Capítulo 1

Matrizes e Determinantes

1.1 Generalidades

Iremos usar K para designar

$$\mathbb{R} \text{ conjunto dos números reais}$$

$$\mathbb{C} \text{ conjunto dos números complexos.}$$

Deste modo, chamaremos

números ou *escalares*

aos elementos de K.

Sejam m e n inteiros positivos.

(1.1 a) **Definição.**

Chama-se *matriz do tipo* $m \times n$ sobre K a todo o quadro que se obtém dispondo mn números segundo m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(**1.1 b**) <u>**Notações.**</u> Usamos igualmente como abreviatura

$$A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{i=1,\ldots,n\ ;\ j=1,\ldots,n}$$

ou

$$\left[\ a_{ij}\ \right]_{m\times n}$$

ou ainda, simplesmente

$$\left[\ a_{ij}\ \right]$$

caso se subentenda o tipo da matriz.

O número

$$a_{ij}$$

diz-se o *elemento, entrada* ou *componente* da matriz A. Em a_{ij} o

i indica a *linha* onde se situa o elemento

j indica a *coluna* onde se situa o elemento

e, como tal,

i diz-se o *índice de linha*

j diz-se o *índice de coluna*

do elemento a_{ij}.

O elemento a_{ij} diz-se ainda o *elemento* (i, j) da matriz A.

Para A matriz do tipo $m \times n$ de elementos sobre K

i. a matriz A diz-se *quadrada* sempre que $m = n$;

ii. *rectangular* $m \neq n$;

iii. *matriz-linha* ou *vector-linha* $m = 1$;

iv. *matriz-coluna* ou *vector-coluna* $n = 1$;

Representamos por
$$M_{m\times n}(K)$$
o conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$ sobre K. Com abuso de linguagem, usamos a notação
$$K^m$$
para representar $M_{m\times 1}(K)$, ou seja, para representar o conjunto das matrizes com m linhas e 1 coluna de elementos em K, as matrizes-coluna,
$$M_{m\times 1}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} : a_i \in K, i = 1, 2, \cdots, m \right\} \cong$$
$$\cong K^m = \{(a_1, a_2, \cdots, a_m) : a_i \in K, i = 1, 2, \cdots, m\} .$$

(**1.1 c**) <u>**Definição.**</u>

As matrizes
$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(K),\ B = \begin{bmatrix} b_{k\ell} \end{bmatrix} \in M_{p\times q}(K)$$
dizem-se *iguais* sse
$$\begin{cases} m = p \\ n = q \end{cases} \qquad \text{e} \qquad a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, ..., m; \;\; j = 1, ..., n.$$

(**1.1 d**) <u>**Notações.**</u>

(I) Aos elementos da matriz (quadrada) $A \in M_{n\times n}(K)$ com igual índice de linha e coluna chamamos *elementos diagonais* de A,
$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}.$$

(II) A sequência ordenada (ou n-upla) constituída pelos elementos diagonais diz-se a *diagonal principal* de A.

(III) A n-upla constituída pelos elementos da outra diagonal recebe o nome de *diagonal secundária* de A,
$$a_{n1}, a_{n-1,2}, ..., a_{1n}.$$

(IV) Uma matriz quadrada $A \in M_{n\times n}(K)$ diz-se

i. *triangular superior* sempre que $a_{ij=0}$ para $i > j$;

$$\begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ii. *triangular inferior* sempre que $a_{ij} = 0$ para $i < j$;

$$\begin{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

iii. *diagonal* sempre que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \end{bmatrix}$$

(V) A *matriz identidade de ordem* n, I_n, é a matriz diagonal de ordem n com elementos diagonais iguais a 1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \left[\ \delta_{ij}\ \right]_{n\times n}.$$

É usual representarmos o elemento (i, j) da matriz I_n por δ_{ij}, símbolo ou delta de Kronëcker).

Matrizes Elementares

Fixemos alguns tipos de operações sobre as linhas de uma matriz que se designam por *operações elementares de linha.*

1. Substituição de uma linha de uma matriz pela soma dessa linha com um múltiplo de outra linha;

2. Troca entre si de duas linhas de uma matriz;

3. Multiplicação de todos os elementos de uma linha por um número diferente de zero.

(**1.1 e**) <u>**Definição.**</u>

Chama-se *matriz elementar de ordem* n a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma operação elementar às respectivas linhas.

Obtemos, deste modo, três tipos diferentes de matrizes elementares de ordem n.

1. Para $i \neq j$ (por exemplo, $i < j$) e $\alpha \in K$

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ ...i \\ \\ ...j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array}$$

A matriz $E_{ij}(\alpha)$ obtém-se de I_n adicionando à linha i a linha j previamente multiplicada por α.

2. Para $i \neq j$ (por exemplo, $i < j$)

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ ...i \\ \\ ...j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & i & & j & & \end{matrix} & \end{array}$$

A matriz P_{ij} obtém-se de I_n trocando entre si a linha i com a linha j.

3. Para $\alpha \in K,\ \alpha \neq 0,\ 1 \leq i \leq n$

$$D_i(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ ...i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & i & & \end{matrix} & \end{array}$$

A matriz $D_i(\alpha)$ obtém-se de I_n multiplicando a linha i por α.

Notas.

i. Permutando apenas duas linhas entre si da matriz I_n obtemos uma das matrizes P_{ij}.

ii. Ao efectuarmos várias permutações às linhas de I_n obtemos matrizes que em cada linha e em cada coluna têm apenas um elemento não-nulo e esse elemento é 1. São as chamadas *matrizes de permutação*.

1.2 Operações com Matrizes

(1.2 a) **Definição.**

Para $A = \left[\; a_{ij} \; \right], B = \left[\; b_{ij} \; \right] \in M_{m\times n}(K)$ e $\alpha \in K$

1. $A + B$ é a matriz do tipo $m \times n$ cujo elemento (i, j) é $a_{ij} + b_{ij}$

$$A + B = \left[\; s_{ij} \; \right]$$

para $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ou simplesmente,

$$A + B = \left[\; a_{ij} + b_{ij} \; \right]_{m\times n} \; ;$$

2. αA é a matriz do tipo $m \times n$ cujo elemento (i, j) é αa_{ij},

$$\alpha A = \left[\; \alpha a_{ij} \; \right]_{m\times n} \; .$$

(**1.2 b**) <u>**Notações.**</u>

(I) A matriz do tipo $m \times n$ com todos os elementos iguais a zero, 0, diz-se a matriz nula e escreve-se, simplesmente

$$0_{m\times n}.$$

(II) Para $A = \left[\ a_{ij}\ \right]$ define-se

$$-A = (-1)A = \left[\ -a_{ij}\ \right].$$

(**1.2 c**) <u>**Teorema.**</u> *Para $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$ e $\alpha, \beta \in K$ tem-se*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(Associatividade da Adição)*
2. $A + B = B + A$ *(Comutatividade da Adição)*
3. $A + 0 = 0 + A = A$ ($0_{m\times n}$ *é o elemento neutro da adição*)
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ($-A$ *é a simétrica de* A)
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
8. $1A = A$

Demonstração. É deixada como exercício.

