



UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Natureza - caos ou ordem?



Fundamentos e Ensino da Álgebra
2004-2005

Ana Batanete

Andreia Castro

Hirllany Lago

Índice

Prefácio	5
Introdução	6

CAPÍTULO I – Geometria Fractal

1.1. Cronologia.....	8
1.2. O que é um fractal?.....	14
1.3. Benoit Mandelbrot.....	15
1.4. Definição matemática de fractal.....	18
1.5. Onde se encontram os fractais na natureza?.....	19
1.6. Características de um fractal.....	23
1.6.1. Como calcular a dimensão fractal ?.....	24
1.7. Tipos de Fractais existentes.....	26
1.8. Os fractais na arte.....	28
1.8.1. Escultura fractal.....	29
1.8.2. A música fractal.....	30
1.9. Geometria Euclidiana versus Geometria Fractal.....	32

CAPÍTULO II – Estudo de alguns fractais

2.1. Curva de Peano	34
2.2. Curva de Von Koch.....	35
2.3. Floco de Neve de Koch.....	37
2.4. O Triângulo de Sierpinski.....	43
2.5. Conjunto de Mandelbrot.....	48
2.6. Linha costeira de uma região	53

CAPÍTULO III – Teoria do Caos

3.1. Conceito	57
3.2. Efeito Borboleta	58
3.3. A função logística	58
3.4. Objecto Caótico	61

CAPÍTULO IV – Caos e Geometria Fractal no Ensino Secundário

4.1. A utilização da linguagem do caos e da geometria fractal.....	65
4.2. Actividades.....	67
4.2.1. Construção de cartão fractal.....	67
4.2.2. Construção do Conjunto de Cantor.....	69
4.2.3. Construção do Triângulo de Sierpinski.....	71
4.3. Considerações gerais.....	74
Conclusão.....	76
Bibliografia.....	78

Nos primeiros tempos o mundo era visto como algo completamente imprevisível, governado por divindades caprichosas. A revolução newtoniana veio depois trazer a ideia de que é possível prever quase tudo (...). Mas podemos estar hoje no início de uma nova oscilação do pêndulo, com o reconhecimento de que muitas das regras deterministas mais simples provocam, afinal, comportamentos dinâmicos caóticos e imprevisíveis.

Ian Stewart

Prefácio

Com a realização deste trabalho pretendemos apresentar de forma simples e clara um tema, que tem vindo a ser desenvolvido ao longo das últimas décadas, e cujas aplicações nas ciências naturais parecem ser infindáveis: a geometria fractal e a teoria do caos.

No contexto da disciplina de Fundamentos e Ensino da Álgebra pretendemos fornecer, aos nossos colegas, as bases teóricas necessárias à inserção do tema nos conteúdos programáticos do ensino secundário.

Contudo a abordagem que fazemos é superficial. Muito mais teria merecido ser considerado. No entanto, relativamente a todos os aspectos apresentados, citamos referências onde poderão ser aprofundadas as, em muitos casos breves, dissertações incluídas.

Introdução

Desde os primórdios que o Homem ambiciona dominar a natureza, e, para isso, desvendar os seus mistérios. Aquilo a que chamamos hoje ciência, só foi possível graças a esta crença. As descobertas foram ao longo dos tempos surgindo, com base na observação exaustiva, na experimentação, no ensaio de teorias.

No entanto a matemática, no universo das ciências foi muito mais longe, não se limitou a interpretar fenómenos naturais ou físicos. Partiu para um mundo muito mais vasto: o da abstracção. A busca no meio físico e social de aplicações das suas descobertas vem, frequentemente, depois... A teoria do caos e a geometria fractal são exemplos claros deste facto. Embora os primeiros estudos remontem do início do século XX, as suas (inúmeras) aplicações começaram a surgir só na década de setenta. No contexto das ciências naturais as aplicações parecem, hoje, não ter fim e fomentam uma nova visão da natureza.

Na Ciência que herdámos dos nossos professores e de outros estudiosos o desejo de compreender fixava-se na busca do simples, do regular, do equilíbrio estável, do periódico. No entanto, a Natureza apresenta fenómenos que exibem tanto de perfeito, como de irregular, instável e não periódico. A geometria fractal e a teoria do caos vieram permitir que a busca pelo menos comum na natureza (o regular, o periódico) desse lugar ao estudo da sua verdadeira identidade.

O século que agora finda teve um desenvolvimento na Matemática quase tão grande como todo o anterior desenvolvimento: o estudo do simples deu lugar ao estudo do complexo, o do regular ao do irregular, o do equilíbrio estável, à dialéctica (estável-instável) do hiperbólico, o do periódico deu lugar ao do aperiódico, tão comum nos estudos de Economia ou de Meteorologia. A Natureza apresenta-se Fractal e Caótica. No entanto, a Geometria Fractal e a Teoria do Caos estão apenas no princípio.

J. Sousa Ramos - DM-IST-UTL

Para melhor explicar a forma, como os temas em questão, desencadearam mudanças tão relevantes no pensamento científico, façamos uma analepse.

CAPÍTULO I – Geometria Fractal

1.1. Cronologia

Séculos XVII e XVIII

Kepler, Galileu, Newton, Leibniz...

Kepler, Galileu iniciam estudo do comportamento dos sistemas dinâmicos, com a investigação do movimento dos planetas na antiga astronomia.



Porquê usar palavras? A geometria existia antes de nós. É co-eterna com o espírito de Deus, é o próprio Deus. A geometria com as suas esferas, cones, hexágonos, espirais, deu a Deus um modelo para a criação e foi implantada no homem como imagem e semelhança de Deus.

Johannes Kepler, 1610



O universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem da matemática e os seus caracteres são os triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes ficamos à deriva num labirinto escuro.

Galileu Galilei, 1626

Apoiados nos seus estudos Newton e Leibniz (entre outros) estudando as regularidades dos movimentos e fenómenos naturais criaram o cálculo diferencial e integral, com base na ideia de infinitésimo e de limite. Com este, não só descreveram leis do mundo físico e natural, como as formalizam em teoremas. Depois de árduo estudo com sucesso, a Natureza aparecia simples, espantosamente compreensível.



Gottfried Wilhelm
Leibniz (1646-1716)



Sir Isaac Newton
(1643-1727)

Muitos outros foram motivados a desenvolver a Matemática e a interpretar fenómenos, tudo no paradigma do regular, do estável e do periódico. O mundo físico e natural parecia apresentar-se de tal modo, que era possível com um determinado conjunto de equações prever todos os seus estados futuros. Acreditava-se que evolução da ciência consistia essencialmente em encontrar novas equações que descrevessem um maior número fenómenos. Emergiu a revolução tecnológica com base no regular, na criação de máquinas cujo comportamento é perfeitamente determinado à priori.

No mercado da física matemática encontram-se agora expostos os produtos da loja determinista(...) se o dono da loja pudesse ver o futuro ficaria espantado com as maravilhas tecnológicas que saíram das suas mercadorias. Rádio, televisão. Automóveis. Telefones. Radar. (...) Pontes suspensas. Satélites de comunicação. Computadores. Discos compactos. Mas também metralhadoras, ogivas nucleares MIRV e poluição. (...) Mas não nos enganemos! A tecnologia é criação nossa (...)

Ian Stewart

Séculos XIX e XX

Weierstrass, Cantor, Peano, von Koch, Poincaré...

Monstros Matemáticos

Nos finais do séc. XIX grande parte da comunidade matemática titulava de “lamentável praga” o fascínio que demonstravam, alguns dos mais conhecidos investigadores da altura, por objectos que punham em causa algumas das bases da matemática da época.

Estas novas estruturas, em pleno desenvolvimento no mesmo momento histórico do movimento cubista estabelecem-se como um padrão de gosto nas Artes: foram consideradas "patológicas" ou ainda uma "galeria de monstros".

Em 1872 **Weierstrass** exhibe a primeira função contínua, que não admite derivada em nenhum dos seus pontos.

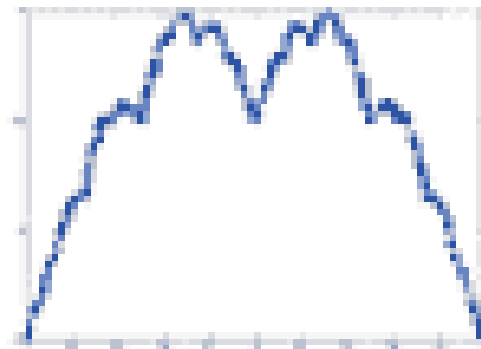


Fig. 1: Curva de Weierstrass

Uma década mais tarde, em 1882, **Cantor** reproduz um método que transforma uma recta numa poeira de pontos. Segue-se a sua construção.

Tomemos um segmento de recta qualquer (por exemplo o intervalo $[0,1]$ da recta real), agora subdividamos o mesmo em três partes iguais e retiremos o segmento central; repitamos o processo para os dois segmentos restantes. Iterando este processo uma infinidade de vezes obtemos o chamado conjunto de Cantor.

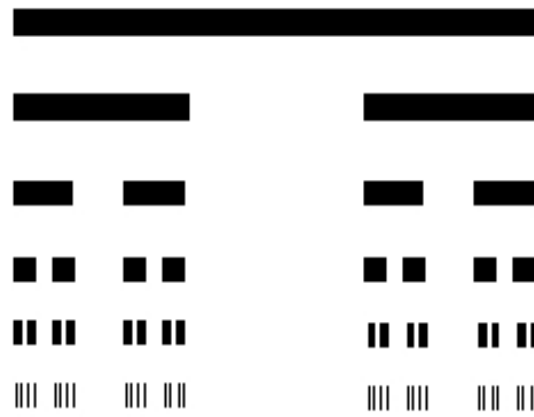


Fig. 2: Conjunto de Cantor

O sistema de medidas usado na época (medida de Lebesgue) admitia que este tinha dimensão nula. Hoje admite-se que assim não é.

Outro dos mais conhecidos casos patológicos é conhecido como curva de Peano (designação genérica aplicada a toda uma família de curvas concebidas entre 1890 e 1925), que preenche na totalidade uma região do plano. Os passos da sua construção são apresentados, com pormenor mais à frente.

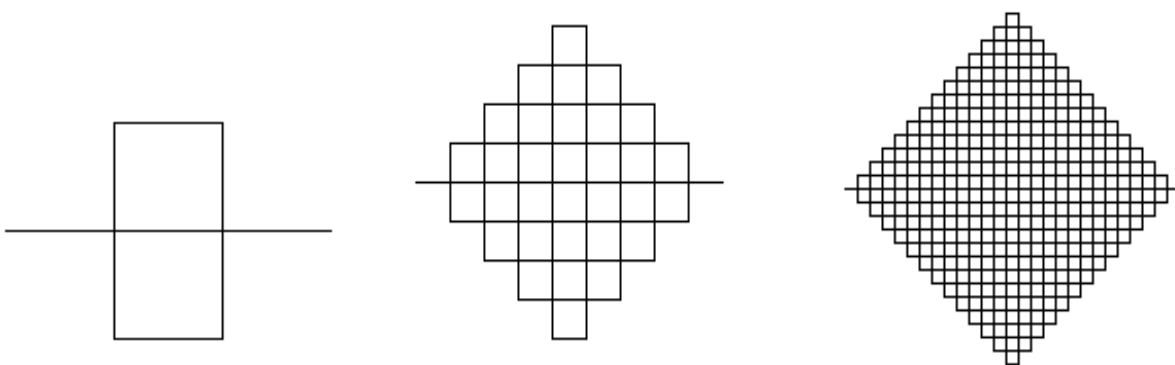


Fig. 3: Três primeiros passos da construção da Curva de Peano

Em 1904 Helge von Koch (matemático sueco) exhibe uma curva que oculta uma propriedade surpreendente: o perímetro infinito delimita uma área finita.

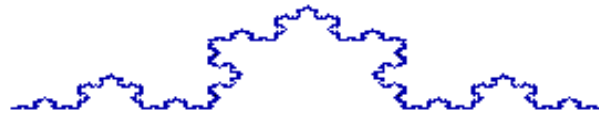
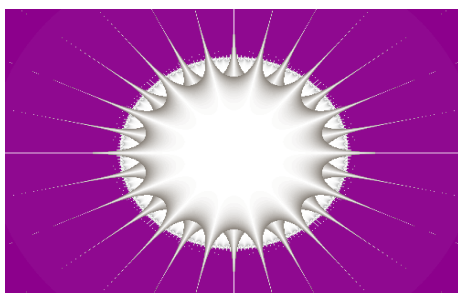


Fig.4: Curva de von Koch

Ainda no início do século XX, **Poincaré** apoiado em exemplos da física e da astronomia verifica que o comportamento, mesmo sistemas simples, pode ser muito complexo, instável, não-linear. Nasce a topologia como novo campo de visão para a física e para a matemática.

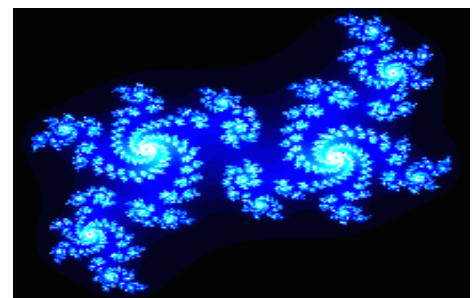
Embora seguissem isoladamente, todas estas descobertas caminhavam no mesmo sentido. O pensamento determinista mostrou-se falível e inadequado a muitas situações reais.

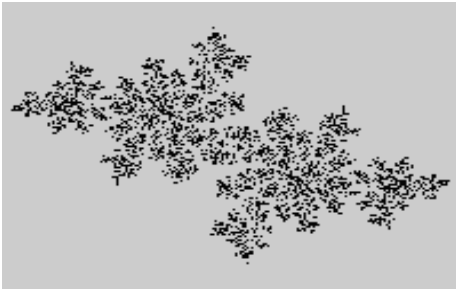
Gaston Julia e Pierre Fatou apresentaram, em 1918, um trabalho sobre processos iterativos envolvendo números complexos que mais tarde viriam a ser conhecidos como “Conjuntos de Julia”.



Alguns conjuntos de Julia são semelhantes a círculos comprimidos e deformados.

Outros estão quebrados em regiões.





Outros ainda parecem partículas de poeira separadas.

Fig.4, 5 e 6: Conjuntos de Julia obtidos por computador

Mas nem palavras nem os conceitos da geometria euclidiana servem para os descrever. O matemático francês Adrien Douady disse: «Podemos obter uma variedade incrível de conjuntos de Julia: alguns formam uma gorda nuvem, outros formam um esquelético arbusto de espinhos, outros parecem as faíscas que flutuam no ar depois de um fogo-de-artifício. Obtemos, ainda, a forma de um coelho e muito deles têm cauda de cavalo-marinho.»

Na década de sessenta **Sharkovsky**, verificou com a ajuda do computador, que iterando funções simples (como quadrática) se obtinham objectos com propriedades insólitas e ordens muito estranhas, tal como as formas idealizadas antes por **Cantor**, **Peano**, **von Koch** e **Julia**.

Assim, o desenvolvimento das tecnologias da informação e do computador, como laboratório precioso de cálculo, vieram incentivar a análise e discussão destes objectos, já que tornaram possível a reprodução com maior detalhe do comportamento de funções iterativas.

Tanto o conjunto de Cantor, como as curvas de Peano e von Koch e os conjuntos de Julia, se inserem hoje, numa classe mais ampla de objectos denominados *fractais*.

1.2. O que é um fractal?

O termo fractal foi criado por Benoit Mandelbrot, para designar um objecto geométrico que nunca perde a sua estrutura qualquer que seja a distância de visão. Fractal acima de tudo significa auto-semelhante. Mandelbrot classificou desta forma os seus objectos de estudo pois estes possuíam dimensão fraccionária. As dimensões não inteiras tornaram-se, então, uma forma de quantificar qualidades que, de outro modo, permaneceriam inquantificáveis: o grau de irregularidade ou tortuosidade de um objecto.

