, sociais ou culturais.

As aplicações destes modelos matemáticos, com o amplo desenvolvimento das tecnologias de informação, abrem-se, contudo, para os mais diversos campos do conhecimento e dos interesses tecnológicos e económicos: desde aplicações em medicina, em bio-matemática, em economia e finanças, em meteorologia, no meio ambiente, enfim, nos mais diferentes aspectos da vida e das suas manifestações culturais.

Modelo de Crescimento Linear

Este modelo tem como principais características o facto de ser o modelo mais simples de todos e em cada geração a população se alterar, aumentar ou diminuir, segundo uma quantidade fixa, uma constante.

Como aplicação deste modelo de crescimento, têm-se o seguinte exemplo:

Exemplo:

A cidade de Coimbra está a considerar aprovar uma nova lei, que restringe a quantidade de lixo a depositar mensalmente numa lixeira. O máximo é de 120ton por mês. No entanto, é de salientar que um dos oficiais do local, apesar da restrição à quantidade de lixo, considera que a lixeira atingirá, em poucos anos, a sua capacidade máxima de 20.000ton.

Considerando que actualmente existem 8.000ton de lixo na lixeira, assumindo que a lei é aprovada e que a lixeira recolhe exactamente 120ton por mês, que quantidade de lixo estará na lixeira daqui a 5 anos? E quantos anos serão necessários para que a lixeira atinja a capacidade máxima de 20.000ton?

É de referir, que apesar das circunstâncias serem fictícias a questão apresentada é realista e muito importante. A "população" neste exemplo, é o lixo existente na lixeira, consideramos apenas que o depósito do lixo, ocorre apenas uma vez por mês.

Um aspecto essencial deste problema de crescimento populacional, é o facto do lixo depositado na lixeira se ir acumulando segundo uma constante mensal.

Este é um típico exemplo do modelo de crescimento linear, pois em cada transição se vai adicionando um valor constante, à população anterior.

Matematicamente, este modelo de crescimento pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$P_n = P_{n-1} + c \quad \Longrightarrow$$

Descrição Recursiva do Modelo de Crescimento Linear

P_n: População da n-ésima transição

P_{n-1}: População da transição anterior

c: constante

Considera-se que P_0 é a população inicial.

A equação $\mathbf{P_n = P_{n-1} + c}$, dá-nos a descrição recursiva da sequência da população, pois ela calcula valores da sequência da população usando os valores anteriores desta sequência.

Apesar da descrição recursiva parecer bonita e simples, tem uma grande desvantagem, porque para se calcular um valor da sequência da população, necessitamos de calcular primeiramente todos os valores anteriores. Felizmente, no presente caso, existe uma forma muito conveniente de descrever a sequência da população que não requer o uso de outros valores da sequência, sendo esta:

$$P_n = P_0 + N * c$$

Descrição Explícita da sequência da população

A sequência da população que resulta do modelo linear, é normalmente conhecida como uma sequência aritmética. Informalmente, o crescimento linear e a sequência aritmética podem ser considerados sinónimos. O número **c** é designado por **diferença comum** da sequência aritmética, porque vai ser a diferença entre quaisquer dois valores consecutivos desta sequência.

A nossa população inicial (Po) é 8000ton. Então desta forma temos a seguinte sequência populacional:

$P_0=8000$

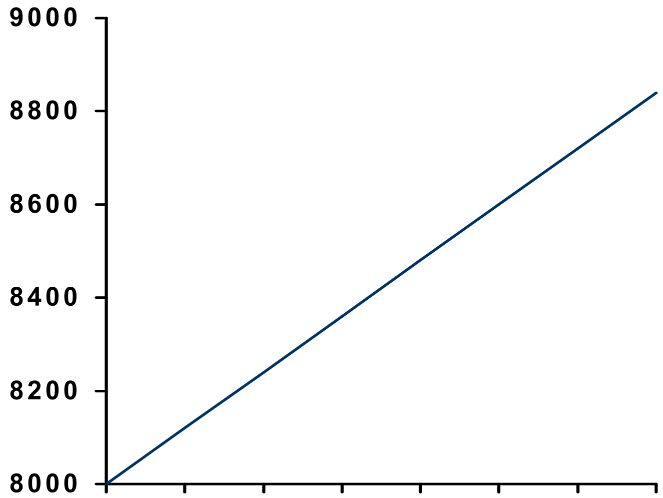
$P_1=8120$

$P_2=8240$

$P_3=8360$

$P_4=8480$

...