Multiplicação de Matrizes

Motivação

Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

ele pode ser representado matricialmente na forma

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vector-coluna
dos termos independentes

$$A_{3\times 3} \qquad x_{3\times 1} \;=\; b_{3\times 1}$$

coluna dos coeficientes de x_1 em cada equação

coluna dos coeficientes de x_2 em cada equação

coluna dos coeficientes de x_3 em cada equação

Se designarmos por A a matriz dos coeficientes das incógnitas nas equações e por x a matriz-coluna das incógnitas, temos

$$Ax = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1}.$$

1) O exemplo anterior pode generalizar-se (de modo evidente) para A matriz arbitrária do tipo $m \times n$ e x vector-coluna arbitrário do tipo $n \times 1$. É imediato que a matriz resultante, a *matriz produto*, será do tipo $m \times 1$

$$\underbrace{A_{m\times n} \;.\; x_{n\times 1}}_{m\times 1} \;=\; b_{m\times 1}$$

2) A definição anterior pode generalizar-se para qualquer matriz A do tipo $m \times n$ e qualquer matriz B do tipo $n \times p$ do seguinte modo

$$A_{m\times n}.B_{n\times p} =$$

$$= \left[\; A \times (\text{coluna } 1 \text{ de } B) \quad A \times (\text{ coluna } 2 \text{ de } B) \quad \ldots \quad A \times (\text{coluna } p \text{ de } B) \;\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} A_{m\times n} & & B_{n\times p} & = & (A.B)_{m\times p} \\ \begin{bmatrix} -- & -- & \cdots & -- \\ -- & -- & \cdots & -- \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -- & -- & \cdots & -- \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} & | & \\ & | & \\ & \vdots & \\ & | & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} & | & \\ & | & \\ & \vdots & \\ & | & \end{bmatrix}. \\ & & j & & j \end{array}$$

(1.2 d) <u>**Definição.**</u>

Para $A = \left[\ a_{ij}\ \right] \in M_{m\times n}(K)$ e $B = \left[\ b_{jk}\ \right] \in M_{n\times p}(K)$ a *matriz produto* AB é a matriz do tipo $m\times p$ cujo elemento (i,k) é

$$a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + ... + a_{in}\, b_{nk}$$

$(\ i = 1, ..., m\ ;\ k = 1, ..., p\ )$

$$AB = \left[\ \sum_{j=1}^{n}\ a_{ij}\ b_{jk}\ \right]_{m\times p}\ .$$

Nota. Como se pode inferir da definição, o produto AB da matriz A pela matriz B apenas está definido se o número de colunas da A for igual ao número de linhas de B.

Sempre que tal acontece

o número de *linhas* de AB é igual ao número de linhas de A;

o número de *colunas* de AB é igual ao número de colunas de B.

(1.2 e) <u>**Teorema.**</u> *Para* $A, A' \in M_{m\times n}(K)$
$B, B' \in M_{n\times p}(K)$
$C \in M_{p\times q}(K),\ \alpha \in K$
temos

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $AI_n = I_m A = A$
3. $A(B + B') = AB + AB'$
4. $(A + A')B = AB + A'B$
5. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
6. (*Se* $AB = 0$ *então* ($A = 0$ *ou* $B = 0$)) *é falso.*
7. (*Se* $AB = AB'$ *e* $A \neq 0$ *então* ($B = B'$)) *é falso.*
   (*Se* $AB = A'B$ *e* $B \neq 0$ *então* ($A = A'$)) *é falso.*
8. *A multiplicação de matrizes não é comutativa.*

Demonstração. Deixamos ao cuidado do leitor a demonstração das primeiras cinco alíneas. Demonstremos as três últimas. Uma vez que nos pedem para demonstrar que as implicações são falsas basta apresentar um contra-exemplo, isto é, um exemplo onde o antecedente seja verdadeiro e o consequente seja falso.

6. Faça $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
É imediato que $AB = 0_{3\times 3}$ mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

7. Considere ainda $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Então $A \neq 0,\ AB = AB'$ mas $B \neq B'$.

8.
Basta considerar $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 3}$. Então $A_{3\times 1}.B_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ enquanto que $(B.A)_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$.

Retomemos a forma matricial de um sistema de m equações lineares em n incógnitas

$$A_{m\times n}\, x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$

onde

$A_{m\times n}$ é a matriz dos coeficientes das incógnitas

$x_{n\times 1}$ é a matriz das incógnitas

$b_{m\times 1}$ é a matriz dos termos independentes

$$A\,x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1n}\, x_n \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + ... + a_{2n}\, x_n \\ \vdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + ... + a_{mn}\, x_n \end{bmatrix}
$$

$$
= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.
$$

Nota 1. Dados r vectores-coluna $v_1, v_2, ..., v_r$ e r escalares (números) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ a

$$
\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + ... + \alpha_r\, v_r
$$

chamamos *combinação linear dos* r vectores-coluna *com coeficientes* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$.

Imediatamente, sempre que o sistema

$$
A\, x = b
$$

seja possível então o vector-coluna b é uma combinação linear dos vectores-coluna de A onde os coeficientes dessa combinação linear constituem uma solução do sistema.

Por exemplo, admitindo o sistema

$$
\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}
$$

a solução única $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

temos

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.
$$

Nota 2. Agora, na matriz produto

$$\begin{array}{ccccc} A_{m\times n} & & B_{n\times p} & = & (A.B)_{m\times p} \\ \begin{bmatrix} -- & -- & \cdots & -- \\ -- & -- & \cdots & -- \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -- & -- & \cdots & -- \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} & | & \\ & | & \\ & \vdots & \\ & | & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} & | & \\ & | & \\ & \vdots & \\ & | & \end{bmatrix}. \\ & & j & & j \end{array}$$

a coluna j de AB (que é dada pelo produto $A\times$ (coluna j de B)) é uma combinação linear dos vectores-coluna de A sendo os coeficientes dessa combinação linear as componentes do vector-coluna j de B.

Nota 3. Analogamente ao anteriormente exposto, a linha i da matriz produto AB

$$\begin{array}{c} i \end{array} \begin{bmatrix} \\ -- & -- & \cdots & -- \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ | & | & \cdots & | \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ -- & -- & \cdots & -- \\ \\ \end{bmatrix} \begin{array}{c} i \end{array}$$

$$\text{linha}\, i \text{ de } (A.B) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i1}\, b_{11} + a_{i2}\, b_{21} + ... + a_{in}\, b_{n1} & \cdots & a_{i1}\, b_{1p} + a_{i2}\, b_{2p} + ... + a_{in}\, b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \end{bmatrix} + \cdots + a_{in} \begin{bmatrix} b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

combinação linear dos vectores-linha de B e os coeficientes dessa combinação linear são as componentes do vector-linha i de A.

1.3 Inversa de uma Matriz Quadrada

Dada um número (real ou complexo) não-nulo temos sempre garantida a existência (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) do respectivo inverso multiplicativo. Recordemos a definição de inverso multiplicativo de um elemento, por exemplo, em $\mathbb{R}$.

Dado $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, o elemento $b \in \mathbb{R}$ que satisfaz

$$ab = ba = 1$$

diz-se o *inverso multiplicativo* de a e escreve-se $b = a^{-1}$.

Agora com matrizes...

Dada uma matriz A procuramos uma matriz B que satisfaça

$$A_{n\times ?}\ .\ B_{?\times n} = I_n = B_{?\times n}\ .\ A_{n\times ?}\ \ .$$

Forçosamente

$$? = n.$$

Logo só faz sentido falar em matriz *inversa* para uma dada matriz *quadrada.*

(1.3 a) **<u>Definição.</u>**

Uma matriz A quadrada de ordem n diz-se *invertível* se existir uma matriz B quadrada de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Consequências imediatas da definição.

(I) A matriz 0_n não é invertível.

(Para $A = 0_n$ e $B \in M_{n\times n}(K)$ arbitrária

$$AB = 0_n B = 0_n$$

donde 0_n não é invertível.)

(II) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ é não-invertível. Pelo facto de existir $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se A fosse invertível, existiria A^{-1} e

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

$$I_2 \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

o que contradiz a definição de igualdade entre duas matrizes.

(III) A matriz I_n é invertível já que

$$I_n I_n = I_n.$$

Pergunta 1. Em que condições uma dada matriz admitirá inversa?

Pergunta 2. Como calcular, quando existe, a inversa de uma dada matriz?

Mas, mesmo antes de responder a estas questões, podemos demonstrar algumas propriedades da inversa de uma matriz.

(1.3 b) **Teorema.** *Para $A \in M_{n\times n}(K)$ existe no máximo uma matriz $B \in M_{n\times n}(K)$ tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

Demonstração. Comecemos por admitir a existência de duas matrizes inversas de A e mostremos que são iguais.

Para $B,\ B' \in M_{n\times n}(K)$ satisfazendo

$$AB = BA = I_n$$

$$AB' = B'A = I_n$$

temos

$$B' = B'I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_nB = B.$$

Logo existe, no máximo, uma matriz B nas condições requeridas.