Se repararmos, todas as formas geométricas ortodoxas, degeneram quando são ampliadas ou diminuídas. Um círculo numa escala muito maior não é nada mais do que uma recta. Basta ter em mente que há apenas 500 anos pensava-se que a Terra era plana. Isto, porque à escala humana não vemos mais do que uma linha recta no horizonte. No entanto, a maior parte dos objectos com que lidamos no nosso dia-a-dia não são rectas, nem esferas, nem cones. Olhando, por exemplo, para um tronco de uma árvore, verificamos que é extremamente rugoso e irregular. Se observarmos um pequeno pedaço desse tronco ao microscópio observamos novas rugosidades e irregularidades que antes não tínhamos observado. No entanto esta imagem assemelha-se bastante à anterior. É esta irregularidade regular que caracteriza um fractal.

1.3. Benoit Mandelbrot

Mas quem é então Mandelbrot?

Benoit Mandelbrot

Nasceu em Varsóvia, em 1924, numa família de judeus lituanos; o pai era vendedor de roupas e a mãe dentista.

Era um matemático faz-tudo, acolhido e adoptado pela secção de investigação pura da IBM (International Business Machines Corporation). Foi atirado para os assuntos económicos para estudar a distribuição dos pequenos e grandes rendimentos numa economia.



Ao contrário de outros matemáticos, ele enfrentava os problemas com a ajuda da sua intuição para formas e padrões. Desconfiava de análises mas confiava nas suas representações mentais e já tivera a ideia de que outras leis, com um comportamento diferente, governariam os fenómenos do acaso.

Ao estudar os preços do algodão e ao passar os dados para os computadores da IBM, deparou com o resultado incrível que à tanto procurava. Os números responsáveis pelas aberrações, do ponto de vista da distribuição normal, produziam simetria do ponto de vista da escala. Cada variação de preços era casual e imprevisível, mas a sequência das variações era independente das escalas: as curvas das variações diárias e das variações mensais combinavam perfeitamente (como mostra a figura).

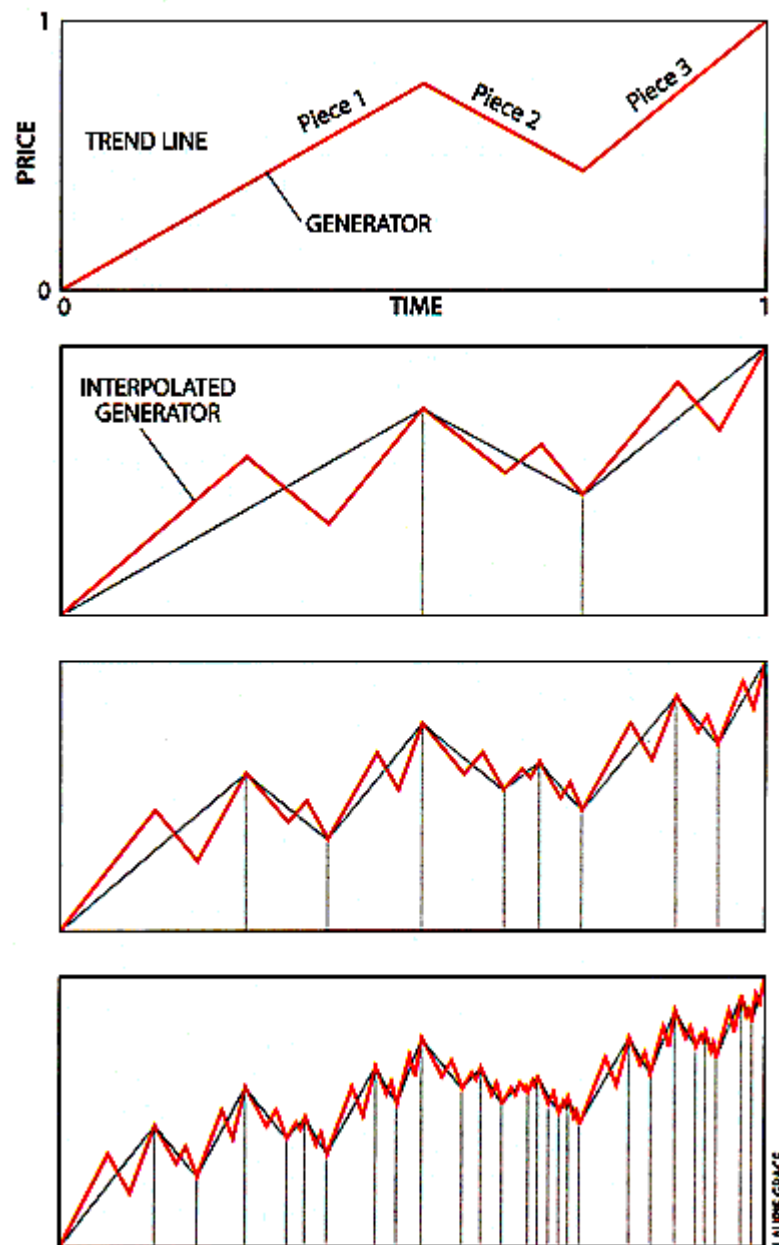


Fig. 7: Gráfico de distribuição normal dos preços do algodão em função do tempo.

Inacreditavelmente, a análise de Mandelbrot mostrava que o grau de variação se mantivera constante ao longo de um período tumultuoso de sessenta anos que assistira a duas guerras mundiais e uma depressão.

Mais tarde a IBM deparou com problemas de ruído nas linhas telefônicas que eram utilizadas para transmissão de dados. A existência desses ruídos provocava erros nos dados transmitidos. Quando Mandelbrot analisou o problema, descobriu que os ruídos, apesar de aleatórios, apresentavam características peculiares: em certos períodos havia muito

poucos ruídos, noutros havia vários erros de transmissão e mais: dentro de períodos de erro havia períodos de transmissão perfeita. A previsão dos ruídos era aparentemente impossível. Mandelbrot, com a sua intuição geométrica, associou a frequência dos erros de comunicação ao conjunto de Cantor (figura 2). Mais tarde a sua intuição confirmara-se: de facto esta abstracção matemática representava com uma exactidão impressionante, o ruído nas transmissões. Assim, a solução que a IBM podia tomar era nula. A estratégia a utilizar era descobrir e corrigir os erros, pois não era possível preveni-los.

Na história do caos, Mandelbrot seguiu uma via própria. A representação da realidade que elaborava mentalmente em 1960 evoluiu de uma excentricidade para uma geometria complexa. No entanto fez o cruzamento de muito do conhecimento avulso sobre o tema já existente, dando especial ênfase aos já mencionados conjuntos de Julia.

Numa tarde invernosa de 1975, preparando a sua primeira obra importante para a publicação em livro, Mandelbrot decidiu que precisava de um nome para as suas formas, as suas dimensões e a sua geometria. Num dicionário de latim encontrou o adjectivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar. A ressonância das palavras inglesas afins – *fracture* e *fraction* – pareceu-lhe adequada. Criou então a palavra (substantivo e adjectivo, tanto em inglês como em francês) *fractal*.

O termo *fractal* veio para ficar, como meio de descrever, calcular e pensar as formas irregulares e fragmentárias, complexas e recortadas.

1.4 Definição matemática de fractal

Mandelbrot apresentou como primeira definição de fractal um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff (também conhecida por dimensão fractal) é estritamente superior à sua dimensão topológica.

No entanto esta definição mostrou-se insuficiente, pois exclui alguns conjuntos que podem ser considerados fractais.

Foram propostas outras definições mas nenhuma foi satisfatória. Estamos, portanto, perante um conceito geométrico para o qual não existe, até à data uma definição formal.

Assim, cingimo-nos à definição intuitiva: um fractal é um objecto gerado através de uma fórmula matemática a partir funções reais ou complexas, muitas vezes simples, mas que quando aplicadas de forma iterativa, produzem formas geométricas abstractas, com padrões complexos que se repetem infinitamente.

1.5 Onde se encontram os fractais na natureza?

As imagens que calculei com a minha teoria matemática assemelhavam-se curiosamente à realidade: e se eu podia imitar a natureza, era porque provavelmente teria descoberto um dos seus segredos(...)

Benoît Mandelbrot

Muitas formas naturais como nuvens, montanhas, linhas costeiras, raízes, ramos de árvores, estruturas vitais (como vasos sanguíneos, sistema nervoso...) e, segundo algumas teorias até mesmo a estrutura do universo, têm formas que se assemelham a objectos fractais .



Fig. 8: Sistema circulatório humano. Estudos atribuem-lhe estrutura fractal.



Fig. 9: Gengibre. O seu crescimento é fractal: cada nova parte é igual ao todo.

Fig. 10: Couve-flor Um dos mais comuns exemplos de fractal na natureza

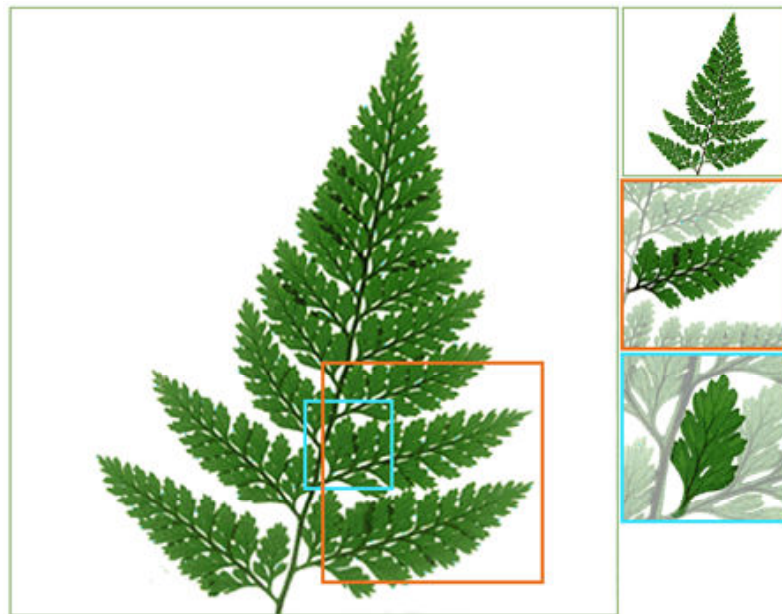


Analisemos agora dois dos exemplos mais comuns: o bróculo e o feto.

Se cortarmos uma parte da flor do bróculo (como mostra a figura) verificamos a sua semelhança com a restante flor. Este possui um número infinito de pequenas cópias (pelo menos aproximadamente) de si próprio.



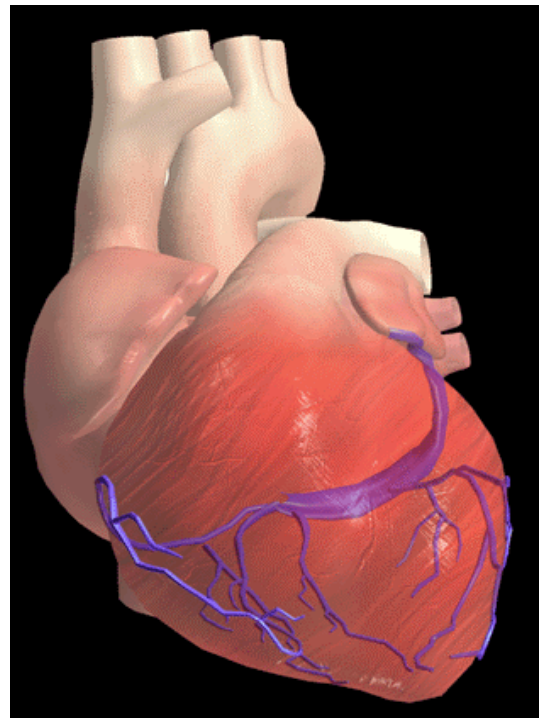
Outro exemplo é o feto que exibe, melhor ainda, a auto-semelhança, característica dos fractais.



Isto é, o bróculo e o feto têm propriedades fractais. Contudo, os objectos da Natureza não são verdadeiramente fractais, pois eles não são infinitamente complexos, ou seja não possuem auto-semelhança exacta.

Também na descrição de fenómenos naturais ditos caóticos como a turbulência de fluídos, a distribuição do caudal dos rios em função do tempo, alguns movimentos fisiológicos, os fractais encontraram aplicações.

No final da década de oitenta, alguns estudos revelaram que um coração saudável bate a um ritmo fractal e que um batimento cardíaco quase periódico, é um sintoma de insuficiência cardíaca.



Os vasos sanguíneos, da aorta aos capilares, têm também propriedades fractais. Ramificam-se, dividem-se e voltam a ramificar-se até se tornarem tão finos que as células sanguíneas são forçadas a passar em fila indiana. A natureza dessa ramificação é fractal. A estrutura evoca a dos monstruosos objectos imaginários concebidos pelos matemáticos do início do século, queridos de Mandelbrot. Por necessidade fisiológica, os vasos sanguíneos realizam uma espécie de magia dimensional. Tal como a curva de Koch, por exemplo, define uma linha de comprimento infinito numa área de superfície finita.

A natureza da estrutura fractal operou com tal eficiência que, em muito tecidos, nenhuma célula se encontra a mais de três ou quatro células de distância de um vaso sanguíneo.

No tubo digestivo, o tecido apresenta ondulações nas ondulações.

Foram feitas muitas abordagens diferentes de modelação matemática dos ritmos fisiológicos. Modelos criados para o by pass, procuram traduzir quantitativamente as correntes iónicas que fundamentam a sua actividade. Como existem inúmeros canais diferentes, a interpretação das experiências e a formulação de modelos teóricos torna-se um procedimento complexo. Trabalhos recentes demonstram que pequenas modificações dos parâmetros em modelos matemáticos para os by pass podem levar a dinâmicas caóticas.

Na General Electric, os fractais tornaram-se um princípio organizador do estudo dos polímeros e também – ainda que tal trabalho fosse em segredo – dos problemas de segurança dos reactores nucleares.

Assim, ao longo das últimas décadas a geometria fractal não só foi alargando o seu domínio de intervenção, como foi conquistando cada vez mais adeptos. Muitos são os domínios da ciência e das artes que exibem hoje as suas aplicações que parecem não ter fim.

1.6. Características de um fractal

Um fractal possui três características muito particulares:

- a sua auto-semelhança;
- a sua dimensão;
- a sua complexidade infinita.

A **auto-semelhança** de um fractal baseia-se no facto de o conjunto ser constituído por pequenas cópias de si mesmo. Assim, pode dizer-se que todas as escalas são indicadas para representar um fractal: a sua forma é independente da escala considerada. No entanto verificamos que esta afirmação tem limites quando abandonamos os modelos matemáticos e consideramos objectos naturais.

Distinguem-se, assim, dois tipos de auto-semelhança: a exacta e a aproximada (ou estatística).

A auto-semelhança exacta é uma abstracção, só existe no seio da matemática. Os objectos naturais não possuem (como já foi dito) auto-similaridade perfeita.

Formalmente, uma figura possui auto-semelhança exacta se, para qualquer dos seus pontos, existe uma vizinhança que contém uma parte da figura semelhante à sua totalidade.

Relativamente à auto-semelhança aproximada, embora não seja também real, pois estamos limitados à escala visível, encontra aproximações surpreendentes em formas da natureza.

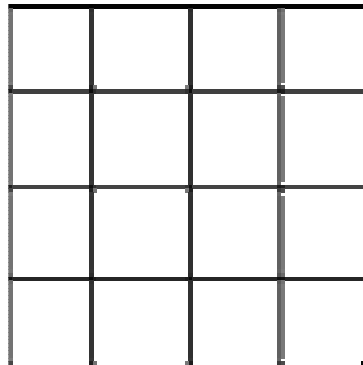
A **dimensão fractal** relaciona-se com o grau de irregularidade ou tortuosidade de um fractal e representa o seu grau de ocupação no espaço.