Em 5 anos, teremos 60 transições (12meses*5anos) e cada uma representa um incremento de 120ton. Assim sendo, a população após 5 anos é dada pelo 60º termo da sequência populacional e é obtido adicionando-se 60 transições de 120 ton cada, às já 8000ton existentes na lixeira.

Por outras palavras, $P_{60} = 8000 + 60*120 = 15200$

Para sabermos quantos meses são necessários para que a lixeira atinja o seu valor máximo de 20.000ton, tem que se resolver a seguinte equação:

$$8000+120*x=20000$$

Esta tem como solução x = 100.

Isto significa que a lixeira demora 100 meses (8 anos e 4 meses) a atingir a sua capacidade máxima.

Baseando-nos nestes resultados, pensamos que os oficiais locais deveriam começar a pensar em construir outra lixeira.

Modelo de Crescimento Exponencial

A principal característica deste modelo é o facto de que em cada transição, a população se alterar segundo uma proporção fixa.

Thomas Malthus foi um economista, sociólogo e demógrafo britânico que estudou este modelo.

Thomas Robert Malthus nasceu em Fevereiro de 1766, em Inglaterra e morreu em Saint Catherine, Somerset, em 23 de Dezembro de 1834.

O sociólogo e economista britânico Thomas Malthus é o primeiro a teorizar sobre o desequilíbrio ambiental. Ele, em 1798, estabelece uma relação entre o crescimento populacional e o de alimentos conhecida como lei de Malthus: enquanto a produção de alimentos cresce em progressão aritmética, a população cresce em progressão geométrica.

Malthus prevê que chegará o momento em que o contingente populacional será superior à capacidade do planeta de alimentá-lo. Mais tarde, os avanços tecnológicos aplicados à agricultura permitem relativizar o rigor da visão malthusiana. Na atualidade, porém, suas idéias são retomadas com um outro sentido: o crescimento da população mundial aumenta a pressão sobre o meio ambiente e pode tornar inviável a vida no planeta.

Como aplicação deste modelo de crescimento, têm-se o seguinte exemplo:

Exemplo: Um estudante deposita 500 € numa conta poupança que paga 12% de juro mensal. Pretende comprar um portátil, para uso pessoal, no valor de 1500 €.

Será que ao final de 9 meses, ele já poderá comprar o portátil?

Ora, o essencial do crescimento exponencial é a multiplicação repetida, ou seja, cada transição consiste em multiplicar o tamanho da população por um factor constante, r, a sequência definida por esta propriedade é designada por **Progressão Geométrica**.

Matematicamente, pode-se descrever este modelo recursivamente por:

$$P_n = P_{n-1} * r \Longrightarrow$$

Descrição Recursiva do Modelo de Crescimento Exponencial

razão da progressão

Ou de forma explícita por:

$$P_n = P_0 * r^n \Longrightarrow$$

Descrição Explícita do Modelo de Crescimento Exponencial

No crescimento exponencial é preciso ter atenção pois, uma ideia frequente, mas errada, é a de que a população se torna sempre maior. Como tal se pode verificar:

Se $r > 1$, temos um crescimento real;

Se $r < 1$, temos um decréscimo;

Se $r = 1$, temos uma população constante.

Agora, voltando ao nosso exemplo, verificamos que temos um crescimento real.

A população inicial é 500 €.