(1.3 c) **Teorema.** *Para A e C matrizes quadradas de ordem n invertíveis o produto AC é também invertível e*

$$(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração. Verifiquemos que $C^{-1}A^{-1}$ satisfaz as condições exigidas para que seja a inversa de AC. De facto, temos

$$(AC)(C^{-1}A^{-1}) = A(CC^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

De modo análogo

$$(C^{-1}A^{-1})(AC) = C^{-1}(A^{-1}A)C = C^{-1}I_nC = C^{-1}C = I_n.$$

Logo podemos concluir que AC é invertível já que $C^{-1}A^{-1}$ satisfaz as condições para ser a inversa de AC.

1.4 Transposição de Matrizes

(1.4 a) **Definição.**

Dada uma matriz $A = \left[\ a_{ij}\ \right] \in M_{m\times n}(K)$ a matriz $A^T = \left[\ b_{k\ell}\ \right] \in M_{n\times m}(K)$ com

$$b_{k\ell} = a_{\ell k}\ ,\quad k = 1, ..., n; \ell = 1, ..., m$$

diz-se a *transposta* de A.

A matriz A diz-se *simétrica* se $A = A^T$.

Notas.

i. A coluna i da A^T é precisamente a linha i de A, para $i = 1, ..., m$.

ii. Uma matriz é simétrica sse for quadrada e forem iguais os elementos situados em posições simétricas relativamente à diagonal principal.

(1.4 b) Proposição. *A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:*

(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *, para* α *elemento de* K
(4) $(AB)^T = B^T A^T$
(5) $(A^k)^T = (A^T)^k$*, para* k *natural*
(6) Se A *for invertível,* A^T *também o é, tendo-se*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Demonstração. É deixada como exercício.

(1.4 c) Definição.

Uma matriz quadrada diz-se *ortogonal* se for invertível e as respectivas inversa e transposta coincidirem

$$A^{-1} = A^T \quad (A \text{ ortogonal}).$$

(1.4 d) Definição.

Para $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$ matriz complexa, a *conjugada* de A é a matriz

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Escrevemos

$$A^*$$

para representar $\bar{A}^T$.

Uma matriz diz-se *hermítica* sempre que

$$A = A^*.$$

(1.4 e) **Proposição.** *As matrizes complexas gozam das seguintes propriedades:*

(1) $(A^*)^* = A$

(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(3) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ *, para* α *elemento de* $\mathbb{C}$

(4) $(AB)^* = B^* \, A^*$

(5) $(A^k)^* = (A^*)^k$*, para* k *natural*

(6) Se A *for invertível,* A^* *também o é, tendo-se*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Demonstração. É deixada como exercício.

1.5 Determinantes

Pergunta 3. Será possível associar a cada matriz um número que dependa apenas de elementos da matriz e que nos permita decidir a existência da matriz inversa de uma dada matriz?

A resposta a esta questão é afirmativa . Tal número é chamado o *determinante da matriz.*

O Determinante de uma matriz em $M_{1\times 1}(K)$.

Um número é invertível sse for não-nulo. Portanto uma matriz 1×1 é invertível sse for não-nula. (Mas, para matrizes de ordem superior tal já não se verifica.)

$$\text{Para } A = \left[\begin{array}{c} a \end{array}\right] \in M_{1\times 1}(K) \text{ põe-se}$$

$$det\ A = det \left[\begin{array}{c} a \end{array}\right] = |a| = a$$

e chama-se *determinante* de A.

Conclusão. Uma matriz $A = \left[\begin{array}{c} a \end{array}\right] \in M_{1\times 1}(K)$ é invertível sse o respectivo determinante for não-nulo.

O determinante de uma matriz em $M_{2\times 2}(K)$.

Reparemos que dada $A = \begin{bmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ se tem

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde a matriz $B = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ foi obtida a partir da matriz A trocando entre si os elementos da diagonal principal e mudando o sinal dos restantes elementos.

Ainda para $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ se verifica

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podíamos, então, ser levados a pensar que a inversa de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

se poderia obter trocando entre si a e d e mudando o sinal a c e a b. Mas o facto de se ter

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

leva-nos a ter um momento de reflexão. Tal procedimento levar-nos-ia, imediatamente, à inversa de A somente no caso de $ad-bc = 1$. E se $ad-bc \neq 1$? Será que poderemos ainda determinar a inversa de A?

Caso 1. Seja $D = ad - bc \neq 0$.

Basta agora colocar

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{bmatrix}$$

para obter

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{bmatrix} = I_2.$$

Caso 2. Seja $D = ad - bc = 0$.

Então a matriz A não admite inversa. Suponhamos que existia A^{-1}, matriz inversa de A. Teríamos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = I_2 \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= (A^{-1}A) \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= A^{-1}(A \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}) \\ &= A^{-1} 0_2 = 0_2 \end{aligned}$$

o que contradiz a definição de igualdade entre duas matrizes.

Conclusão. A matriz $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$ admite inversa sse $D = ad - bc \neq 0$. O número D diz-se o *determinante* de A.

(1.5 a) **Notações.** Usa-se

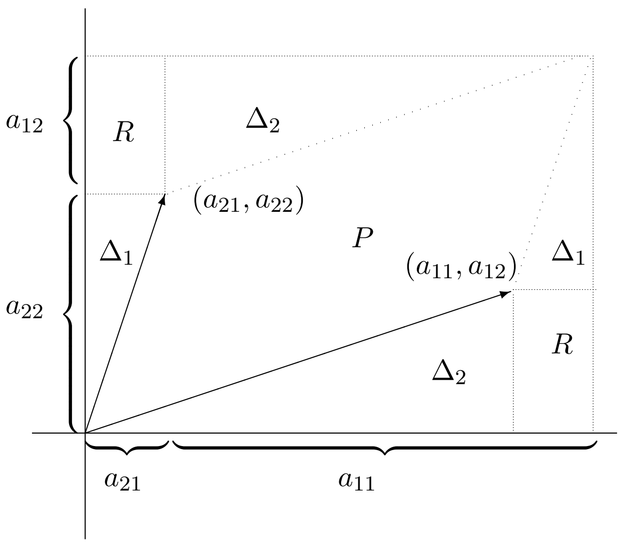
$$det\ A = det \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

para representar este número de K.

(1.5 b) **Exemplo.** Temos

$$det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 1 = 7, \quad det \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -10 + 12 = 2.$$

(1.5 c) **Observação.**
O determinante de A está, como vimos, relacionado com a existência e o cálculo da inversa de uma matriz A. Mas a importância do determinante não se esgota aqui. Por exemplo, dado o paralelograma P



temos

$$(a_{11} + a_{21})(a_{12} + a_{22}) = \text{ área } P + 2 \text{ área} R + 2 \text{ área} \Delta_1 + 2 \text{ área} \Delta_2$$

$$\begin{aligned} \text{área } P &= (a_{11} + a_{21})(a_{12} + a_{22}) - 2a_{12}a_{21} - 2\ (1/2)a_{21}a_{22} - 2\ (1/2)a_{11}a_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Algumas Propriedades dos Determinantes em $M_{2\times 2}(K)$

(d_1) Para $a, b, c, d, b', d', \alpha \in K$ temos

$$det \begin{bmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix}.$$

$$det \begin{bmatrix} \alpha\, a & b \\ \alpha\, c & d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(d_2) Se as duas colunas de uma matriz forem iguais o determinante da matriz é igual a zero.