1.6.1. Como calcular a dimensão fractal?

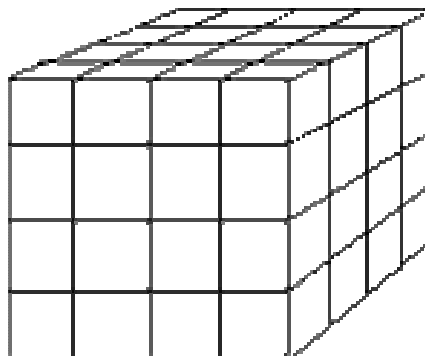
1. Considere-se um segmento de recta e divida-se 4 ($=4^1$) partes iguais.



2. Efectuando um processo semelhante para cada um dos lados de um quadrado obtêm-se 16 ($=4^2$) partes iguais.



3. Procedendo-se de igual modo para o cubo, obtêm-se 64 ($=4^3$) partes iguais.



Sejam:

R – a razão na qual dividimos cada segmento da figura (coeficiente de redução)

N – o número de partes resultantes da transformação de um segmento da figura anterior, em cada iteração

d - a dimensão

- Para a recta (dimensão 1) $N = 1/R^1$
- Para o quadrado (dimensão 2) $N = 1/R^2$
- Para o cubo (dimensão 3) $N = 1/R^3$

Generalizando para qualquer dimensão

$$N = 1/R^d$$

Ou seja,

$$N = \frac{1}{R^d} \Leftrightarrow N = \left(\frac{1}{R}\right)^d \Leftrightarrow N = \left(\frac{1}{R}\right)^d$$

Logo,

$$d = \log_{(1/R)} N$$

Isto é,

$$d = \frac{\ln N}{\ln(1/R)}$$

A d chamamos dimensão fractal ou dimensão de Hausdorff. Este processo válido para todas as figuras com auto-semelhança exacta, fractais ou não e confirma o valor da dimensão atribuída pela geometria euclidiana.

Por exemplo, para o cubo temos

$$R = \frac{1}{4}$$

$$N = 64 = 4^3$$

$$d = \frac{\ln 4^3}{\ln 4} = \frac{3 \log 4}{\log 4} = 3$$

A complexidade infinita dos objectos fractais advém do facto de o processo gerador dos fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações.

1.7. Tipos de fractais existentes

Numa análise exhaustiva as imagens fractais podem subdividir-se numa quantidade considerável de tipos. No entanto inserem-se essencialmente em duas categorias:

-**Fractais geométricos** que derivam da geometria tradicional através de funções iterativas a partir de uma figura inicial (ex. conjunto de Cantor, a curva de von Koch, o triângulo de Sierpinski, a esponja de Menger). As primeiras figuras fractais deste tipo surgiram entre finais do séc. XIX e o início do séc. XX.

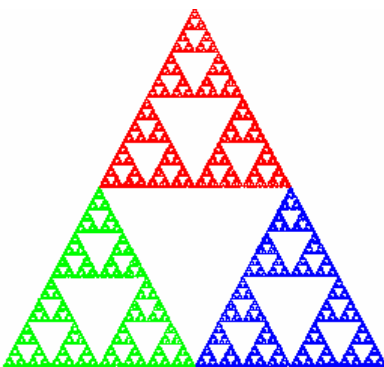


Fig. 11: Pirâmide de Sierpinski

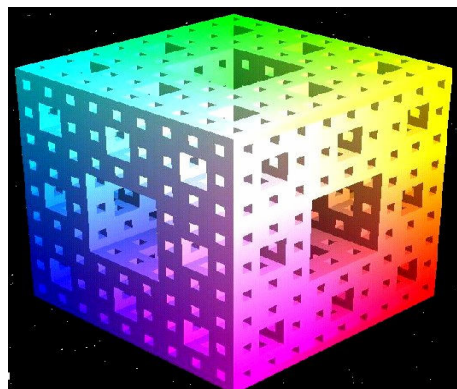


Fig. 12: Esponja de Menger

-**Fractais aleatórios** gerados por computadores são o resultado de iterações, operadas num sistema não linear, de forma recursiva.

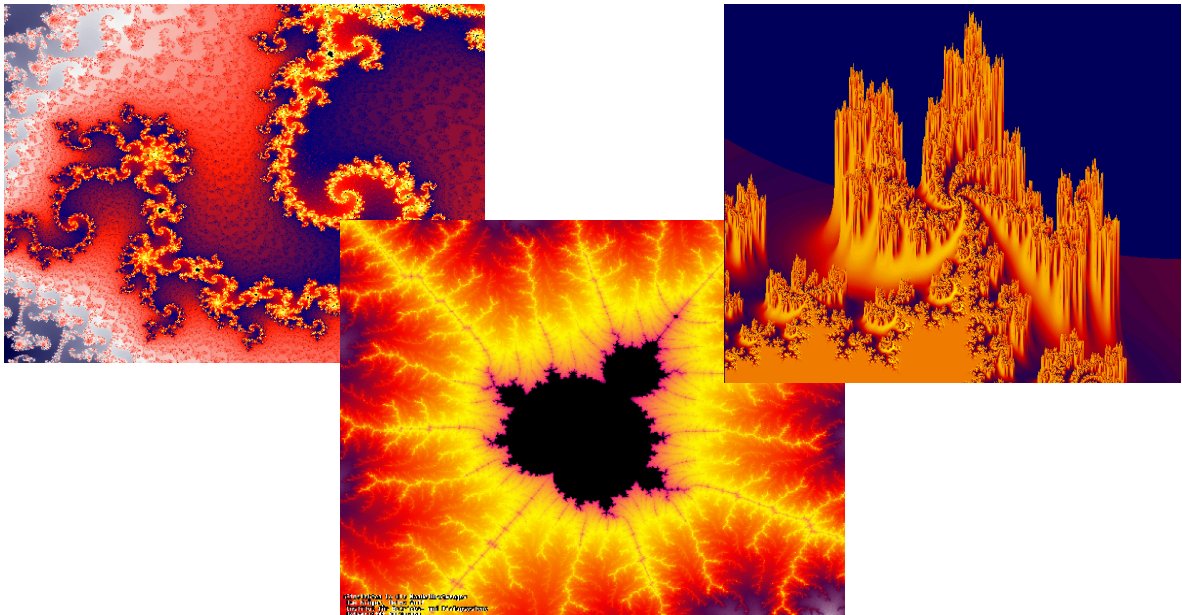


Fig. 13: Fractais aleatórios obtidos por computador através de funções iterativas complexas.

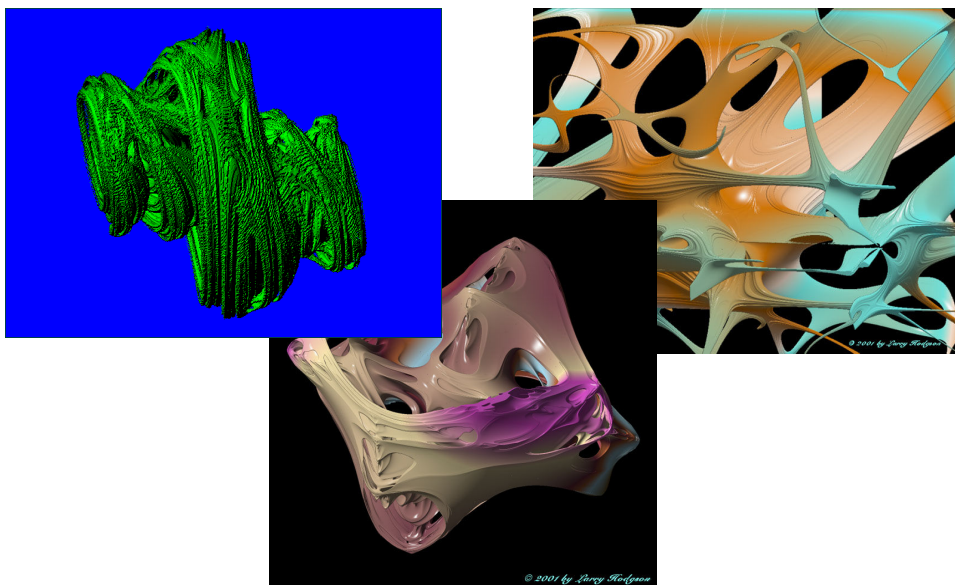


Fig. 14: Fractais aleatórios obtidos por computador a partir de funções iterativas quaterniônicas.

Estes possibilitam a quem os observa, imagens de uma beleza impressionante, bem como um vasto leque de aplicações artísticas que vai desde a indústria cinematográfica à música.

1.8. Os fractais na arte...

As paisagens fractais geradas por processos aleatórios, concebidas por computador foram uma das primeiras aplicações artísticas da geometria fractal e são usadas, por exemplo, na indústria cinematográfica. Em Hollywood tornaram-se uma ferramenta poderosa para a criação de paisagens terrestres e extraterrestres realistas, para efeitos especiais de filmes.



Fig. 15: paisagem fractal concebida por computador através dos programas 3DEM e Terragen

1.8.1. Escultura fractal...

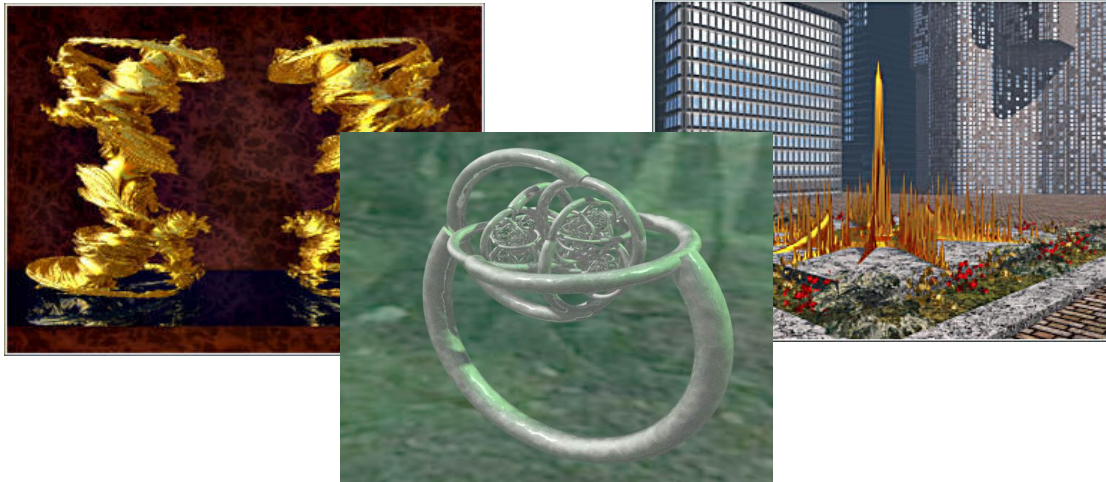


Fig. 16: Esculturas fractais que participaram no Concurso Anual de Arte Fractal de 2002.

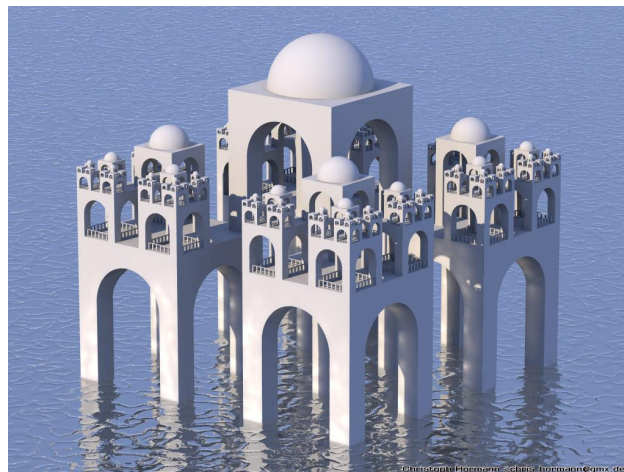


Fig. 17: Exemplo de aplicação da geometria fractal à arquitectura

1.8.2. A música fractal...

A música fractal, tal como os fractais, é o resultado de um processo repetitivo no qual um algoritmo é aplicado múltiplas vezes para elaborar a sua anterior produção, resultando em melodias auto-semelhantes. Nos dias de hoje, os fractais têm vindo a fornecer resultados extremamente interessantes na música, por isso tem vindo a ganhar entusiastas e apreciadores.

Assim, uma aplicação visível de que música, natureza e Matemática são três áreas extremamente interligadas, é o facto dos fractais poderem ser convertidos em música, apesar de isto requerer processo complexo. Existem vários métodos para converter imagens fractais em música. No entanto, este processo só pode ser feito com recurso a algum do mais avançado software e de tecnologia informática.

Os fractais mais conhecidos são também os mais utilizados na criação de música fractal. Entre estes destaca-se o conjunto de Mandelbrot, do qual falaremos mais adiante.

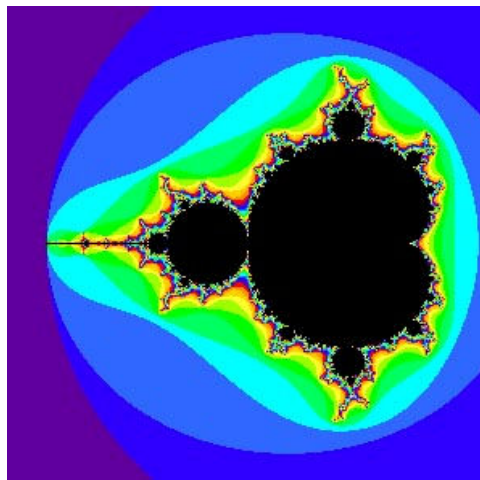


Fig. 18: Conjunto de Mandelbrot

Como se consegue obter uma música a partir desta imagem aparentemente tão simples?

Sabemos, pelo que foi referido anteriormente, que só é possível "fabricar" música fractal com o auxílio de um computador devidamente equipado com o software necessário. Mas, antes disso, será preciso passar a imagem do fractal para o programa que se esteja a utilizar. Assim, este

fractal pode ter um pedaço dele transferido para um quadrado no computador denominado de "pixel". Geralmente, cada "pixel" tem cores separadas. Depois cada cor é transferida para uma nota numa escala musical. Usando estas cores como guias e procurando ao longo da imagem linha por linha, obtém-se uma canção.

Outro método é transferir notas baseadas na localização do "pixel" no visor do computador, na ordem pela qual o fractal foi criado.

Estes são apenas dois dos métodos possíveis para a transformação de uma imagem fractal em música fractal, uma vez que existem muito mais processos. A melhor maneira para converter fractais em música depende do fractal que se está a converter, pois todos eles actuam de uma forma diferente.

Vendo as coisas deste ponto de vista, pode até parecer extremamente simples a produção de música fractal; e se bem que é verdade que qualquer um de nós a poderia fazer com o auxílio de programa informático indicado, também não é menos verdade que tudo aquilo que está "por detrás" do programa ultrapassa em muito os conhecimentos de um mero curioso. Existe algo em comum em todos os programas que convertem o fractal de Mandelbrot em música: todos eles se regem pelo mesmo processo iterativo que dá origem a este belíssimo fractal.

Por mais estranho que possa parecer, desde há muito tempo que a música e a matemática se encontram associadas. Hoje em dia, os computadores perpetuam essa ligação.

1.9. Geometria Euclidiana versus geometria fractal

Dois graus de ordem no caos: a ordem euclidiana e a ordem fractal(...)

A geometria fractal é caracterizada por duas escolhas: a escolha de problemas no seio do caos da natureza, uma vez que descrever todo o caos seria uma ambição sem esperança e sem interesse, e a escolha de ferramentas no seio da matemática, pois procurar aplicações das matemáticas pelo simples facto de serem belas acabou sempre por causar dissabores.(...)depois de progressivamente amadurecidas, estas duas escolhas, criaram algo de novo: entre o domínio do caos desregulado e a ordem excessiva de Euclides existe agora uma nova zona da ordem fractal.

Benoît Mandelbrot

Conta a tradição...