Podemos então construir a seguinte sequência populacional:

P_1 = 500 + 500*0,12 = 500*1,12 = 560 €

P_2 = 500*1,122 = 627,20 €

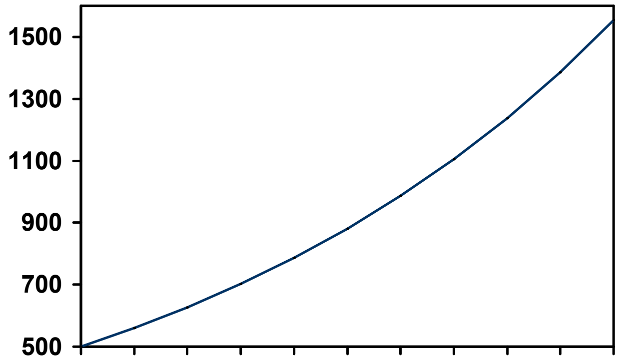
P_3 = 500*1,123 = 702,46 €

…

P_6 = 986,91€

P_8 = 1237,98 €

P_9 = 1386,54 €



Respondendo á nossa questão, “Será que ao final de 9 meses, ele já poderá comprar o portátil?”, verificamos que a resposta é negativa, pois o portátil custa 1500 € mas na conta poupança o estudante só tem 1386,54€.

Coloca-se então outra questão: E ao final de 10 meses já haverá dinheiro suficiente na conta? Efectuando os cálculos temos, P_{10} = 1552,92 €.

Assim, o balanço da conta após 10 meses será de 1552,92 € . É então nesta altura, que o estudante poderá adquirir o seu portátil.

Modelo de Crescimento Logístico

Embora estes modelos anteriormente estudados, (Modelo Linear e Modelo Exponencial) sejam muito utilizados em diversos problemas de diferentes áreas, se nos referirmos a populações animais, estes não são satisfatórios.

Na população biológica, geralmente dá-se o caso, em que a razão de crescimento de uma população animal não é sempre a mesma. Em vez disso, ela depende da interacção com outras populações (predadores, presas,...) e mais importante ainda, depende do tamanho da própria população.

Quando o tamanho de uma população é pequeno, há mais espaço onde ela possa crescer, então a taxa de crescimento será alta, mas por vezes a população cresce demasiado, o que leva à sua decadência e poderá mesmo levar à sua extinção.

O **modelo de crescimento logístico,** de entre os muitos modelos matemáticos que se dedicam a problemas com uma taxa de crescimento variável num *habitat* fixo, é o mais simples. A ideia base deste modelo é o facto de a taxa de crescimento ser directamente proporcional ao espaço disponível no *habitat* da população.

Apresentaremos de seguida, um exemplo para melhor ilustrar este modelo.

Exemplo: Suponhamos que temos um tanque no qual pretendenos criar uma determinada variedade de truta. O parâmetro de crescimento da dita espécie é 2.5, este parâmetro é um valor tabelado, tendo sido obtido através de estudos realizados em condições óptimas. Todas as espécies do reino animal possuem o seu parâmetro de crescimento.

Decidimos iniciar o negócio da cultura de peixe, colocando trutas no tanque de forma a ocupar 20% da sua capacidade máxima.

Estudemos agora este modelo para posteriormente conseguirmos resolver este problema.

Existem duas maneiras diferentes de descrever este modelo matematicamente:

① Sendo C uma constante que representa o ponto total de saturação do *habitat*

e P_N o tamanho da população, então o espaço livre é a diferença entre a capacidade do habitat e o tamanho da população, isto é:

$$C - P_N$$

Mas, como a taxa de crescimento é proporcional ao espaço livre, temos que a taxa de crescimento para um período N é dada por:

$$N = R(C - P_N)$$

Onde R é a constante de proporcionalidade, a qual depende da população em estudo.

Devido ao facto de :

$$\left(\begin{array}{c}\text{População}\\\text{no}\\\text{Período N}\end{array}\right) \mathbf{x} \left(\begin{array}{c}\text{Taxa de crescimento}\\\text{para}\\\text{o período N}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{População}\\\text{no}\\\text{Periodo N+1}\end{array}\right)$$

Obtem-se assim uma regra de transição para o modelo Logístico:

$$P_{N+1} = R\ (\ C - P_N\ )\ P_N$$

Nesta expressão estão presentes duas constantes: R que depende da população que nós estamos a estudar e C que depende do *habitat*.

Podemos no entanto, reescrever esta equação de uma forma mais agradável.