(d_3) Para a matriz identidade de ordem 2 temos

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Demonstração.
(d_1) Temos

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{bmatrix} &= a(d+d') - c(b+b') \\ &= ad - bc + ad' - b'c \\ &= det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix}; \\ det \begin{bmatrix} \alpha\, a & b \\ \alpha\, c & d \end{bmatrix} &= (\alpha\, a)d - (\alpha\, c)b = \alpha\,(ad-bc) = \alpha\; det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(**Nota**. É imediato que, para $a, a', b, b', c, c', d, d', \alpha \in K$, temos ainda

i.
$$det \begin{bmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix};$$

ii.
$$det \begin{bmatrix} a & \alpha b \\ c & \alpha d \end{bmatrix} = \alpha\; det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{bmatrix};$$

iii.

$$det(\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \alpha^2 det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \ )$$

(d_2) Temos

$$det \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} = ac - ac = 0.$$

O determinante de uma matriz em $M_{2\times 2}(K)$ satisfaz ainda outras propriedades adicionais. Vejamos algumas.

(1.5 d) Proposição.

Em $M_{2\times 2}(K)$

(1) se adicionarmos um múltiplo de uma coluna à outra o valor do determinante não se altera;

(2) se trocarmos entre si as colunas o determinante muda de sinal.

(3) Os determinantes de uma matriz A e da respectiva transposta coincidem, isto é, $detA = detA^T$.

Demonstração.
(1.) Temos

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} a & b+\alpha a \\ c & d+\alpha c \end{bmatrix} &= det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a & \alpha a \\ c & \alpha c \end{bmatrix} \\ &= det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \alpha\, det \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} \\ &= det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2.) Temos

$$det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

(3.) Temos

$$det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = (ad - bc) = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

O determinante de uma matriz em $M_{3\times 3}(K)$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Vamos definir *det* A de acordo com a fórmula

$$\begin{aligned} det\ A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned} \tag{1}$$

que pode ser facilmente obtida atendendo aos seguintes diagramas:

Diagrama 1.

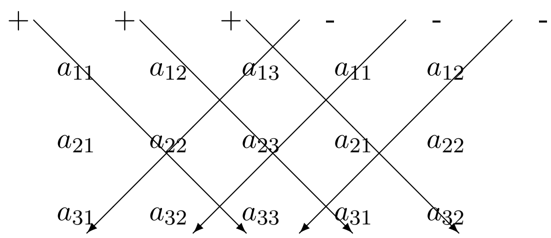


Diagrama 2.

termos com sinal + *termos com sinal -*

É imediato que

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (5)(2)(1) + (-1)(0)(0) + (1)(1)(3) -$$
$$-(0)(2)(3) - (1)(-1)(1) - (5)(1)(0)$$
$$= 10 + 3 + 1 = 14.$$

(1.5 e) **Observações.**

(1) É também imediato que

$$\begin{aligned} det\ A^T &= det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= det\ A \end{aligned}$$

logo a propriedade (3) da proposição (1.5d) continua a ser satisfeita para matrizes de $M_{3\times 3}(K)$.

(2) Mas os diagramas usados para os casos $n = 2$ e $n = 3$ não se revelam tão úteis e simples para ordens superiores. No entanto, existe outra estratégia para a definição que vai ser de fácil generalização.

(3) Podemos, por exemplo, reagrupar os termos de (1) do seguinte modo (evidenciando os elementos da coluna 1.)

$$\begin{aligned} det\ A &= det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

(4) De modo idêntico e reagrupando de acordo com as restantes colunas ou linhas , poderíamos obter outros cinco diferentes desenvolvimentos. Por exemplo, de acordo com os elementos da linha 3, teríamos

$$det\ A = a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

A fórmula (2) diz-se um *desenvolvimento em coluna* do *det A* (em relação à coluna 1) sendo (3) um *desenvolvimento em linha* do *det A* (relativamente à linha 3).

(5) Em cada caso os 2×2-determinantes (determinantes de matrizes 2×2) que aparecem nas fórmulas dizem-se *menores* do *det A* da entrada pela qual estão a ser multiplicados. Deste modo, por

exemplo, o menor de a_1 é o determinante da matriz que se obtém de A eliminando a linha e a coluna onde a_1 se encontra, isto é, a linha 1 e a coluna 1. Semelhantemente, o menor de c_2 em $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ é $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

(6) A cada menor está associado um sinal determinado pela posição do elemento e de acordo com a seguinte tabela

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Olhando para a tabela podemos dela tirar uma regra:

> O sinal que vai afectar o menor do (i, j) -elemento é o sinal de $(-1)^{i+j}$. Deste modo, se $i+j$ for par o sinal $+$ irá afectar o menor da (i, j) -entrada da matriz. Sempre que $i+j$ seja ímpar o sinal que irá afectar o menor será $-$.

(7) Tal leva-nos ao conceito de *co-factor* ou *complemento algébrico* de uma entrada da matriz A.

> O *co-factor* ou *complemento algébrico* da (i, j)-*entrada* é igual a
>
> $$(-1)^{i+j} \times \text{ (menor da } (i, j) - \text{ entrada).}$$

Por exemplo, para $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

complemento algébrico de $a_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

complemento algébrico de $c_2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

(8) Usando as noções agora estabelecidas podemos descrever o desenvolvimento de $det\ A$ para $A \in M_{3\times 3}(K)3$ em colunas ou em linhas de acordo com a seguinte fórmula (**Teorema de Laplace**):

> O $det\ A$ é igual à soma dos produtos das entradas de uma coluna (ou linha) pelos respectivos complementos algébricos.

Por exemplo, usando o desenvolvimento em coluna (na primeira) obtemos

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14$$

obtendo-se o mesmo valor ao efectuarmos o desenvolvimento em linha (por exemplo, na segunda)

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 10 = 14.$$

(**1.5 f**) <u>**Nota.**</u> É agora imediato estabelecer em $M_{3\times 3}(K)$ a validade de uma proposição correspondente a 1.5 d.

O determinante de uma matriz em $M_{n\times n}(K)$, para $n \geq 4$.

Suponhamos que a noção de determinante de uma matriz está já definida para matrizes de ordem até $n-1$.

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n}$ representemos por

A_{ij} — a $(n-1)\times(n-1)$-matriz obtida de A por supressão da linha i e da coluna j

Deste modo podemos definir

i. o *menor* de a_{ij} como sendo $det\, A_{ij}$;

ii. o *complemento algébrico* (*co-factor*) de a_{ij} como sendo $(-1)^{i+j}\ det A_{ij}$.

É possível demonstrar que as somas

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\ a_{ij}\ det\, A_{ij}\ , \qquad (j \text{ é constante})$$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij}\; det\, A_{ij}\;, \qquad (i \text{ é constante})$$

têm o mesmo valor seja qual for o j escolhido na primeira e o i escolhido na segunda.

A primeira dá-nos o desenvolvimento na coluna j e a segunda dá-nos o desenvolvimento na linha i do $det\ A$. Deste modo podemos tomar cada uma destas somas para estabelecer a definição de

$$det\ A$$

para o caso geral de uma matriz $A \in M_{n\times n}(K)$, para n natural arbitrário.

(1.5 g) **Definição.**

Para $A \in M_{n\times n}(K)$, para n natural arbitrário,

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\, a_{i1}\; det\, A_{i1}$$

diz-se o *desenvolvimento de det A na coluna* 1 de A.

(1.5 h) **Exemplo.** Para $n = 4$ temos

$$\begin{aligned} det\ A \;&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} \\ &+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{vmatrix}. \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix} \\ &+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} \\ &= (90-24) - 2(36-12) - (11) - 6 = 1. \end{aligned}$$

Mas o cálculo é muito mais rápido se efectuarmos um desenvolvimento em coluna, por exemplo, na coluna 3. De facto,

$$
\begin{aligned}
det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-4+15) + 6(15+4+4-5-4-12) \\
&= -11 + 12 = 1.
\end{aligned}
$$

Algumas Propriedades

(I) O determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto das entradas da diagonal principal.

(Também para $n = 4$ temos

$$
det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} = a\ det \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} = a.bcd = abcd
$$

conforme requerido. O caso geral demonstra-se por indução.)

Em particular, para as matrizes elementares do tipo

$D_i(\alpha),\ i = 1, ..., n,\ \alpha \in K$

$$
det\ D_i(\alpha) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \alpha.
$$

(II) Também para as matrizes elementares do tipo $E_{ij}(\alpha)$ temos

$$
det\ E_{ij}(\alpha) = 1,\ i, j = 1, ..., n,\ \alpha \in K.
$$

(Por exemplo, para $n = 4,\ i = 3,\ j = 2$ temos

$$det\ E_{32}(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

tendo, no terceiro passo, sido efectuado um desenvolvimento na 1^a linha.