Há mais de dois mil anos, Euclides enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, vista como um todo, se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis. Desde então empenhou-se em provar que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples (cubos, triângulos, prismas...).

Concentrado sobretudo nas formas, deixou de lado um elemento fulcral neste tipo de análise: a dimensão.

No entanto, inconscientemente, esta foi a chave do seu pensamento inicial: um grão de areia, apresenta isoladamente três dimensões (comprimento, altura e profundidade), enquanto que a superfície arenosa da praia é visualmente plana (duas dimensões). Ou seja, a fronteira do conjunto tridimensional composto pelos grão de areia, é bidimensional. O conceito de dimensão topológica formaliza precisamente esta ideia. Como vimos o

conceito de fractal está directamente relacionado com o conceito de dimensão topológica.

Onde parou Euclides começou a geometria fractal: no conceito de dimensão.

Há alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou da sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, troncos de árvores não são hexágonos e rios não desenhavam espirais.

Benoît Mandelbrot

Geometria Euclidiana	Geometria fractal
Tradicional (mais de 2000 anos)	Contemporânea (ultimos trinta anos)
Baseada em tamanho ou escala pré-definida	Tamanho ou escala específica
Adequada a objectos criados pelo homem	Adequada a formas naturais
Dimensão inteira {0,1,2,3}	Dimensão real no intervalo [0,3]
Descrita por fórmulas e equações	Uso de algoritmos recursivos

CAPÍTULO II – Estudo de alguns fractais

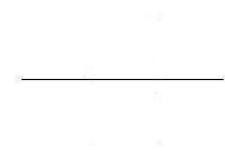
2.1. Curva de Peano

Apresentada em 1890, a Curva de Peano, é um exemplo de fractal que preenche todo o plano.

A Curva de Peano é construída por um processo iterativo.

Construção da Curva de Peano:

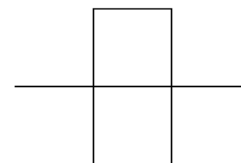
Passo 0: Constrói-se um segmento de recta. (Figura de partida)



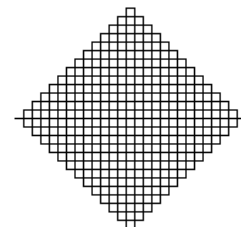
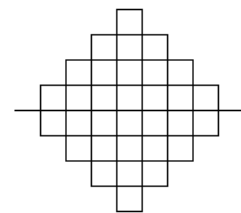
Passo 1: Divide-se esse segmento em três partes iguais.



Passo 2: Sobre o segmento médio, constrói-se um rectângulo bissectado pelo segmento, formando dois quadrados com lado igual ao segmento que lhes deu origem.

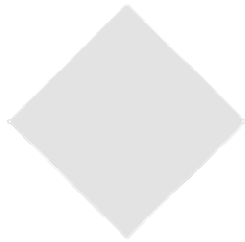


Passo 3: Em cada segmento dos nove restantes, repetem-se os passos 1 e 2, e assim sucessivamente, até ao infinito.



Observe-se que as curvas obtidas nas diferentes iterações da recursão, a partir da primeira, intersectam-se a si próprias, nos vértices dos pequenos quadrados que se vão formando em cada iteração. Pode-se demonstrar que no limite (levando a construção

anterior até uma infinidade de iterações), a Curva de Peano, não é mais do que uma superfície completamente preenchida.



Qual a dimensão da Curva de Peano?

Supondo que o segmento inicial tem comprimento 1 ($L=1$). Em cada iteração um segmento dá origem a 9 segmentos ($N=9$), e o coeficiente de redução é $1/3$. ($R=1/3$). Portanto, a dimensão da curva de Peano é:

$$d = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2 \frac{\log(3)}{\log(3)} = 2$$

A Curva de Peano é o exemplo de uma curva, dimensão 1 segundo a Geometria Euclidiana, que preenche uma superfície de dimensão 2. Podemos então dizer que a Curva de Peano é bidimensional.

2.2 Curva de Von Koch

Um dos exemplos de fractais mais simples é a Curva de Koch. Esta foi apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch, construída, tal como a Curva de Peano por um processo iterativo.

Construção da Curva de Von Koch:

Passo 0: Constrói-se um segmento de recta. (Figura de partida)



Passo 1: Divide-se esse segmento em três partes iguais.

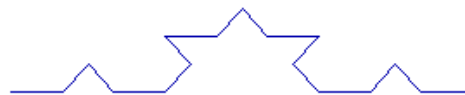


Passo 2: Substitui-se o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo a que, o segmento médio e os dois novos segmentos formem um triângulo equilátero.

Obteve-se uma linha poligonal com quatro segmentos de comprimento igual.



Passo 3: Posteriormente, repetem-se os passos 1 e 2 para cada um dos segmentos obtidos



Passo 4: E repete-se este processo até ao infinito.



Fig. 18: Sequência de imagens da construção da Curva de Von Koch.

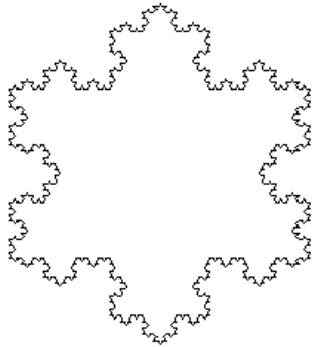
Esta curva tem **comprimento infinito**, **não tem derivada em nenhum dos seus pontos**.

Qual a dimensão da Curva de Von Koch?

Supondo que o segmento inicial tem comprimento 1. Em cada iteração um segmento dá origem a 4 segmentos ($N=4$), e o coeficiente de redução é $1/3$. ($R=1/3$). Portanto, a dimensão da curva é:

$$d = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.26$$

2.3. Floco de Neve de Koch



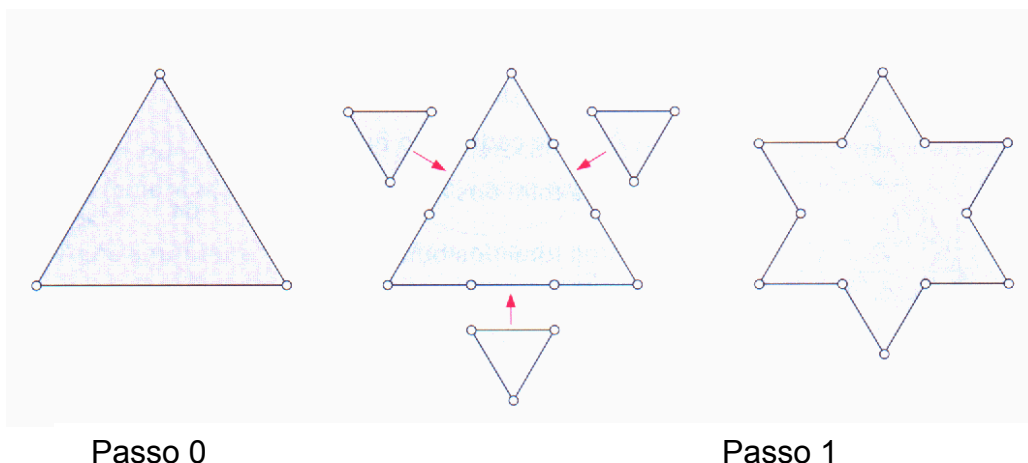
A Curva de Koch deu origem a um outro fractal, conhecido como ilha de Von Koch ou Floco de Neve, (recebeu este nome por sua semelhança com um floco de neve). Estes dois fractais são muito semelhantes, mas o Floco de Neve parte de um triângulo equilátero, e não de um segmento de recta, aplicando-se o mesmo processo de construção.

Fig. 19: Floco de Neve de Koch.

Construção do Floco de Neve de Koch:

Passo 0: Constrói-se um triângulo equilátero (Figura de partida).

Passo 1: Divide-se em três partes iguais cada um dos lados de um triângulo, construindo-se sobre cada um dos segmentos médios um novo triângulo equilátero. Obtendo-se a “Estrela de David”, com 12 lados;



Passo 0

Passo 1

Fig. 3: Esquema de construção de um Floco de Neve (primeiros dois passos).

Passo 2: Repete-se o processo de construção sobre cada um dos lados da figura obtida anteriormente. Para as figuras seguintes o processo repete-se. Obtém-se assim a seguinte sequência de figuras:



Fig. 20: Sequência de transformações do Floco de Neve de Koch.

Em cada passo desta construção, a figura vai mudando de forma, e à medida que o número de passos aumenta, essas modificações tornam-se cada vez menos visíveis. Quando estas mudanças se tornam invisíveis a olho nu, diz-se que o processo se tornou **visualmente estável**.

Vamos agora estudar alguns aspectos do Floco de Neve de Koch. Desprezemos o interior da figura e consideremos apenas a fronteira do Floco de Neve. Tendo em conta o seu processo de construção, é fácil de perceber que à medida que se vão fazendo transformações o número de lados da curva aumenta, mas o comprimento de cada um deles diminui.

Como varia o número de lados da curva com as transformações?

Por cada nova transformação que se faz, cada lado dá origem a quatro lados

Assim, temos a seguinte tabela:

Passos	Número de lados
Figura de partida	3 = 3×4^0
1º Transformação	$3 \times 4 = 12 = 3 \times 4^1$
2º Transformação	$12 \times 4 = 48 = 3 \times 4^2$
3º Transformação	$48 \times 4 = 192 = 3 \times 4^3$
4º Transformação	$192 \times 4 = 768 = 3 \times 4^4$
...	

Quadro 2 - Variação do número de lados da curva com as respectivas transformações.

Podemos então concluir que o número de lados de cada figura em função do número de transformações é dado pela progressão geométrica $L_n = 3 \times 4^n$. Esta sucessão é monótona crescente e à medida que o número de transformações cresce (isto é, $n \rightarrow +\infty$) a sucessão também tende para $+\infty$. Isto significa que a curva vai ter um número infinito de lados.

Como varia o comprimento dos lados da curva com as transformações?

Suponhamos que o lado do triângulo inicial tem uma unidade de medida. Os lados de cada nova figura são três vezes mais pequenos que os da figura anterior.

Assim:

Passos	Medida de cada lado
Figura de partida	1
1º Transformação	$1/3 = 1/3^1 = 3^{-1}$
2º Transformação	$1/9 = 1/3^2 = 3^{-2}$
3º Transformação	$1/27 = 1/3^3 = 3^{-3}$
4º Transformação	$1/81 = 1/3^4 = 3^{-4}$
...	...

Quadro 3 - Variação da medida de cada lado da curva com as respectivas transformações.

A medida dos lados de cada figura em função do número de transformações é dado pela progressão geométrica de termo geral $M_n = 3^{-n}$. Esta sucessão é monótona decrescente e quando o número de transformações n tende para $+\infty$, a sucessão tende para zero ($\lim M_n = 0$). Isto significa que a medida de cada lado da curva tende para zero.

Como varia o perímetro da curva com as transformações?

Podemos definir a sucessão dos perímetros P_n à custa das duas sucessões anteriores. Assim $P_n = L_n \times M_n = (3 \times 4^n) \times (3^{-n}) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Esta sucessão é uma progressão geométrica de primeiro termo 3 (exactamente o perímetro do triângulo inicial) e de razão $\frac{4}{3}$. Quando n tende para $+\infty$, a sucessão tende para $+\infty$, ($\lim P_n = +\infty$) pois o primeiro termo é positivo e a razão é maior do que um, logo o perímetro do Floco de Neve de Koch é infinito.

Qual é a área do Floco de Neve de Koch?

Consideremos, para facilitar os cálculos, que a área do triângulo inicial que serve de ponto de partida para a construção da Curva de Koch tem uma unidade de medida. Será que a área do floco de neve também cresce para o infinito?...

Começemos por estimar a área do Floco de Neve de Koch traçando um hexágono envolvendo a Estrela de David (passo 1). Ao continuar-se a construção, constata-se que a figura resultante do passo 2 ainda está contida no hexágono. É imediato verificar que isso vai acontecer em todos os passos, e que portanto no limite também acontece.

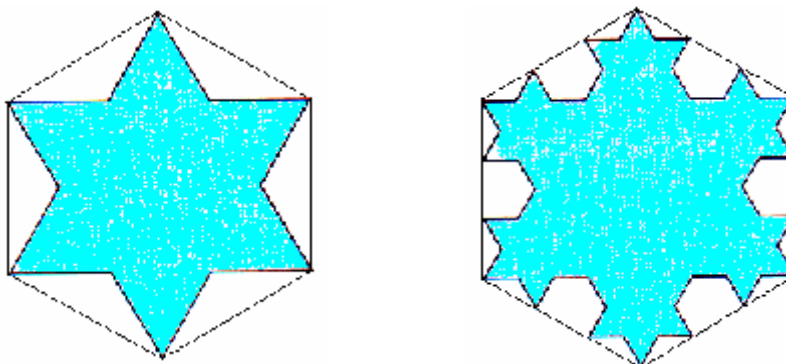


Fig. 21: Hexágono envolvendo a estrela de David e a figura resultante da transformação 2.

Pode-se então concluir que a área do Floco de Neve é inferior à área do hexágono (a qual é igual ao dobro da área do triângulo inicial, ou seja, 2).

Como a área do triângulo inicial é 1, a área da curva estará compreendida entre 1 e 2. Determinemos o seu verdadeiro valor: sabe-se que a área do polígono, em cada passo, obtém-se adicionando à área do polígono do passo anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes quantas o número de lados do polígono anterior.

Como foi dito anteriormente, no passo 0 (figura de partida) o triângulo tem área (A_0) igual a 1.

Pela semelhança de figuras planas, sabe-se que, se o lado de um polígono sofre uma redução de razão $\frac{1}{3}$, a área sofre uma redução de $\frac{1}{9}$.

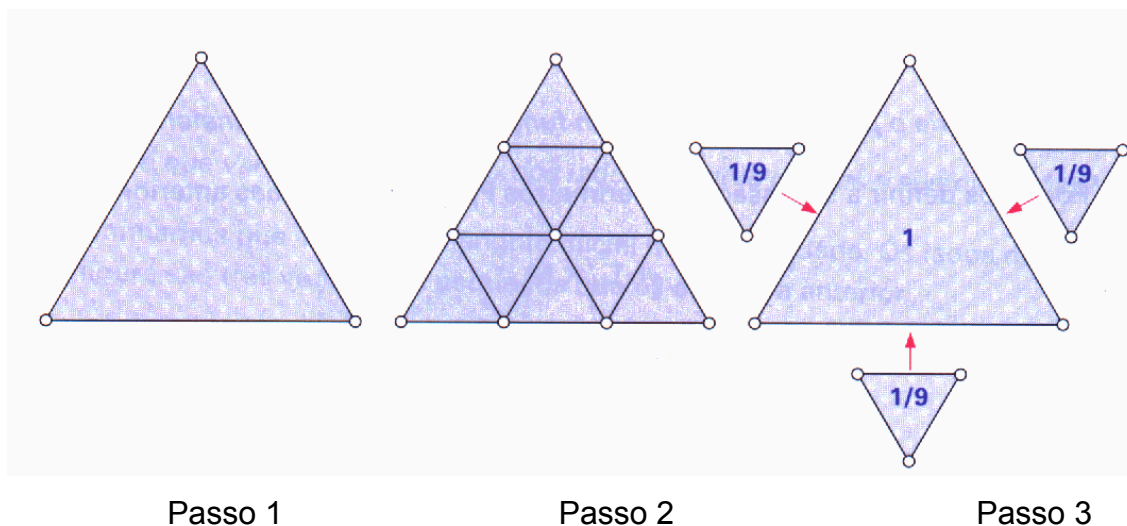


Fig. 22: Esquema da divisão do triângulo equilátero em nove triângulos equiláteros.