② Considerando que o máximo da população é 1(isto é, 100% do habitat é ocupado pela população) e o mínimo é 0 (isto é, a população está extinta) e todos os tamanhos possíveis da população são representados por fracções entre 0 e 1, que serão denotados por p_N.

O espaço disponível relativo é então $(1-p_N)$.

A regra de transição do modelo logístico pode ser então reescrito sob uma equação mais simples, designada por:

Equação Logística

$$p_{N+1} = r(1 - p_N)p_N$$

Nesta equação temos que:

- p_N representa a fracção da capacidade do *habitat* que já foi ocupada pela população, isto é, $p_N = P_N / C$.
- a constante r que se designa por parâmetro de crescimento depende da taxa de crescimento, R, e da capacidade do *habitat*, C.

Regressando ao nosso exemplo, temos então:

$$p_0 = 0,2$$

; pois no início da cultura de peixe, as trutas ocupavam 20% da capacidade máxima do tanque.

Após a 1ª época de criação tem-se:

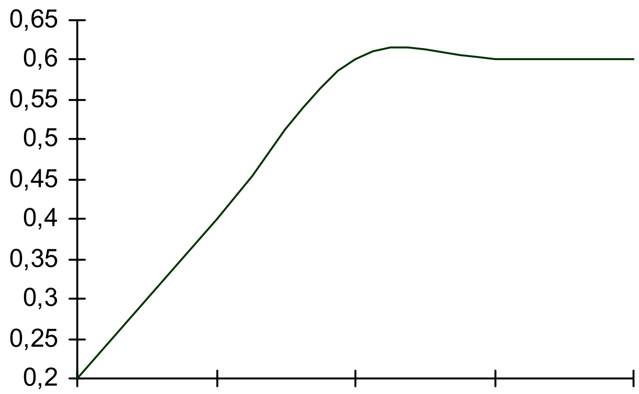
$$p_1=2,5\cdot(1-0,2)\cdot 0,2=0,4$$

Depois da 2ª época de criação obtemos:

$$p_2=2,5\cdot(1-0,4)\cdot 0,4=0,6$$

Após a 3ª época, temos:

$$p_3=2,5\cdot(1-0,6)\cdot 0,6=0,6$$



Verifica-se então que o número de trutas se mantém constante, nas duas últimas gerações, logo se continuarmos a calcular a população nas épocas seguintes, o valor encontrado é sempre igual.

Conclui-se assim que a população de trutas estabiliza aos 60%.

Conclusões

Apresentaremos de seguida, uma síntese das características dos três modelos apresentados anteriormente.

Modelo de Crescimento Linear

↻ A sequência da população é descrita por uma progressão aritmética;

↻ A população cresce pela adição de uma constante, c, em cada período de transição;

↻ É usual encontrar-se este modelo de crescimento em populações de objectos inanimados.

Modelo de Crescimento Exponencial

↻ A sequência da população é descrita por uma progressão geométrica;

↻ A população cresce pela multiplicação de uma constante, r (razão da progressão), em cada período de transição.

↻ É usual encontrar-se este modelo de crescimento em populações de crescimento ilimitado.

Modelo de Crescimento Logístico

↻ A sequência populacional varia de uma época para a outra, dependendo do espaço disponível no habitat da população;

↻ É usual encontrar-se este modelo de crescimento, ou variações deste em diversas populações animais.

BIBLIOGRAFIA

- Tannebaum, Peter e Arnold, Robert; “ Excursions in Modern Mathematics”; 4th Edition, Prentice Hall, 2001
- Revista Super Interessante de Setembro 2004
- Brown, Dan; “ O Código da Vinci”

- www.goldennumber.net
- www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/crescimento%20na%20natureza.ppt
- http://ptmat.lmc.fc.ul.pt/~albuquer/fibonacci/trabalho/princip.htm
- www.revista-temas.com/contacto/NewFiles/contactos5.html
- http://cidadaodomundo.weblog.com.pt/arquivo/031883.html
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica
- http://spiralesc.webhostme.com/la_spirale_de_l'escargot.htm
- www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/crescimento%20Populacional.ppt
- http://economiabr.net/biografia/malthus.html

Trabalho realizado por:

Ana Nunes

Dina Ferreira

Marisa Loureiro

Fim