O resultado geral demonstra-se por indução.

(III) Finalmente

$$det\ P_{ij} = -1.$$

(De facto, para $n = 4,\ i = 2,\ j = 4$ temos

$$det\ P_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1) = -1.)$$

Mais uma vez o resultado geral demonstra-se por indução.

É ainda usando o Princípio da Indução que se demonstra a validade do seguinte teorema.

(1.5 i) **Teorema.** *O determinante satisfaz as seguintes propriedades:*

(d_1) *Se para $j = 1, ..., n$ representarmos por $A^{(j)}$ a coluna j da matriz A e se para um certo $i \in \{1, ..., n\}$, a coluna $A^{(i)}$ for a soma de dois vectores-coluna, $A^{(i)} = C + C'$, então*

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & C + C' & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} &= det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & C & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} \\ &+ det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & C' & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para $\alpha \in K$ e $A^{(i)} = \alpha C$

$$det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & \alpha C & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} = \alpha\ det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & C & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}.$$

(d_2) *Se para $j \neq i$ as colunas $A^{(i)}$ e $A^{(j)}$ da matriz A forem iguais então*

$$det\ A = 0.$$

(d_3) *Para n arbitrário, $det\ I_n = 1$.*

Este teorema pode (e é usualmente) utilizado para definir a *função determinante*

$$det:\ M_{n\times n}(K) \rightarrow K$$
$$A \mapsto det\ A,\ A \in M_{n\times n}(K),$$

impondo que ela satisfaça $(d_1), (d_2), (d_3)$.

Para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, a propriedade correspondente à Prop.1.5 d pode agora ser estabelecida.

(1.5 j) **Proposição.** *Em $M_{n\times n}(K)$ tem-se*

(1) O determinante de uma matriz e da respectiva transposta coincide.

(2) Para i, j naturais, ao trocarmos entre si as colunas $A^{(i)}$ e $A^{(j)}$ da matriz A, o determinante da matriz assim obtida é o simétrico do $detA$.

(3) Seja B a matriz obtida de A por adição à coluna i de A do múltiplo-λ da coluna j de A. Então $detA = detB$.

Demonstração.

(1) Trata-se de uma consequência imediata da definição de determinante. O desenvolvimento do determinante da matriz A^T segundo a linha i coincide com o desenvolvimento do determinante da matriz A segundo a coluna i.

(2) Atendendo a (d_2) ao substituirmos as colunas $A^{(i)}$ e $A^{(j)}$ por $A^{(i)} + A^{(j)}$ obtemos uma matriz com duas colunas iguais e logo de determinante igual a zero. Deste modo,

$$\begin{aligned}
0 &= det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)}+A^{(j)} & \cdots & A^{(i)}+A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}\\
&= det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)} & \cdots & A^{(i)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}\\
&+det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}\\
&+det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}\\
&+det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(i)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde o requerido.

(3) Para $A = \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}$ tem-se
$B = \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)}+\lambda A^{(j)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}$.
Atendendo a (d_2) tem-se
$detB = det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)}+\lambda A^{(j)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} =$
$= det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} +$
$+det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & \lambda A^{(j)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}$
$= det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(i)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} +$
$+\lambda\ det\begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(j)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}$
$= detA + 0 = detA$
já que a segunda matriz tem duas colunas iguais.

Ainda Algumas Propriedades de Determinantes

Exercício.
Para $A \in M_{n\times n}(K)$, $i, j = 1, ..., n$, $\alpha \in K$

i. descreva em função da matriz A as matrizes

$$E_{ij}(\alpha)A \quad D_i(\alpha)A \quad P_{ij}A$$
$$A\ E_{ij}(\alpha) \quad A\ D_i(\alpha) \quad A\ P_{ij}\ ;$$

ii. prove que

$$det\ (E_{ij}(\alpha)A) = det\ E_{ij}(\alpha)\ det\ A$$
$$det\ (D_i(\alpha)\ A) = det\ D_i(\alpha)\ detA$$
$$det\ (P_{ij}A) = det\ P_{ij}\ detA.$$

Capítulo 2

Sistemas de Equações Lineares

2.1 Generalidades

(2.1 a) **Definição.**

Uma *equação linear* em (ou nas incógnitas) $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma igualdade do tipo

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + ... + a_n\, x_n = b$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$e b são elementos (números) de K.

A

$x_1, x_2, ..., x_n$ chamamos *incógnitas*, sendo
$a_1, a_2, ...a_n$ os *coeficientes das incógnitas* e
b o *segundo membro* ou *termo independente*.

(2.1 b) **Definição.**

Um *sistema de equações lineares* é uma colecção finita de equações lineares.

Um sistema de m equações em n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + ... + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + ... + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + ... + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = b_i\,, \quad i = 1, ..., m$$

pode representar-se abreviadamente na forma matricial

$$A\,x = b$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

matriz do sistema — matriz-coluna das incógnitas — segundo membro

(2.1 c) **Definição.**

Uma *solução* do sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, ..., x_n$ é uma sequência ordenada de números

$$\alpha_1, ..., \alpha_n$$

tais que as substituições

$$x_i = \alpha_i, \quad i = 1, ..., n$$

transformam todas as equações em identidades.

Resolver um sistema de equações lineares é determinar todas as soluções ou provar que não existe solução.

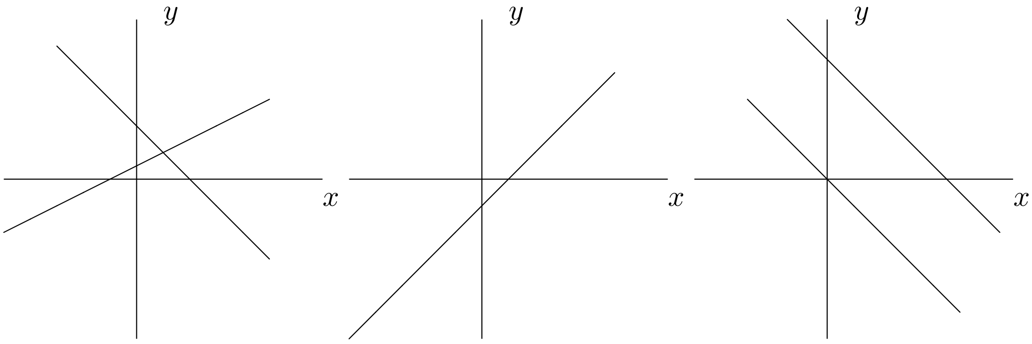
Tipos de sistemas relativamente ao número de soluções.

Um sistema que admite pelo menos uma solução diz-se *possível* (Diz-se *determinado* se só tiver uma, *indeterminado* se tiver mais do que uma). Um sistema de equações que não tenha qualquer solução diz-se *impossível*.

Interpretação geométrica no caso $K = \mathbb{R}$ e $m = n = 2$

Seja dado o sistema

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c & \text{com} \quad a \neq 0 \ \text{ ou } \ b \neq 0 \\ a'\,x + b'\,y = c' & \text{com} \quad a' \neq 0 \text{ ou } \ b' \neq 0 \end{cases}$$



sistema possível determinado (rectas concorrentes)

sistema possível indeterminado (rectas coincidentes)

sistema impossível (rectas paralelas)

(2.1 d) <u>**Definição.**</u>

Sistemas com o mesmo número de equações e incógnitas dizem-se *equivalentes* se tiverem exactamente as mesmas soluções.

Métodos de Resolução de sistemas de equações lineares

- Directos
- Iterativos (Análise Numérica)

2.2 O Algoritmo de Eliminação de Gauss (método directo)

Ideia Básica do Método: os sistemas (cujas matrizes sejam) triangulares (ou em escada) resolvem-se facilmente por substituição ascendente.