Sendo assim tem-se:

✚ No **passo 1**,

$$A_1 = 1 + 3 \times \left(\frac{1}{9}\right) \times 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

✚ No **passo 2**, como se obtém 3×4 segmentos de recta, vem

$$A_2 = 1 + \frac{1}{3} + (3 \times 4) \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}$$

✚ No **passo 3**, como se obtém 3×4^2 segmentos de recta, vem

$$A_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + (3 \times 4^2) \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

Continuando, sucessivamente, no passo $n + 1$, obtém-se

$$A_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

que é a soma de 1 com os termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é $\frac{1}{3}$ e a razão é $\frac{4}{9}$.

$$\text{Então } A_{n+1} = 1 + S_n, \text{ sendo } S_n = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}}.$$

$$\text{Calculando } S_n \text{ quando } n \text{ tende para infinito tem-se } \lim S_n = \lim \left(\frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{3}{5}.$$

Então, a área total limitada pelo Floco de Neve é $1 + \frac{3}{5} = 1,6$.

Podemos então concluir que, embora o perímetro do Floco de Neve seja infinito, a sua área é finita, nunca excedendo 1,6 unidades. Isto quer dizer que sendo a área do triângulo inicial A , a área do Floco de Neve construída a partir deste será $1,6 \times A$.

Qual é a dimensão do Floco de Neve de Koch?

O coeficiente de redução da construção é $R = \frac{1}{3}$ e em cada iteração um segmento dá origem a 4 segmentos de igual medida, $N=4$.

A dimensão do Floco de Neve será então:

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26.$$

Podemos interpretar este resultado do seguinte modo: por ser mais "enrugada" a curva ocupa mais espaço do que uma simples linha recta (dimensão 1), mas menos espaço do que uma superfície (que tem dimensão 2).

O Floco de Neve de Koch possui auto-semelhança exacta.

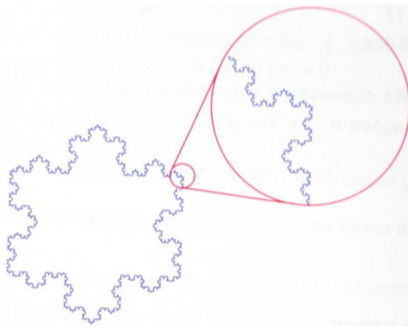


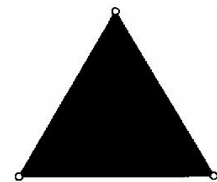
Fig. 23: Floco de neve de Koch com uma secção ampliada.

2.4. O Triângulo de Sierpinski

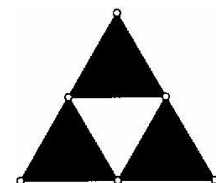
No início do século XX o matemático polaco Wacław Sierpinski (1882-1969) estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski ou Fractal de Sierpinski, que se obtém como limite de um processo iterativo.

Construção do Triângulo de Sierpinski:

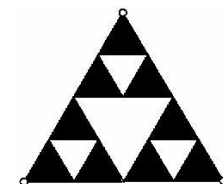
Passo 0 – Constrói-se um triângulo equilátero (sólido);



Passo 1 – Determina-se os pontos médios de cada um dos lados de um triângulo; une-se por segmentos esses pontos médios (2 a 2) e considera-se os 4 triângulos resultantes. Retira-se o triângulo central; ficamos assim com 3 triângulos sólidos;



Passo 2 – Aplica-se o procedimento descrito no passo 1 a cada um dos 3 triângulos resultantes, obtemos 9 triângulos sólidos;



Passo N – Aplica-se o procedimento descrito no passo 1 a cada um dos triângulos sólidos obtidos no passo N-1, até ao infinito. Obtém-se assim o Triângulo de Sierpinski.

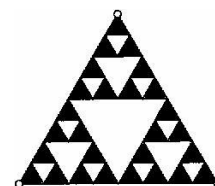


Fig. 23: Sequência do processo iterativo de construção do Triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski é a figura limite deste processo e não qualquer um dos passos finitos referidos anteriormente.

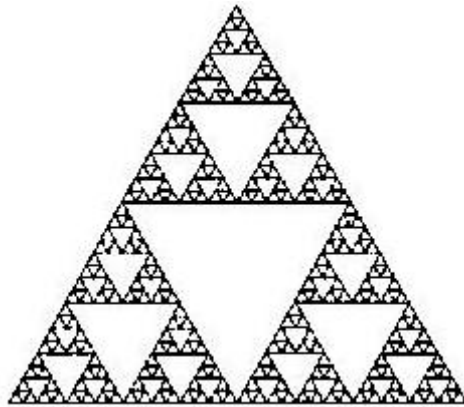


Fig. 24: Triângulo de de Sierpinski.

Qual a área do Triângulo de Sierpinski?

Consideremos A como sendo a área do triângulo inicial (passo 0) e vejamos como varia a área ao longo dos primeiros passos:

- Passo 0 $\rightarrow$ Área = A
- Passo 1 $\rightarrow$ Área = $\frac{3}{4} \times A$
- Passo 2 $\rightarrow$ Área = $\frac{9}{16} \times A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times A$
- Passo 3 $\rightarrow$ Área = $\frac{27}{64} \times A = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times A$
-
- Passo n $\rightarrow$ Área = $\left(\frac{3}{4}\right)^n \times A$

Então, no passo n , a figura terá área dada por $A_n = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Obtemos uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$ (maior do que zero e menor do que um) e primeiro termo positivo (pois A designa uma área logo é positiva) o que significa que a progressão geométrica tende para zero quando $n \rightarrow +\infty$. Então a área do triângulo de Sierpinski tende para zero.

Como a área, formada pelos triângulos retirados no processo de construção (a branco), é dada por $B_n = A - A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, esta vai tender para A.

O número de triângulos em cada passo da Carpete de Sierpinski é dado pela sucessão de termo geral $T_n = 3^n$ (logo o número de triângulos tende obviamente para o infinito).

Qual o perímetro do Triângulo de Sierpinski?

Consideremos o triângulo inicial (passo 0) com perímetro igual a P e vejamos como varia o perímetro ao longo dos primeiros passos:

- Passo 0 $\rightarrow$ Perímetro = P
- Passo 1 $\rightarrow$ Perímetro = $P \times \frac{3}{2}$
- Passo 2 $\rightarrow$ Perímetro = $3^2 \times \frac{P}{2^2} = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$
- Passo 3 $\rightarrow$ Perímetro = $3^3 \times \frac{P}{2^3} = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$
-
- Passo n $\rightarrow$ Perímetro = $P \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Então, no passo n, a figura terá perímetro dado por $P_n = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Obtemos uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$ (maior do que um) e primeiro termo P positivo (pois é um perímetro), o que significa que a progressão geométrica tende para infinito quando $n \rightarrow +\infty$. Então o perímetro do Triângulo de Sierpinski tende para infinito.

Qual a dimensão do Triângulo de Sierpinski?

Em qualquer um dos passos da construção do triângulo de Sierpinski, o coeficiente de redução é $R = \frac{1}{2}$ (do comprimento do segmento de recta do passo anterior) sendo o número de triângulos obtidos o triplo do obtido no passo anterior, isto é, $N=3$.

A dimensão do Triângulo de Sierpinski será então (atendendo ao passo 1 da construção):

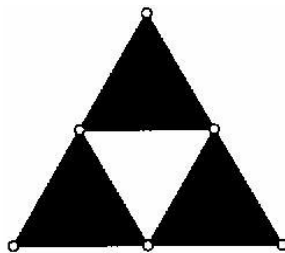
$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,59$$

O triângulo de Sierpinski e o triângulo de Pascal:

Pascal (1623-1662) estudou e demonstrou, no “*Tratado do Triângulo Aritmético*” publicado em 1654, diversas propriedades do triângulo que ficou conhecido com o seu nome e aplicou-as também no estudo das Probabilidades.

Antes de Pascal, já Tartaglia (1499-1557) usara o triângulo aritmético e, muito antes, também os matemáticos Árabes (séc. XIII) e Chineses (séc. XIV) o utilizavam.

Consideremos o passo 1 do triângulo de Sierpinski:



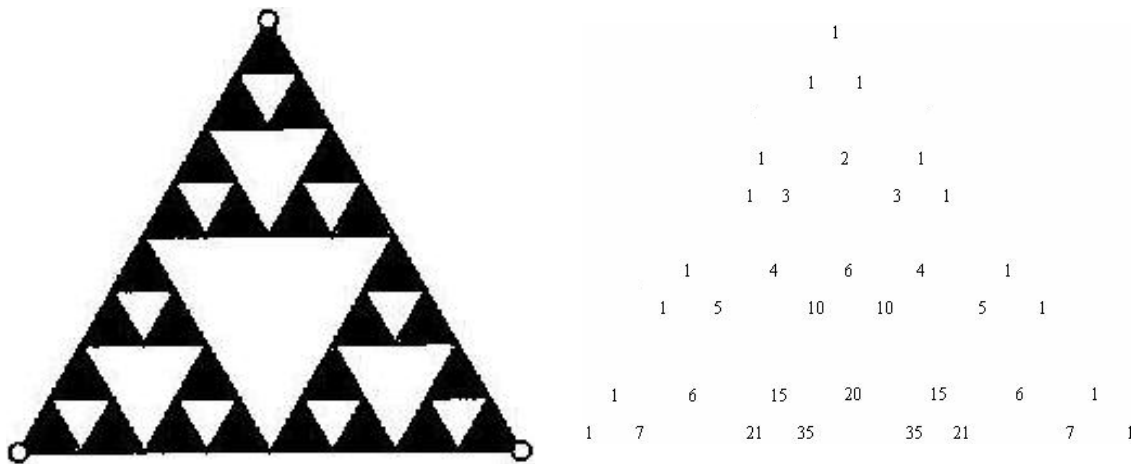
Consideremos também as quatro primeiras linhas do triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1
 \end{array}$$

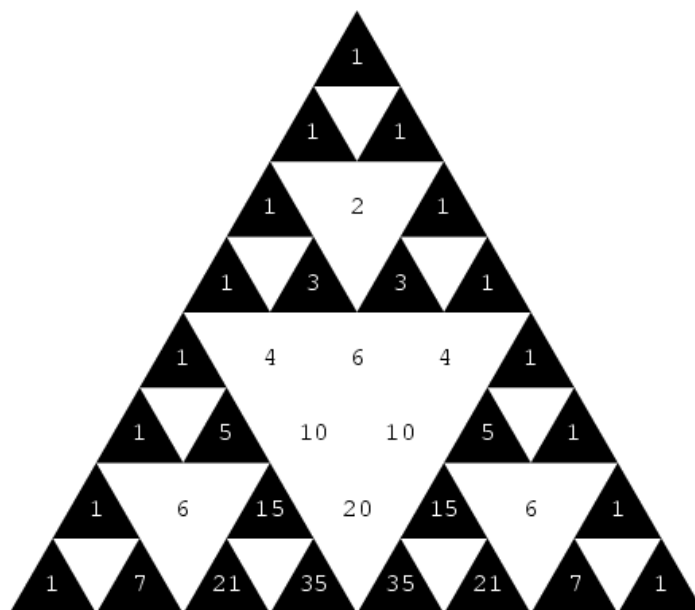
Além da semelhança geométrica, podemos reparar que sobrepondo estes dois triângulos, os números ímpares, do triângulo de Pascal, ficam sempre sobre os triângulos pretos do Triângulo de Sierpinski, enquanto os números pares ficam sobre os triângulos retirados no processo de construção.

Resta questionar o facto da propriedade enunciada anteriormente se manter quando ampliado os dois triângulos. Vejamos que sim.

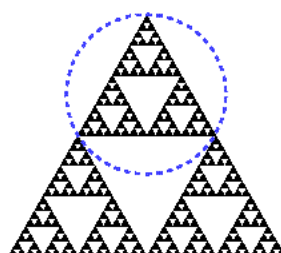
Consideremos o passo 3 do Triângulo de Sierpinski e consideremos também as oito primeiras linhas do triângulo de Pascal:



Sobrepondo um triângulo no outro conclui-se o pretendido.



É ainda importante referir que o triângulo de Sierpinski possui auto-semelhança exacta.



2.5. Conjunto de Mandelbrot

Ao conjunto de Mandelbrot também se chama “o homem do gengibre” por se assemelhar com um corpo gordo e uma cabeça redonda, como podemos observar na figura 8.

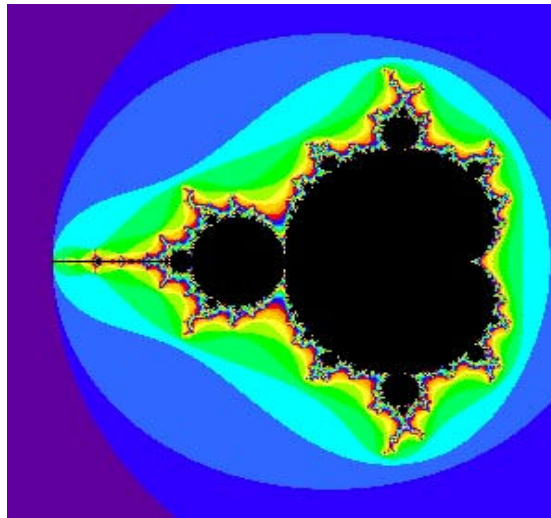


Fig. 25: Conjunto de Mandelbrot.

Se examinarmos a cor do conjunto de Mandelbrot através da janela ajustável dum ecrã de computador, observamos a sua complexidade ao longo das diversas escalas. Uma catalogação das diferentes imagens no seu interior ou uma descrição numérica no seu contorno iria exigir uma quantidade infinita de informação. O conjunto de Mandelbrot parece mais fractal do que os fractais, tão rica é a sua complexidade ao longo das escalas. Uma catalogação das diferentes imagens do seu interior ou uma descrição completa do conjunto através de uma linha de transmissão é preciso apenas umas dezenas de caracteres de código. Um sucinto programa de computador contém a informação suficiente para reproduzir todo o conjunto.

Podem ser formadas muitas formas fractais por processos iterativos no plano complexo, mas existe apenas um conjunto de Mandelbrot. Começou a aparecer, vago e espectral, quando Mandelbrot estava a tentar descobrir uma

maneira de generalizar uma classe de formas conhecidas por conjuntos de Júlia. Estas tinham sido concebidas e estudadas durante a primeira Guerra Mundial por Julia e Fatou, como já foi referido, trabalhando sem as imagens que um computador pode fornecer.

Em 1979, Mandelbrot descobriu que podia criar uma imagem num plano complexo que poderia servir como um catálogo dos conjuntos de Julia, um guia para qualquer um deles (como podemos observar na figura 26).

Um programa para o conjunto de Mandelbrot precisa apenas de alguns elementos essenciais. O motor principal é um ciclo de instruções que tomam o seu número complexo inicial e aplicam a este a sua regra aritmética. Para o conjunto de Mandelbrot, a regra é esta: $z \rightarrow z^2 + c$, onde z começa em zero e c é o número complexo correspondente ao ponto que está a ser calculado. Assim, tomamos 0, multiplicamo-lo por ele próprio e somamos o número inicial; tomamos o resultado – o número inicial - multiplicamo-lo por ele próprio e somamos o número inicial; tomamos o novo resultado, multiplicamo-lo por ele próprio e somamos o número inicial.

Como se pode desenhar o Conjunto de Mandelbrot?

Para responder a esta pergunta, basta explicar como se atribui a cor a um número complexo $a + ib$ qualquer, que vai ser desenhado como um ponto (a, b) no plano.

Denotemos por z o número anterior $(a + ib)$.

Submete-se o número z ao seguinte processo iterativo:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + W$$

em que w é um número complexo constante.

Observando o comportamento de z_{n+1} , ou seja, do seu módulo $|z_{n+1}|$, temos as seguintes possibilidades:

- ✚ $|z_n|$ se mantém sempre finito – Atribui-se a cor preta a z .

✚ $|z_n|$ tende para infinito – Atribuem-se diferentes cores a z , dependendo do comportamento de $|z_n|$. A classificação é definida por quem desenha o fractal.