(Por exemplo $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ \qquad 2y + 5z = -3 \\ \qquad\qquad 2z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ \\ z = 3/2 \end{cases}$

$\begin{cases} \\ 2y + 5 \times 3/2 = -3 \\ z = 3/2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = ... \\ y = -21/4 \\ z = 3/2 \end{cases}$.)

Objectivo. Desenvolver um algoritmo para transformar o sistema dado noutro equivalente cuja matriz seja (triangular) em escada.

Dado o sistema $\begin{cases} -2x + y + z = 1 & (L_1) \\ 4x + 2y - 3z = 0 & (L_2) \\ -2x - 3y + 5z = 5 & (L_3) \end{cases}$
vamos efectuar uma sequência de *passos-elementares* que o transforme num sistema equivalente de matriz (triangular) em escada.

Um *passo elementar* no *método de eliminação de Gauss* consiste na adição membro a membro a uma equação de um múltiplo de outra de forma a que, na equação obtida, seja nulo o coeficiente de certa incógnita. Diz-se então que se *eliminou* essa incógnita da equação.

Parte Descendente do Método

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 & (L_1) \\ 4x + 2y - 3z = 0 & (L_2) \\ -2x - 3y + 5z = 5 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2^{\neq 0}\ x + y + z = 1 & (L_1' = L_1) \\ \qquad 4^{\neq 0}\ y - z = 2 & (L_2' = L_2 - (-2L_1)) \\ \qquad -4\ y + 4z = 4 & (L_3' = L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2^{\neq 0}\ \ x + y + z = 1 & (L_1'' = L_1') \\ \qquad 4^{\neq 0}\ \ y - z = 2 & (L_2'' = L_2') \\ \qquad\qquad 3z = 6 & (L_3'' = L_3' - (\frac{a_{32}}{a_{22}'})L_2') \end{cases}$$

(Por exemplo, sendo $a_{11} \neq 0$ a adição à segunda equação da primeira multiplicada por $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ elimina a incógnita x_1 da segunda equação.)

Em seguida, passamos a eliminar a incógnita x_2 de todas as equações a partir da 3^a - para o qual é necessário que a_{22}' (o novo coeficiente de x_2 na 2^a equação) seja não-nulo. Este processo repete-se até não ser possível continuá-lo mais. Os números não-nulos

$$a_{11}, a_{22}', ...$$

chamam-se *pivots da eliminação.*

No presente caso em estudo há 3 pivots havendo 3 equações e 3 incógnitas.

Parte Ascendente do Método

No caso em estudo

$$\begin{cases} -2^{\neq 0}\ \ x + y + z = 1 \\ \qquad 4^{\neq 0}\ \ y - z = 2 \\ \qquad\qquad 3z = 6 \end{cases} \begin{cases} \\ \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 4y - 2 = 2 \\ z = 2 \end{cases} \begin{cases} -2x + 1 + 2 = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

e logo o sistema é possível e determinado admitindo a solução única $\{(1, 1, 2)\}$.

Algoritmo de Eliminação de Gauss

Seja dado um sistema de m equações em n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1n}\, x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + ... + a_{2n}\, x_n = b_2 & (L_2) \\ \qquad\qquad \cdots & \cdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + ... + a_{mn}\, x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

i. Se $a_{11} \neq 0$, considere

$$\begin{array}{ll} L'_1 = L_1 & \\ L'_2 = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 & \text{passos elementares} \\ \vdots & \text{do método} \\ L'_m = L_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} L_1 & \end{array}$$

Deste modo, a incógnita x_1 é eliminada de todas as equações a partir da segunda.

ii. Seja agora a'_{22} o coeficiente de x_2 na segunda equação do sistema (equivalente ao dado pelo Teorema (**??**) e obtido em ($i.$)). Se $a'_{22} \neq 0$, usando um processo ao descrito em ($i.$), elimine a incógnita x_2 em todas as equações do novo sistema a partir da 3^a equação.

iii. E o processo é repetido enquanto possível.

Nota. Caso apareça um zero na posição em que devia estar um pivot, procura-se resolver o problema trocando a respectiva equação por uma outra situada abaixo dela. Se nenhuma troca resolver o problema, o pivot passa a ser procurado entre os coeficientes da incógnita seguinte.

(2.2 a) **Teorema.** *Cada passo elementar do método de eliminação de Gauss transforma um sistema noutro equivalente.*

Demonstração. Cada passo elementar pode ser descrito matricialmente pela multiplicação à esquerda por uma matriz elementar do tipo $E_{ij}(\alpha)$. Basta então reparar que $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$.

(Por exemplo, a eliminação de x_1 na segunda linha é efectuada pela multiplicação à esquerda por

$$E_{21}(-\frac{a_{21}}{a_{11}}).$$

A partir do sistema

$$Ax = b \tag{1}$$

obtemos o sistema

$$E_{21}(-\frac{a_{21}}{a_{11}})Ax = E_{21}(-\frac{a_{21}}{a_{11}})\, b. \tag{2}$$

Se x_0 for solução de (1) é imediatamente solução de (2). Agora se x_1 for solução de (2) então por multiplicação de (2) por $E_{21}(\frac{a_{21}}{a_{11}})$ obtemos

$$Ax_1 = b$$

e logo x_1 é também solução de (1).)

Do processo de eliminação de Gauss resulta um sistema equivalente

$$\mathcal{U}x = c$$

cuja matriz $\mathcal{U}$ (que é ainda do tipo $m \times n$) tem uma forma especial e que se diz *matriz-em-escada*.

(2.2 b) **Definição.**

Uma matriz diz-se uma *matriz-em-escada* (de linhas) sempre que satisfaça:

(1) Se o primeiro elemento não-nulo numa linha estiver na coluna j então a linha seguinte começa com, pelo menos, j elementos nulos.

(2) Se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

(Pela própria definição, as matrizes triangulares superiores de elementos diagonais não-nulos são matrizes-em-escada.)

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aqui

$*$ designa um elemento arbitrário de K

$\bullet$ representa um elemento não-nulo em K.

Com a obtenção da matriz-em-escada $\mathcal{U}$ termina a parte descendente do método de eliminação de Gauss.

Neste momento verifica-se se o sistema obtido

$$\mathcal{U}x = c$$

é possível, isto é, verifica-se a não-existência de equações com o primeiro membro nulo e o segundo não-nulo. Se o sistema for possível resolve-se de *baixo para cima* (*parte ascendente* do algoritmo) obtendo *algumas incógnitas* (aquelas que estão a ser multiplicadas por pivots) em função das restantes. Às primeiras chamamos *incógnitas principais* ou *básicas* e às outras (que podem tomar qualquer valor em K) chamamos *incógnitas não-principais* ou *livres.*

Casos Possíveis no final da Eliminação (para $m = n$)

(1) **Há n pivots.**

O sistema $\mathcal{U}x = c$ é do tipo

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}\, x_1 + \tilde{a}_{12}\, x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}\, x_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{22}\, x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}\, x_n = \tilde{b}_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \tilde{a}_{nn}\, x_n = \tilde{b}_n \end{cases}$$

e por substituição ascendente obtemos a solução única. O sistema é *possível* e *determinado.*

(2) **Há k pivots com $k < n$.**

As últimas equações do sistema obtido são do tipo $0 = 0$ ou $0 = a$ com $a \neq 0$.

a. Há pelo menos uma equação do tipo $0 = a$ com $a \neq 0$. Neste caso o sistema é *impossível.*

b. Considere as primeiras k equações e passe as parcelas referentes às $n - k$ incógnitas livres para os segundos membros. Resolva o sistema em relação às k incógnitas básicas. Obtemos os valores das k incógnitas básicas em função das $n - k$ incógnitas livres. Neste caso, o sistema é *possível* e *indeterminado.* Diz-se que o *grau de indeterminação* do sistema é

$$\underset{\text{número de incógnitas}}{n} \; - \; \underset{\text{número de pivots}}{k}.$$

(**2.2 c**) **Exemplos.**

(I) O sistema

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (L_1) \\ -3x + 3y - z = 5 & (L_2) \\ 2x - 2y + z = -1 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (L_1' = L_1) \\ 0y + 2z = -1 & (L_2' = L_2 + 3L_1) \\ 0y - z = 3 & (L_3' = L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (L_1'' = L_1' = L_1) \\ 2z = -1 & (L_2'' = L_2') \\ 0z = 5/2 & (L_3'' = L_3 + (1/2)L_2'') \end{cases}$$

é impossível (pela existência da 3^a equação, ou seja, o número de pivots é inferior à característica da *matriz ampliada* do sistema).