Um ponto é marcado neste fractal não quando satisfaz a equação, mas sim segundo um certo tipo de comportamento. Um comportamento possível pode ser um estado estacionário; outro pode ser a convergência para uma repetição periódica de estados; e outro ainda pode ser um corrida descontrolada para o infinito.

Este comportamento de convergência para uma repetição periódica de estados é passível de ser observada e, depois, todos nos podemos interrogar se o resultado é infinito ou não.

Este comportamento assemelha-se ao processo de feedback no mundo do dia-a-dia. Pode imaginar-se que estamos a montar um microfone, amplificador e colunas de som num auditório – estamos preocupados com o ruído estridente de feedback acústico. Se o microfone capta um som suficientemente alto, o som amplificado vindo das colunas irá entrar de novo no microfone num ciclo infinito, com um som cada vez mais elevado. Por outro lado, se o som é baixo irá apenas desaparecendo, até deixar de ser ouvido. Para construir um modelo para este processo de feedback poderíamos escolher um número inicial, multiplicá-lo por si mesmo, multiplicar o resultado por si mesmo, e assim sucessivamente. Iríamos descobrir que os grandes números conduzem rapidamente ao infinito: 10, 100, 10000... Mas os números pequenos levam a zero:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \dots$$

O conjunto de Mandelbrot tem uma forma muito particular de auto-semelhança aproximada – existe uma repetição infinita do conjunto mas também uma infinita variedade de formas rodeando esse conjunto, se o ampliarmos suficientemente.

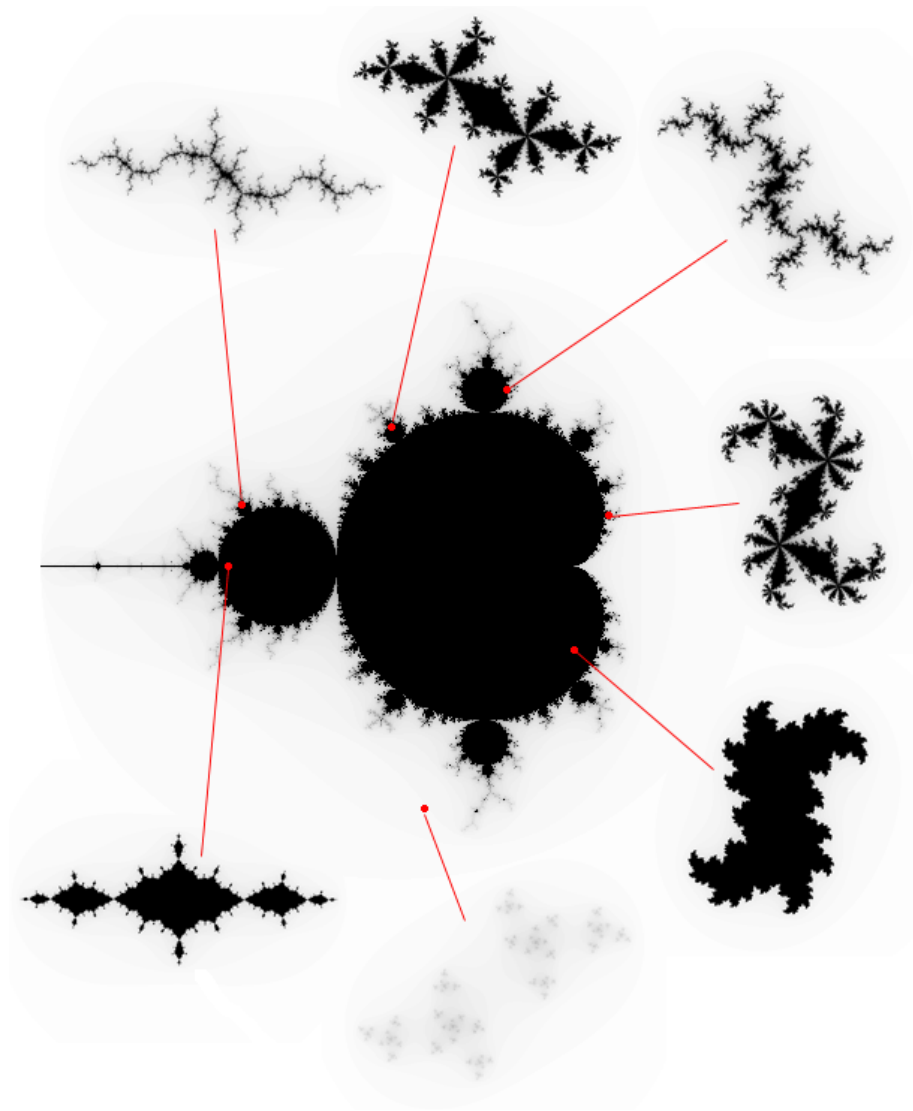


Fig. 26: Alguns conjuntos Julia que se podem encontrar no Conjunto de Mandelbrot.

Efectuando diversas ampliações podemos encontrar formas fascinantes que nos fazem lembrar botões de flor, cavalos-marinhos, arabescos, vórtices, torrões, cactos a deitar rebentos, espirais, cobras finas, ondas ou plantas exóticas encontramos um número infinito de cópias do próprio conjunto numa diversidade impressionante de escalas. É a auto-semelhança levada ao seu extremo mais belo, como se pode observar pelas sucessivas ampliações do conjunto de Mandelbrot:

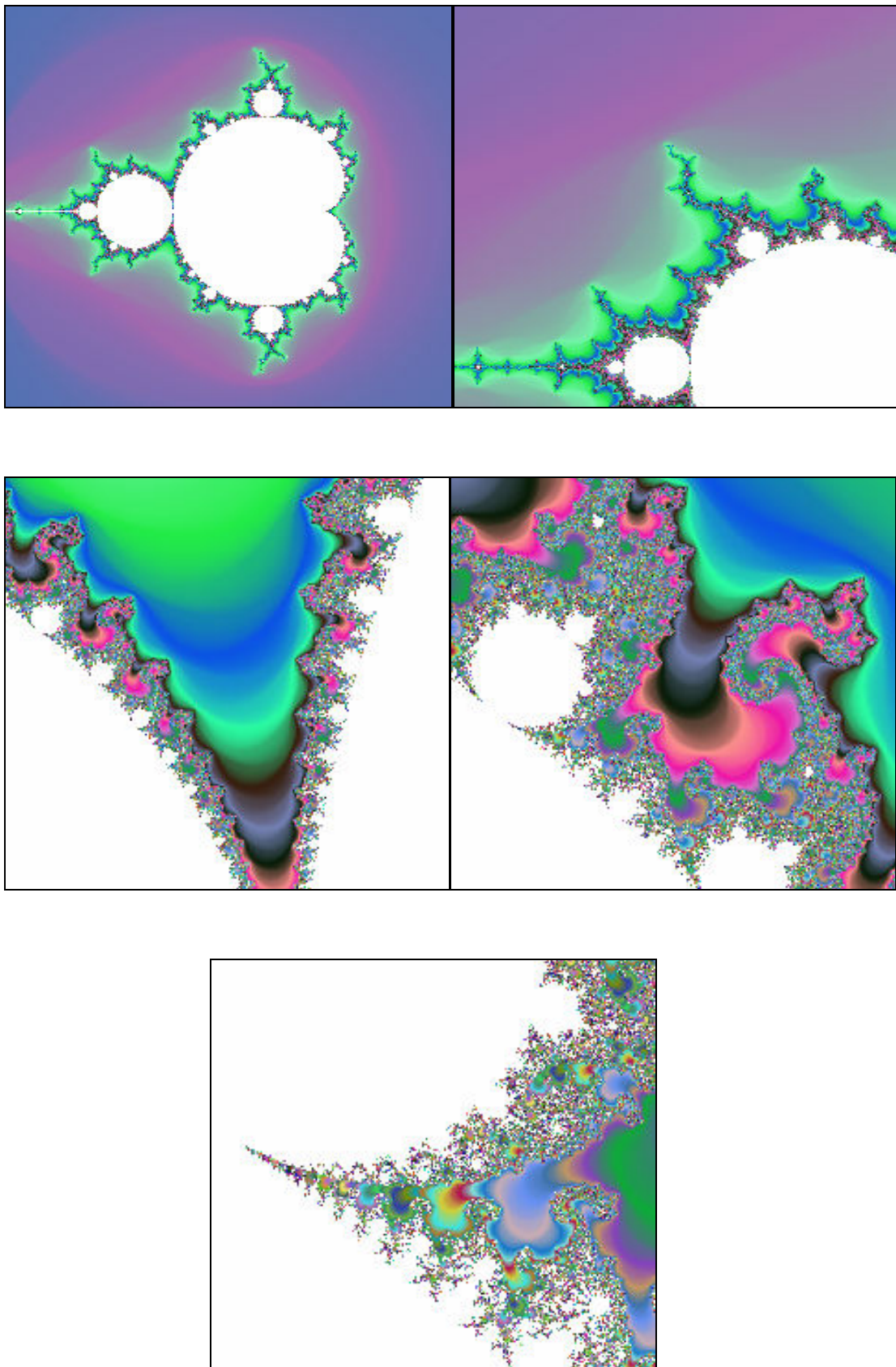


Fig. 27: Sequência de ampliações do conjunto de Mandelbrot.

Em qualquer destas ampliações (e em quaisquer outras), podemos descobrir réplicas do conjunto de Mandelbrot original, rodeadas por novas e impressionantes imagens, que mudam infinitamente.

O conjunto de Mandelbrot é descrito como “o objecto mais complexo alguma vez concebido pelo Homem”, apesar de só depois da introdução dos computadores ampliações como as anteriores puderam ser geradas.

2.6. Linha costeira de uma região

Uma linha costeira é um bom exemplo de um fractal que ocorre na Natureza. Mapas de linhas costeiras, desenhados em escalas diferentes, mostram uma distribuição semelhante de baías e cabos. Cada baía tem as próprias baías e cabos; estes últimos também, e assim sucessivamente.

O texto de Swifh, depois de ser parodiado por Richardson, é um lugar-comum entre a comunidade fractal, mas é tão adequado que não podemos deixar de o citar:

Assim, observam os naturalistas, uma pulga,
Tem pulgas menores, que dela se alimentam,
E estas têm pulgas menores, que lhes picam,
E assim sucessivamente ad infinitum.

Considerando um pedaço de linha costeira numa região acidentada, vamos tentar determinar qual é o seu comprimento efectivo.

É evidente que essa linha é, no mínimo, igual à distância em linha recta entre as duas extremidades da linha costeira que considerámos. Assim, se a costa fosse direita, o problema estaria resolvido neste primeiro passo.

Contudo, uma verdadeira costa natural é extremamente sinuosa e, por conseguinte, muito mais longa que a dita distância em linha recta.

A linha da costa é em geral calculada a partir de fotografias de satélite. Mas se as fotografias fossem tiradas de uma avioneta, as irregularidades seriam mais visíveis e obter-se-ia um outro valor. Se em vez de fotografia fossem medidas directamente todas as saliências e reentrâncias, obter-se-ia um valor muito maior. Se, em seguida, fosse usada uma régua de um decímetro e repetindo a tarefa, obter-se-ia maior precisão nas medidas dos contornos rochosos, começando a ter em conta a irregularidade das pedras, e o comprimento final obtido seria ainda maior.

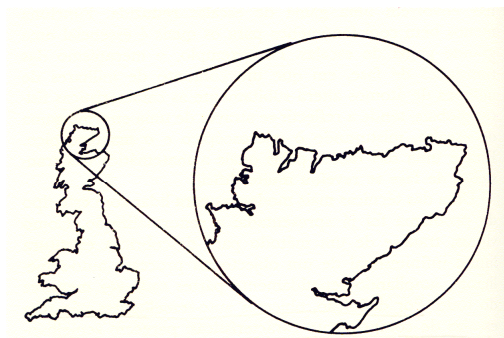


Fig. 28: Ampliação de uma parte de uma linha costeira

Poder-se-ia repetir esta tarefa indefinidamente, mas sempre reduzindo a escala de medição da costa, que o seu comprimento iria aumentar.

Em conclusão, o comprimento da costa de um país tende para infinito, embora a área que a limita seja finita.

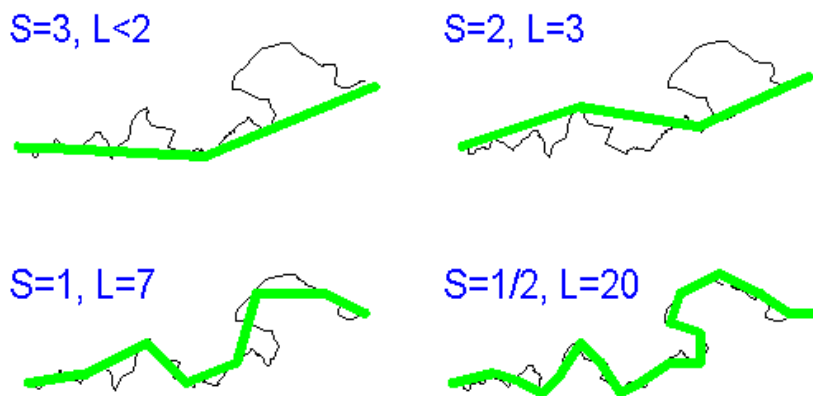
Quanto é o comprimento de uma determinada linha de costa?

Como a dimensão de uma curva fractal é o número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida em que a escala diminui, podemos defini-la de um modo um pouco diferente, mais conveniente para estudar uma linha costeira. Assim, temos

$$d = \frac{\log\left(\frac{L_2}{L_1}\right)}{\log\left(\frac{S_2}{S_1}\right)}$$

onde L_1 e L_2 são as medidas dos comprimento das curvas (em unidades) e S_1 e S_2 são os tamanhos das unidades (ou seja, as escalas) usadas na medição.

A figura seguinte representa a linha costeira de uma região, onde foram utilizadas unidades de medida de tamanhos diferentes (S) para estimar o comprimento (L) do litoral.



Para este litoral, as medidas de $S=1$ e $S=0.5$ resultam nos comprimentos $L=7$ e $L=20$, respectivamente. Então:

$$d = \frac{\log\left(\frac{20}{7}\right)}{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)} \approx 1.51$$

De modo análogo, a transição de $S=1$ para $S=2$ leva-nos à menor estimativa aproximada de $d \approx 1,22$ e de $S=2$ para $S=3$, $d \approx 1,13$.

O litoral é um fractal: em vez de ter somente uma dimensão (como uma linha num mapa) tem uma dimensão fractal que varia entre 1 e 2, consoante as unidades de medida escolhidas(isto é, consoante a aproximação que fazemos).

CAPÍTULO III - Teoria do Caos

3.1. Conceito

Caos é um campo da matemática que estuda sistemas dinâmicos ou seja, sistemas em movimento. A Teoria do Caos baseia-se em demonstrações matemáticas e teorias que tentam descrever processos em movimento ou seja, sistemas matemáticos que se modificam com o tempo, como por exemplo o tempo, a bolsa ou a distribuição genética de uma população.

Vejamos um exemplo do quotidiano. Certamente todos nós já planeamos algo do tipo: “amanhã à tarde irei à casa do meu colega para irmos à praia”. Mas no dia seguinte acordámos com o céu cinzento, mesmo tendo a previsão meteorológica sido favorável.

Podemos então dizer, correntemente, que o que aconteceu de inesperado nesse dia é culpa do “caos” ou até mesmo dizer que o clima mundial é realmente um caos. Pois bem, vamo-nos deter um pouco nesta palavra: caos. Ela era usada pelos gregos e significava vasto abismo ou fenda. A palavra também alude ao estado de matéria sem forma e espaço infinito, que existia antes do Universo ordenado, suposto por visões cosmológico-religiosas. E, finalmente, o sentido mais usual de caos: desordem, confusão.

O desenvolvimento do estudo do Caos cresceu explosivamente, nos últimos anos, devido à preciosa ajuda prestada pelos computadores. Não só, pela sua capacidade de cálculo (necessário para estudar os padrões caóticos), mas também porque permitem representar graficamente os padrões (como é o caso dos fractais).