(II) No sistema

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (L_1) \\ -3x + 3y - z = 5 & (L_2) \\ 2x - 2y + z = -7/2 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (L_1' = L_1) \\ 2z = -1 & (L_2' = L_2 + 3L_1) \\ -z = 1/2 & (L_3' = L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (L_1'' = L_1' = L_1) \\ 2z = -1 & (L_2'' = L_2') \\ 0z = 0 & (L_3'' = L_3 + (1/2)L_2'') \end{cases}$$

para efeitos de determinação da solução do sistema, esta última equação $0z = 0$ é irrelevante já que qualquer valor de z satisfaz esta equação. Comecemos por reparar que o número de pivots, 2, é inferior ao número de incógnitas, 3, sendo x e z as incógnitas básicas (cujos coeficientes são pivots) e sendo y uma variável livre.

$$\begin{cases} x + z = -2 + y \\ z = -1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y - 3/2 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

O conjunto das soluções (solução geral) é, portanto,

$$\{(y - 3/2, y, -1/2) : y \in \mathbb{R}\}$$

sendo o grau de indeterminação do sistema (igual ao número de incógnitas livres), $1 = 3 - 2$.

(2.2 d) **Definição.**

A *característica* de A, *car* A, é o número de pivots que aparecem na matriz resultado da aplicação a A do método de eliminação de Gauss.

Equivalentemente, *car* A é o número de linhas não-nulas da matriz-em-escada $\mathcal{U}$ produzida pelo algoritmo de eliminação de Gauss aplicado a A.

Uma matriz quadrada, $A_{n\times n}$ diz-se *não-singular* se tiver característica igual a n, isto é, se a característica e a ordem coincidirem.

Se *car* $A_{n\times n} < n$ a matriz A diz-se *singular*.

No caso de $A \in M_{n\times n}(K)$ ser não-singular, a matriz $\mathcal{U}$ é triangular superior com os elementos diagonais não-nulos (são os n pivots).

Verificámos que na aplicação do algoritmo de Gauss os coeficientes a_{ij} e os termos independentes são alterados. Para simplificar a aplicação do método é conveniente trabalhar com a seguinte matriz que se diz a *matriz-ampliada do sistema*.

$$\begin{bmatrix} A & | & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

Casos Possíveis no
Final da Parte Descendente do
Algoritmo de Eliminação de Gauss
(Análise da matriz-ampliada obtida)

$A \in M_{m\times n}(K)$
$car\ A < car \begin{bmatrix} A & | & b \end{bmatrix}$
Sistema Impossível

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & * \end{bmatrix}$$

onde $\bullet$ designa um elemento não-nulo de K
e $*$ representa um elemento arbitrário em K.

$A \in M_{m\times n}(K)$
$car\ A = car \begin{bmatrix} A & | & b \end{bmatrix}$
Sistema Possível e Determinado
(número de pivots = número de incógnitas)
(só há variáveis básicas)

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & | & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & | & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & | & * \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & | & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & | & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & | & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$A \in M_{m\times n}(K)$
$car\ A = car \begin{bmatrix} A & | & b \end{bmatrix}$
Sistema Possível e Indeterminado
(número de pivots < número de incógnitas)
(há variáveis livres)

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & | & * \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * & \cdots & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Todas as equações com o 1^o membro igual a zero têm também o 2^o membro igual a zero.

2.3 Decomposição $\mathcal{LU}$ de uma matriz (Resolução de sistemas)

Dada uma matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ será possível (sempre?) escrevê-la como um produto de duas matrizes

$$A = \mathcal{LU}$$

onde

$\mathcal{L}$ é triangular inferior e

$\mathcal{U}$ é triangular superior?

E o mesmo acontecerá com $A \in M_{m\times n}(K)$?

Caso I *A matriz A é não-singular.*

Analisemos a aplicação do método de eliminação de Gauss à resolução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 4 & 2 & -3 & | & 0 \\ -2 & -3 & 5 & | & 5 \end{bmatrix}} \overset{L_2+2L_1}{\underset{E_{21}(2)}{\longrightarrow}} \underset{\mathcal{U}_1}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & | & 2 \\ -2 & -3 & 5 & | & 5 \end{bmatrix}} \overset{L_3-L_1}{\underset{E_{31}(-1)}{\longrightarrow}}$$

$$\underset{E_{31}(-1)}{\longrightarrow} \underset{\mathcal{U}_2}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & | & 2 \\ 0 & -4 & 4 & | & 4 \end{bmatrix}} \overset{L_3+L_2}{\underset{E_{32}(1)}{\longrightarrow}} \underset{\mathcal{U}}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 6 \end{bmatrix}}$$

com

$E_{21}(2)\ A = \mathcal{U}_1$
$E_{31}(-1)(E_{21}(2)\ A) = \mathcal{U}_2$
$E_{32}(1)(E_{31}(-1)\ E_{21}(2)\ A) = \mathcal{U}$

donde

$E_{32}(-1)\ (E_{32}(1)E_{31}(-1)E_{21}(2)\ A) = E_{32}(-1)\ \mathcal{U}$
$E_{21}(2)\ A = E_{31}(1)\ E_{32}(-1)\mathcal{U}$
$A = \underbrace{E_{21}(-2)\ E_{31}(1)\ E_{32}(-1)}_{\mathcal{L}}\underset{\mathcal{U}}{\mathcal{U}}$

onde $\mathcal{L}$ é dada por um produto de matrizes invertíveis.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_{32}(-1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nota. A matriz $\mathcal{L}$ armazena toda a informação do processo de eliminação de Gauss.

i. Caso não haja (no processo de eliminação de Gauss) troca de linhas, a matriz $\mathcal{L}$ é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e os elementos sob a diagonal de $\mathcal{L}$ são os simétricos dos multiplicadores usados na eliminação, cada um na posição em que figura na respectiva matriz elementar. (Assim, a matriz $\mathcal{L}$ é muito fácil de escrever.)

ii. Porém, se houver necessidade de troca de linhas, a única diferença é que o algoritmo deve ser visto como aplicado não a A mas a PA onde P é uma matriz de permutação (P é o produto das matrizes de permutação correspondentes às várias trocas de linha feitas durante o algoritmo) e ao segundo membro Pb.

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ tem-se

$$\begin{array}{ll} L_2' = L_2 - 3L_1 & \quad L_3'' = L_2' \\ L_3' = L_3 - L_1 & \quad L_2'' = L_3' \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathcal{U}$$

$$P_{23}\ E_{31}(-1)\ E_{21}(-3)\ A = \mathcal{U}$$
$$E_{31}(-1)\ E_{21}(-3)\ A = P_{23}\,\mathcal{U}$$
$$E_{21}(-3)\ A = E_{31}(1)\ P_{23}\,\mathcal{U}$$
$$A = E_{21}(3)\ E_{31}(1)\ P_{23}\,\mathcal{U}$$
$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}'} P_{23}\,\mathcal{U}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{U}$$
$$P_{23}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{U}$$

logo

$$P_{23}\ A = \mathcal{L}\,\mathcal{U}.$$

Notemos que foi possível escrever $PA = \mathcal{L}\mathcal{U}$ embora a matriz $\mathcal{L}$ calculada não coincida com a matriz $\mathcal{L}'$ encontrada no meio do processo.