Mas, detenhamo-nos no exemplo anterior. Poderemos então pensar: “devido a esta desordem do caos, nunca poderemos saber quando o clima estará propício a ir à praia”. Será que por detrás desta desordem climática há uma ordem escondida?

A teoria do caos não é uma teoria de desordem, mas busca no aparente acaso uma ordem intrínseca determinada por leis precisas. Além do clima, outros processos aparentemente casuais apresentam certa ordem, como por exemplo crescimento populacional, flutuação do mercado financeiro e como já vimos os batimentos cardíacos e o quebrar das ondas do mar, que possuem propriedades fractais.

A geometria fractal constitui, portanto, uma parte da teoria do caos.

3.2. O Efeito Borboleta

Num trabalho de previsão do futuro, precisamente o clima, o matemático norte-americano Edward Lorenz percebeu a ordem na aparente desordem dando o pontapé inicial na Teoria do Caos. Lorenz descobriu que um pequeno acontecimento agora pode significar uma imensa catástrofe mais tarde. Ocorre um fenómeno denominado tecnicamente de "dependência sensível das condições iniciais", mais conhecido como "Efeito Borboleta" e sugere que o voo de uma borboleta deste lado do mundo pode causar uma grande tempestade daqui a um mês do outro lado do planeta. A descoberta foi possível porque, numa simulação, Lorenz digitou números com seis casas decimais, por exemplo: 0,506127, noutra com três: 0,506, isto é, uma ínfima diferença. Mas comparando os dois gráficos resultantes, depois de processados os dados as diferenças eram enormes nos gráficos de um e de outro. Uma ínfima mudança agora pode resultar numa grande diferença depois.

3.3. A Função logística

Vejamos o comportamento da função logística (de grande utilidade na biologia para o estudo de crescimento de populações), através da calculadora.

$$x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n^2)$$

onde x_{n+1} é o valor da iteração n , k é um valor constante e x_n é o valor da iteração anterior.

Façamos $k=2,5$ e o valor inicial $x_0=0,700000000$.

o próximo valor será

$$x_{0+1} = k \cdot x_0 \cdot (1 - x_0^2),$$

substituindo o valor de x_0 , teremos

$$x_1 = 2,5 * 0,700000000 * (1 - 0,700000000^2).$$

$$x_{1+1} = k \cdot x_1 \cdot (1 - x_1^2).$$

Substituindo o valor de x_1 que encontramos, temos

$$x_2 = 2,5 * 0,8925 * (1 - 0,8925^2) = 0,453933867$$

Façamos agora, uma tabela com os valores obtidos.

$$x_0 = 0,700000000$$

$$x_1 = 0,892500000$$

$$x_2 = 0,453933867$$

$$x_3 = 0,900995226$$

$$x_4 = 0,423935380$$

$$x_5 = 0,869363005$$

$$x_6 = 0,530763428$$

$$x_7 = 0,953105400$$

$$x_8 = 0,218237538$$

$$x_9 = 0,519608507$$

$$x_{10} = 0,948294618$$

Para ver o resultado da dependência sensível das condições iniciais é necessário termos uma outra condição inicial. Usemos agora como valor inicial 0,700000001.

Obtemos então, os seguintes valores:

$x_0 = 0,700000001$
 $x_1 = 0,892499999$
 $x_2 = 0,453933871$
 $x_3 = 0,900995230$
 $x_4 = 0,423935366$
 $x_5 = 0,869362989$
 $x_6 = 0,530763479$
 $x_7 = 0,953105420$
 $x_8 = 0,218237453$
 $x_9 = 0,519608324$
 $x_{10} = 0,948294531$

Comparemos as duas tabelas. Notamos diferença apenas na última, penúltima ou no máximo na antepenúltima casa decimal. É primordial notar que esta diferença, embora oscilante, aumenta com n , ou seja, a cada iteração a diferença tende a aumentar. Com um número de iterações suficiente as diferenças tomam proporções espantosas.

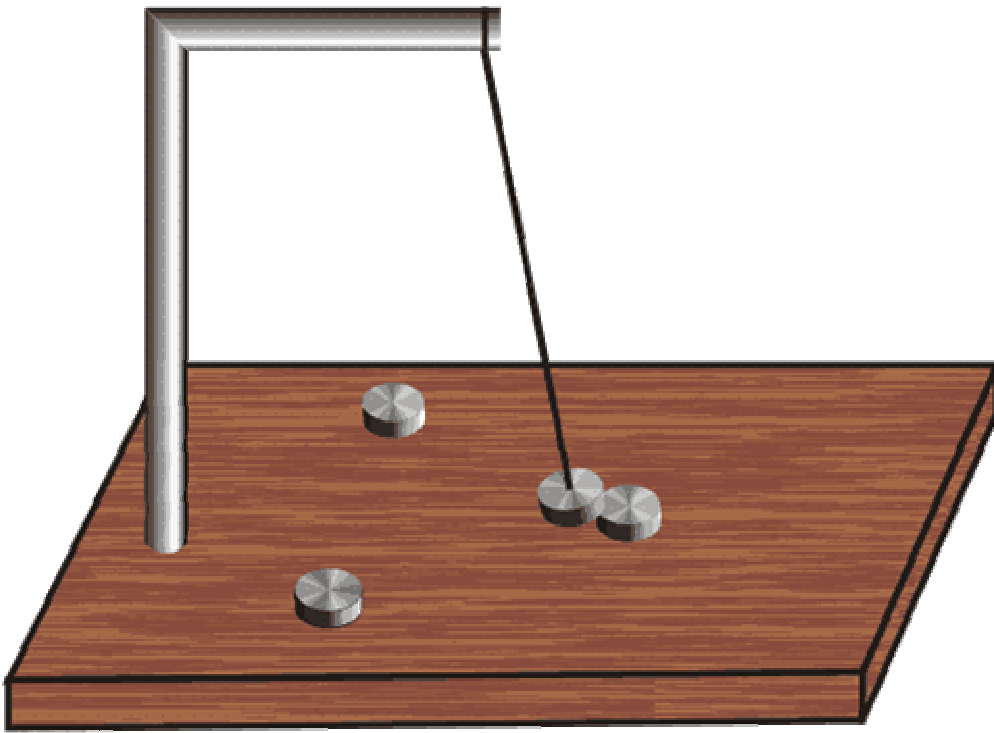
3.4. Objecto Caótico

Podemos construir objectos cujo movimento apresenta dependência sensível das condições iniciais sendo, portanto, caóticos.

Material necessário:

- quatro magnetos cilíndricos;
- uma base rectangular de madeira;
- uma haste em forma de “L”;
- fio de material resistente.

Segue-se um desenho esquemático da montagem.



Directizes para a montagem

1. Na base, os ímanes devem ser fixados configurando-se como vértices de um triângulo equilátero. Todos devem apresentar o mesmo pólo voltado para cima (verifique isto utilizando outro íman, de forma que este último seja atraído por cada um dos outros três da base – ou repelido).
2. A haste deve ser presa firmemente à base, conforme a figura. Nesta haste encontra-se um pêndulo.
3. Este pêndulo consiste num fio, em cuja extremidade pende um quarto magneto. O íman deve manter uma face voltada para baixo. Tal face deve ser de pólo oposto aos pólos dos magnetos da base, para que se atraiam (o inverso também funciona, embora de forma um pouco diferente). Use fita adesiva para fixar do magneto ao fio. Ainda pode ser usado, ao invés do fio, uma haste rígida mas com liberdade de giro na sua conexão com a haste em “L”.

Ajuste da posição do pêndulo

Para melhor funcionamento, o magneto do pêndulo, quando em repouso, deve encontrar-se exactamente no centro do triângulo da base, para que seja atraído igualmente para cada magneto.

Funcionamento

Quando deslocamos o magneto pendular de sua posição de equilíbrio, o mesmo tende a voltar a sua posição de inicial, devido à força da gravidade. O campo magnético de cada íman intensifica este efeito, aumentando a velocidade do íman em infinitas direcções.

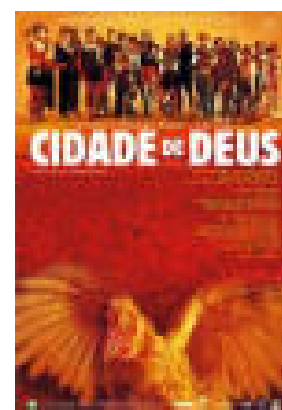
O resultado disto é uma infinidade de movimentos, majestosamente interessantes. O pêndulo ora gira entre dois magnetos, movendo-se em forma de “8”; ora gira em círculos em torno de um magneto e ora movimenta-se num caminho conjugado destes dois estilos.

A sequência destes movimentos depende da posição em que se solta o pêndulo. Mesmo que nos esforcemos para colocar o pêndulo exactamente num certo ponto, para que uma certa sequência de movimentos ocorra, não conseguiremos.

Isto acontece devido à dependência sensível das condições iniciais ou efeito borboleta. Assim, pequenas modificações na posição inicial dos componentes do sistema, e mesmo pequenas perturbações no ambiente, causam grandes modificações na trajectória do magneto no decorrer do tempo.

A Teoria do Caos, propõe então, sistemas para os quais não podemos fazer previsões precisas para o futuro. Ou seja, há uma determinação, até ao ponto em que um “efeito borboleta” incida sobre o sistema. Em termos filosóficos, podemos dizer que o destino existe, mas nós modificamo-lo sempre que fazemos determinadas escolhas que vão influenciar o futuro. Visualmente, isso pode ser imaginado como uma estrada com diversas bifurcações. A cada bifurcação, a escolha daquele que caminha, muda o caminho e, portanto, o seu destino.

A Teoria do Caos tem influenciado os mais diversos campos do conhecimento. Na área da comunicação, esta teoria tem sido usada para descrever filmes, programas televisivos e até obras literárias que apresentam características caóticas.



Um exemplo recente é o filme Cidade de Deus. Nele podemos encontrar todas as características do caos: factos fragmentados, muita informação em pouco tempo, padrões estéticos complexos, dependência sensível das condições iniciais, padrões mais complexos à medida em que nos aprofundamos nos fenómenos e na vida dos personagens... A Dependência sensível das condições iniciais pode ser percebida, no filme Cidade de Deus, por exemplo, no momento em que o personagem Busca-pé tenta praticar um assalto. O facto do assalto falhar vai evitar que ele entre no mundo do crime e, portanto, molda o seu destino. Como esse, há vários outros “Efeitos Borboleta” no filme. Como num fractal, à medida em que aprofundamos a vida das personagens, percebemos uma maior complexidade. Para quem observa apenas superficialmente, o Trio Ternura é apenas um grupo de bandidos. À medida em que os conhecemos melhor, percebemos toda a complexidade que envolve cada um deles, inclusivé em termos de contradições.

A teoria do caos também tem sido usada para explicar o facto de as novas gerações terem uma maior capacidade de captação de informação. À medida que o mundo e as comunicações se tornam mais complexos, caóticos, a nossa mente expande-se para acompanhar esse desenvolvimento. Por outro lado, o aumento da capacidade de captar informação faz com que surjam cada vez mais obras caóticas, tais como Cidade de Deus, Matrix, Butterfly Effect, Jurassic Park, etc.

CAPÍTULO IV: Caos e geometria fractal no Ensino Secundário

A grande força da Matemática é a sua capacidade para construir estruturas complexas, a partir de algumas ideias-chave simples. Assim que surge o esqueleto de uma tal estrutura, cada novo bocado pode ser acrescentado no lugar certo. Sem haver a percepção do esqueleto, os bocados jazem dispersos e indevidamente avaliados. Temos, agora, o esqueleto de uma teoria dos Fractais. O desafio para os matemáticos do próximo século será moldar a carne para esses já fascinantes ossos.

Ian Stewart

4.1. A utilização da linguagem do caos e da geometria fractal

Segundo Piaget, em sua classificação dos estádios de desenvolvimento da criança, no estágio de desenvolvimento Operatório Formal (de 12 anos em diante), a representação permite a abstracção total, não se limitando ao imediato ou às relações pré-existentes. Neste período o indivíduo é capaz de pensar em todas as relações possíveis logicamente, buscando soluções a partir de hipóteses e não apenas pela observação da realidade. Neste estágio as estruturas cognitivas alcançam seu nível mais elevado e tornam-se capazes de aplicar o raciocínio lógico a todas as classes de problemas.

Conclui-se, portanto, que para este estágio do desenvolvimento, o estudo da Geometria Fractal e da Teoria do Caos é totalmente apropriado. Os alunos têm, através dele, a oportunidade de investigar tópicos da Matemática numa nova perspectiva e de fazer conexões com quotidiano.

A utilização de fractais, para ilustrar tópicos como áreas e perímetros de polígonos ou volumes de poliedros pode tornar o seu estudo mais motivador. Por exemplo, o "Floco de Neve" que, como já referimos apresenta perímetro infinito e área finita, suscitará naturalmente a curiosidade dos alunos. A construção e estudo deste fractal pode ser uma boa forma de consolidar conhecimentos já adquiridos envolvendo fórmulas algébricas, áreas e perímetros, assim como o calculo do número de segmentos e o comprimento total do Conjunto de Cantor poderá servir de base para o estudo posterior de limites devido ao facto deste comprimento total se aproximar mas não ser igual a zero. No 12º ano o estudo

do Conjunto de Mandelbrot poderá servir de exemplo da aplicação dos Números Complexos.

No mundo que nos cerca os fractais estão a ser utilizados num crescente número de áreas, desde a identificação dos sobreviventes de cancro, à contaminação do ar, até a criação de modernos desenhos (...)

James Gleick, 1987

Reforçando a ideia da necessidade de experimentar a Matemática por caminhos diferentes para além da resolução de exercícios com papel e lápis, a Geometria Fractal permite explorar conceitos matemáticos de uma forma mais apelativa e criativa. Nomeadamente, através da construção de modelos e quadros com os resultados de sucessivas iterações.

Este tipo de construção induz o esforço intelectual nos alunos, pois as figuras não podem ser totalmente desenhadas, estimulando o pensamento abstracto, para além de lhes despertar o interesse para a beleza e complexidade destas formas não euclidianas, inserindo-se no conceito de ensino que se pretende hoje: a conexão dos fundamentos teóricos com conhecimentos empíricos.

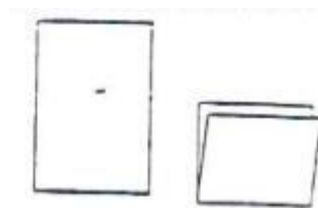
4.2. Actividades Práticas

4.2.1. Actividade 1 : Construção de cartão fractal

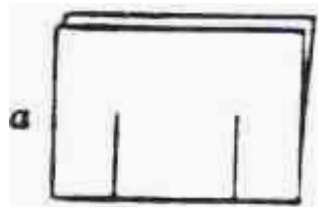
A partir desta actividade os alunos chegarão a conclusões mais simples, mas que, para efeito de pesquisa, são válidos para análise do nível de abstracção conseguido e da capacidade de adequação dos conhecimentos adquiridos a novas situações.

Construção:

- 1) Dobre uma folha de papel ao meio;



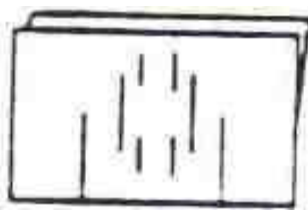
- 2) Faça cortes de comprimento $a/2$ a um quarto de cada lado;



- 3) Dobre ao longo do segmento produzido pelos dois cortes;



- 4) Repita o processo de cortar e dobrar enquanto possível;



5) Abra as dobras e empurre o fractal;

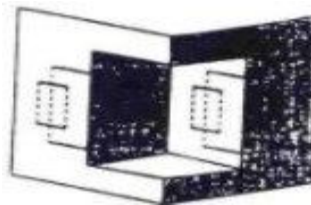
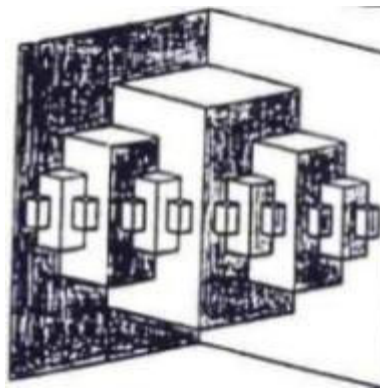


Figura final:



4.2.2. Actividade 2: Construção do Conjunto de Cantor

Os alunos, com esta actividade terão a oportunidade de iniciar o estudo intuitivo de limite.

- 1) Desenhar, na folha fornecida, uma linha de 20cm, posicionada conforme a indicação C_0 no exemplo ao lado, considerando-a como unidade de medida (esta linha será chamada de "semente do fractal")



- 2) Remover mentalmente o terço do meio de C_0 e desenhar o resultado,

chamando-o de C_1 ;

- 3) Remover mentalmente, agora, os terços do meio de cada segmento de C_1 e desenhar o resultado, chamando-o de C_2 ;

- 4) Desenhar C_3 e C_4 , utilizando as mesmas instruções;

- 5) Completar a tabela abaixo:

Iteração	Comprimento de cada segmento	Número de Segmentos	Comprimento Total
0	1	1	1
1	1/3	2	2/3
2	1/9		
3			
4			
5			
6			

- 6) Discutir com o grupo como se apresentaria o Conjunto de Cantor em suas 10ª e 100ª iterações;

- 7) Mostrar como o Conjunto de Cantor apresenta as duas características básicas dos fractais: auto-semelhança e complexidade infinita;

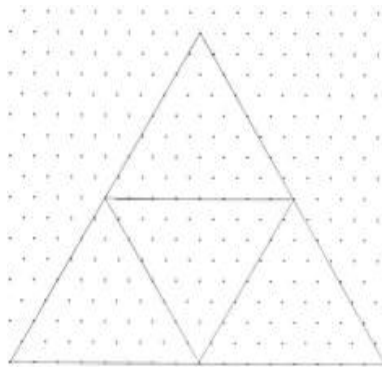
- 8) Introduzir a noção que este processo matemático pode continuar indefinidamente e que o Conjunto de Cantor é o resultado deste processo;
- 9) Solicitar o preenchimento da tabela;
- 10) Pedir que o grupo identifique a lei de formação de cada valor em cada coluna;
- 11) Discutir as implicações desta lei de formação.

NOTA.: *Alterando-se a proposta de remoção para o desenho de 2 segmentos de igual tamanho teríamos a confecção da Curva de Koch.*

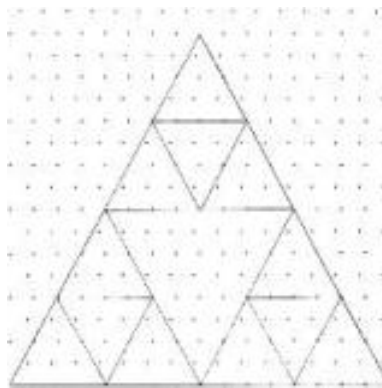
4.2.3. Actividade 3: Construção do Triângulo de Sierpinski

Através desta actividade os alunos, além de conhecerem o Triângulo de Sierpinski, uma imagem fractal bem conhecida, poderão reforçar os conceitos apresentados nas actividades anteriores: iterações e auto-semelhança.

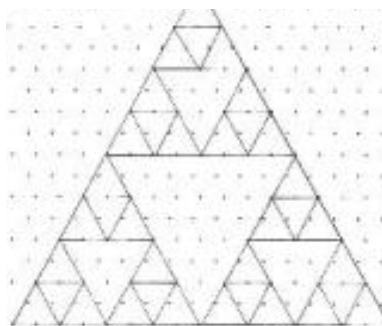
- 1)Desenhar um triângulo equilátero sólido;
- 2)Unir os pontos médios dos lados do triângulo;



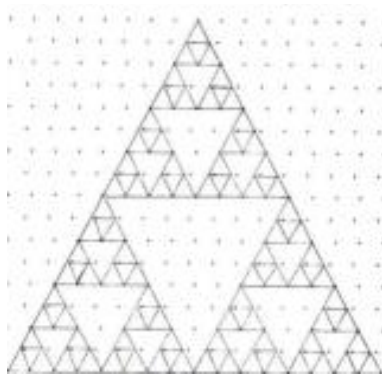
- 3)Dos quatro novos triângulos equiláteros, retirar o triângulo central;



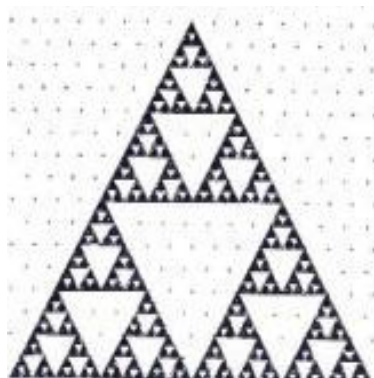
- 4)Repetir a instrução 2 para cada um dos triângulos restantes;



5) Repetir a instrução 4, 3 vezes (3 iterações), lembrando que a cada iteração cada triângulo conduzirá a 3 novos triângulos com o comprimento do lado igual a metade do que os originou;



6) Verificar que a figura resultante deverá apresentar 81 pequenos triângulos, que representa a quarta iteração na construção do Triângulo de Sierpinski; sombrear estes triângulos;



7) Discutir com a turma:

✓ Imaginar a repetição do processo. Visualizar e descrever como a figura muda. Se o processo continuasse indefinidamente, o que aconteceria ?

✓ O que aconteceria com o triângulo maior (original) depois de 4 iterações se o algoritmo fosse mudado para desenhar os novos triângulos apenas no triângulo do centro da figura ?

4.3. Considerações Gerais

“ A pergunta que propomos agora é: até que ponto as actividades realizadas são apropriadas para a aprendizagem dos conteúdos previstos? ”. Para responder a estes questionamentos, argumentamos que os princípios da concepção construtivista estabelecem que a aprendizagem é uma construção pessoal realizada pelo aluno com o auxílio de outras pessoas e relaciona uma série de aspectos que permitem caracterizar as actividades apropriadas à esta concepção, conforme transcreve-se a seguir:

“1. Que nos permitam conhecer os conhecimentos prévios dos alunos em relação aos novos conteúdos de aprendizagem; 2. Que os conteúdos sejam colocados de tal modo que sejam significativos e funcionais para os alunos; 3. Que possamos inferir que são adequadas para o nível de desenvolvimento dos alunos; 4. Que apareçam como um desafio acessível para o aluno, isto é, que levem em conta suas competências actuais e as façam avançar com a ajuda necessária; que permitam criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir; 5. Que provoquem um conflito cognoscitivo e promovam a actividade mental do aluno necessária ao estabelecimento de relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios; 6. Que fomentem uma actividade favorável, isto é, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem de novos conteúdos; 7. Que estimulem a auto-estima e o auto conceito em relação às aprendizagens propostas, isto é, que com elas o aluno possa experimentar que aprendeu em algum grau, que seu esforço valeu a pena; 8. Que ajudem a fazer com que o aluno vá adquirindo destrezas relacionadas com aprender a aprender e que lhe permitam ser cada vez mais autónomo em suas aprendizagens.”

Pela análise da fundamentação teórica referente ao Construtivismo e comparando os aspectos necessários à aplicação de actividade construtivista com as actividades propostas neste trabalho, conclui-se, finalmente, que estão perfeitamente adaptadas à esta teoria de aprendizagem.

As actividades foram aplicadas a um grupo de alunos do Colégio de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira – UERJ(Universidade Estadual do Rio de Janeiro), que têm como característica comum o interesse por temas ligados à Matemática. Isto, de certa forma, facilitou as aplicações propostas.

No caso específico da experiência , assinala-se que o grupo foi conduzido a chegar ao conceito de fractal e suas características básicas a partir de actividades simples e intervenções eventuais, que proporcionaram tanto a utilização de conhecimentos prévios de Geometria Euclidiana, como a manipulação de conceitos intuitivos de limites - finitos e

infinitos -, progressões, leis de formação. Levou, enfim, a contextos que serão tratados em graus mais adiante nos currículos tradicionais, mas que, conforme o resultado apurado, apresenta condições de ser introduzido, ainda que baseados somente na experimentação, sem a formalização do teórico.

A importância da relação professor aluno pôde ser comprovada ao longo da aplicação descrita, através dos diálogos que permitiram o desenvolvimento cognitivo para cada conceito construído. A cada pergunta formulada procurou-se nas estruturas cognitivas dos alunos as ideias relevantes para a construção dos conceitos de esquemas mentais mais sólidos. Através dos questionamentos procurou-se verificar se cada conceito havia sido compreendido e ao permitir ao aluno expor com as suas próprias palavras o conceito apreendido, puderam detectar-se as reestruturações das relações que ocorriam no âmbito interindividual. Ao mesmo tempo, procurou associar-se as exposições feitas pelos alunos com o trabalho voltado para que conhecessem o significado dos termos criados e normalmente empregados pelos matemáticos, e isto facilitava a passagem para novos conhecimentos que envolviam estes termos.

Ressalte-se, finalmente, que o grupo de alunos, apesar de pequeno, produziu resultados bastante proveitosos. Espera-se que este facto sirva de estímulo aos professores para que repitam a experiência.

Conclusão

Houve quem criticasse a matemática por falta de contacto com a realidade. A história do caos é apenas uma das muitas que se desenrolam correntemente e que mostram que esta crítica é descabida. É como criticar um pulmão por não bombear sangue.

Ian Stewart

A elaboração deste trabalho, ao estudar caos e a geometria dos fractais foi, antes de tudo, uma rara oportunidade de entender o quanto nossa visão subjectiva do mundo condiciona o desenvolvimento da Matemática. Se Euclides tivesse pesquisado não só as formas “perfeitas” da natureza, como os hexágonos dos favos, mas também os amorfos formigueiros, certamente a sua geometria incorporaria outros elementos fundamentais, que não apenas os tradicionais pontos, rectas e planos.

Existe, por mais dificuldade que tenhamos em admiti-lo, o conceito de estética que nos orienta ao “perfeito”. Para os criadores da Geometria, por uma questão cultural, as estrelas-do-mar, com seus exoesqueletos pentagonais, são mais perfeitas que os desajeitados polvos.

Assim, através de mudanças radicais no conceito de estética, terminamos o século XX voltados para o irregular e aleatório. Buscamos explicações físico-matemáticas através da Teoria do Caos para o formato das nuvens, das montanhas, dos ramos de árvores e até mesmo do nosso corpo. Parece que os cientistas de hoje redescobriram a natureza ao questionarem Euclides. Afinal, ninguém até o presente encontrou uma laranja perfeitamente esférica; muito menos um tronco de bananeira cilíndrico.

A irregularidade da natureza, o seu lado descontínuo e errático – constituíram em tempos charadas ou, pior, monstruosidades para a ciência.

O caos deu origem a técnicas específicas de utilização de computadores e a tipos específicos de imagens gráficas, quadros que capturam uma estrutura fantástica e delicada por detrás da complexidade. A nova ciência criou a sua própria linguagem, que usa elegantemente termos como fractais, bifurcações, ponto periódico, aleatório, auto-semelhança, etc.

O caos atravessou as linhas de separação entre as disciplinas científicas. Porque é uma ciência da natureza global dos sistemas separados, coloca problemas que desafiam os

métodos consagrados do trabalho científico. Levanta questões perturbantes a propósito do comportamento universal da complexidade.

Assim concluímos este singelo trabalho, deixando como perspectiva que outros alunos se interessem pelo tema que é sem dúvida magnífico e de uma beleza extraordinária.

BIBLIOGRAFIA

- ARANHA, Maria Lúcia de A.: *Filosofia da Educação*: São Paulo: Editora Moderna, 1996.
- BANNON, Thomas J.: *Fractals and Transformations*: The Mathematics Teacher, March 1991.
- BARTON, Ray: *Chaos and Fractals*: The Mathematics Teacher, October 1990.
- CAMP, Dane R.: *A Fractal Excursion*: The Mathematics Teacher, April 1991.
- COES, Loring: *Building Fractal Models with Manipulatives*: The Mathematics Teacher, Vol 86, Nº 8, November 1993.
- D' AMBROSIO , Ubiratan: *Educação Matemática da Teoria à Prática* : São Paulo. Papirus Editora , 1997.
- GARNIER , Catherine . BERDNARZ ,Nadine e ULANOVSKAYA , Irina: *Vygostky e Piaget : Perspectivas Social e Contrutivista . Escolas Russa e Ocidental* .Porto Alegre , Artes Médicas , 1996 .
- GIL , Antonio Carlos : *Como Elaborar Projetos de Pesquisa* . São Paulo .Atlas Editora,1991.
- GLEICK, James: *Caos-A construção de uma nova ciência*.Ciência Aberta. Gradiva. 1987.
- EGSGARD, John C.: *An Interesting Introduction to Sequencer and Series*, The Mathematics Teacher, February 1988.
- KAMII , C e DECLARK , G : *Reiventando a Aritmética : Implicações da Teoria de Piaget* .São Paulo , Papirus Editora , 1982.
- KERN, Jane F. and MAUK, Cherry C.: *Exploring Fractals - a Problem-solving Adventure Using Mathematics and Logo*: The Mathematics Teacher, March 1990.
- KENNEY, Margaret J. e BERZUZKA, Stanley J.: *Implementing the Discrete Mathematics Standards: Focusing on Recursion*: The Mathematics Teacher, Vol 86, Nº 8, November 1993.
- LEITE , Luci Banks (org) . *Piaget e A Escola de Genebra* . Coletânea de Textos. São Paulo. Cortez Editora, 1995.

LORNELL, Randi e WESTERBERG, Judy: *Fractals in High School: Exploring a New Geometry*. The Mathematics Teacher, Vol 92, Nº 3, March 1999

MANDELBROT, Benoit: *The Fractal Geometry of Nature*: W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA, 1982.

MANDELBROT, Benoit: *Fractals: Form, Chance and Dimension* W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA , 1977.

OLIVEIRA, Marta Kohl de: *Vygotsky - Aprendizado e Desenvolvimento um Processo Sócio-Histórico*: São Paulo, Editora Scipione, 1995.

PEITGEN,Heinz-Otto, JÜRGENS,Hartmut, SAUPE,Dietmar, MALETSKY,Evan, PERCIANTE,Terry e YUNKER,Lee: *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One*: Springer-Verlag, New York, USA, 1991.

PIAGET , Jean e colaboradores : *Abstração Reflexionante : Relações Lógico - Aritméticas e Ordem das Relações Espaciais*. Porto Alegre .Artes Médicas ,1995 .

SILVA, Carmen Especotti da: *Como a Geometria Analítica Pode Influenciar o Aprendizado de Alguns Conceitos básicos da Álgebra Linear*. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro. Universidade Santa Úrsula, 1997.

SIMMT,Elaine e DAVIS,Brent: *Fractal Cards: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics*: The Mathematics Teacher, Vol 91, Nº 2, February 1998.

SPRINTHALL, N. e C.:*Psicologia Educacional*: Ed. McGraw Hill, Portugal, 1990.

STEWART, Ian: Deus joga aos dados? Ciência Aberta. Gradiva. 1991.

<http://penta.ufrgs.br/~marcia/estagio.htm>

<http://library.advanced.org/12740/>

<http://www.hooked.net/~mchris/fractals.htm>

<http://www.ime.uerj.br/~progerio/monografia/1999/atividade4.html>

<http://www.fractalmusilab.com>

<http://www.fractal-vibes.com>

<http://www.organised-caos.org.uk>

<http://archive.ncsa.uiuc.edu>

<http://inforum.insite.com.br>

<http://www.fractalus.com>

<http://pet.inf.ufpr.br>

<http://geocities.com>