Caso II *A matriz A é (singular ou) do tipo $m \times n$*

(2.3 a) **Teorema.** *Sendo A uma matriz arbitrária do tipo $m \times n$ existe uma matriz de permutação P tal que PA se pode factorizar na forma $\mathcal{L}\mathcal{U}$ onde $\mathcal{L}$ é triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e $\mathcal{U}$ é uma matriz-em-escada. Os elementos sob a diagonal de $\mathcal{L}$ são os simétricos dos "multiplicadores"usados no método de eliminação aplicado a A e $\mathcal{U}$ é a matriz produzida pelo algoritmo (e portanto o primeiro elemento não-nulo em cada linha não-nula é um pivot).*

Resolução do sistema $Ax = b$ usando a factorização $\mathcal{L}\mathcal{U}$

Caso 1. *A matriz A é quadrada não-singular.*

Pretendemos resolver o sistema $Ax = b$. Suponhamos que $PA = \mathcal{L}\mathcal{U}$. Então

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \text{sse} \quad PAx = Pb \\ & \text{sse} \quad \mathcal{L}\mathcal{U}x = Pb \\ & \text{sse} \quad \begin{cases} \mathcal{L}y = Pb \\ \mathcal{U}x = y \end{cases} \end{aligned}$$

O sistema é transformado em dois sistemas triangulares tais que os elementos das diagonais em ambas as matrizes são não-nulos. Ambos os sistemas são possíveis e determinados e o sistema $Ax = b$ é ainda possível e determinado.

Caso 2. *A matriz A é (singular ou) do tipo $m \times n, (m \neq n)$.*

Então de $PA = \mathcal{L}\mathcal{U}$ vem

$$\begin{aligned} Ax = b \quad \text{sse} \quad & \mathcal{L}y = Pb \qquad (1) \\ & \mathcal{U}x = y \qquad (2) \end{aligned}$$

O sistema (1) é ainda possível e determinado. Mas na resolução de (2) vamos poder obter um sistema indeterminado ou um sistema impossível. E, desta forma, também o sistema $Ax = b$ poderá ser possível indeterminado ou impossível.

A Decomposição $\mathcal{LDU}$ para A matriz não-singular.

Suponhamos que efectuámos a decomposição $\mathcal{LU}$ da matriz A (isto é, não foi necessário trocar linhas). Então teremos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n-1,1} & \ell_{n-1,2} & \ell_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3,n1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Os elementos $"u_{ii}"$, $i = 1, 2, ..., n$ são os pivots do processo de eliminação (recordemos que $car\ A = n$). Então podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1,n-1}}{u_{11}} & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{u_{n-1,2}}{u_{22}} & \frac{u_{n,2}}{u_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{u_{n-1,n}}{u_{n-1,n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta factorização designa-se por factorização $\mathcal{LDU}$ da matriz A.

Resolução de Sistemas Homogéneos

É evidente que um *sistema homogéneo* (com todos os segundos membros iguais a zero) é *sempre possível* (admite, pelo menos a *solução nula*).

Para um sistema homogéneo

$$Ax = 0_{m\times 1}, \qquad A \in M_{m\times n}(K) \tag{1}$$

designemos por $N(A)$ o conjunto de todas as soluções do sistema (1).

Resolução do Sistema Homogéneo

$$A_{m\times n}\, x_{n\times 1} = 0_{m\times 1}, \qquad A \in M_{m\times n}(K)$$

1^o **Passo** Determinação da matriz-em-escada $\mathcal{U}$. Seja $car\,\mathcal{U} = r$.

2^o **Passo** No sistema $\mathcal{U}x = 0$ (que é equivalente ao sistema $Ax = 0$) separam-se as incógnitas em básicas (correspondentes às incógnitas com pivots e que são em número de r) e em livres. Se não houver incógnitas livres o sistema é possível e determinado (admitindo somente a solução nula).

3^o **Passo** Para cada incógnita livre, dá-se o valor 1 (de facto, poderia ser um valor arbitrário mas este simplifica os cálculos) a essa incógnita e zero às restantes incógnitas livres e resolve-se o sistema resultante (com r equações). As $n - r$ colunas assim obtidas *geram* o conjunto $N(A)$ das soluções, isto é, qualquer solução é combinação linear dessas $n - r$ colunas determinadas (uma para cada incógnita livre).

(2.3 b) **Exemplo.**

Utilizemos o algoritmo anterior no cálculo de um "conjunto de geradores" para o conjunto, $N(A)$, de soluções do seguinte sistema homogéneo. Uma vez que temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

as incógnitas básicas são x_1 e x_3 sendo x_2 e x_4 as livres, logo o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -x_2 - 2x_4 \\ -4x_3 = 4x_4. \end{cases}$$

Referente à incógnita livre x_2, fazendo $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ -4x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

obtemos o gerador $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Agora referente à incógnita livre x_4, fazendo $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ e resolvendo o sistema $\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ -4x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ obtemos o gerador $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Assim $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um sistema de geradores do conjunto $N(A)$, isto é, qualquer solução do sistema homogéneo pode ser escrito como uma combinação linear destas duas matrizes-coluna,

$$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in K \right\}.$$

(2.3 c) **Teorema.** *Um sistema homogéneo com um número de incógnitas superior ao número de equações é possível indeterminado.*

Demonstração. A representação matricial de um tal sistema é dado por

$$Ax = 0_{m\times 1}, \qquad A \in M_{m\times n}(K) \qquad\qquad \text{com } m < n.$$

É imediato que $car\ A = r \leq m < n$ e portanto há necessariamente $n - r$ incógnitas livres.

(2.3 d) **Teorema.** *Se x' for uma solução do sistema $Ax = b$ então o conjunto das soluções do sistema é*

$$\{x' + u : u \in N(A)\}.$$

Demonstração. É evidente que qualquer elemento da forma $x' + u$ com $u \in N(A)$ é solução do sistema $Ax = b$ já que

$$A(x' + u) = Ax' + Au = b + 0 = b.$$

Reciprocamente, para x'' solução arbitrária do sistema $Ax = b$, faça-se

$$u = x'' - x'.$$

Então

$$Au = A(x'' - x') = Ax'' - Ax' = b - b = 0$$

o que significa que $u \in N(A)$. É claro que

$$x'' = x' + (x'' - x') = x' + u$$

e logo da forma pretendida.

2.4 Inversão de Matrizes

Dada uma matriz quadrada de ordem n, $A_{n\times n}$, pretendemos determinar uma matriz $X_{n\times n}$ tal que

$$AX = I_n = XA$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} A \times (\text{coluna } 1 \text{ de } X) & A \times (\text{coluna } 2 \text{ de } X) & \cdots & A \times (\text{coluna } n \text{ de } X) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

A determinação de X que satisfaça $AX = I_n$ é equivalente à resolução de n sistemas de equações lineares com a mesma matriz

$$\underbrace{Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \ , Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Estes sistemas podem ser resolvidos simultaneamente.}}$$

(2.4 a) <u>**Exemplo.**</u> Pretendemos determinar a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução. Por definição a matriz inversa da matriz dada, $\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$, deverá satisfazer a condição

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efectuando os passos do processo de eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

somos levados à resolução de dois sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Mas existe outro processo possível para a resolução simultânea dos sistemas (processo de eliminação ascendente). Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

multipliquemos (para anular o (1,2)-elemento da matriz) ambos os membros por $E_{12}(1)$. Obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1^{\neq 0} & 0 \\ 0 & -2^{\neq 0} \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mas esta matriz D é invertível. Logo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{\neq 0} & 0 \\ 0 & -2^{\neq 0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Atenção. Analisemos os passos efectuados. Temos

$$E_{12}(1)\ E_{21}(-3)A = D$$

donde

$$A = E_{21}(3)\ E_{12}(-1)\ D$$

e logo

$$A^{-1} = D^{-1}\ E_{12}(1)\ E_{21}(-3)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ & \\ 3 & 4 \end{matrix}}^{A} & & I_2 \end{array}\right] \underbrace{\downarrow}_{\text{Eliminação Descendente}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \underbrace{\uparrow}_{\text{Eliminação Ascendente}} \left[\begin{array}{c|c} I_2 & \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ & \\ 3/2 & -1/2 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right]$$

O Algoritmo de Gauss-Jordan para a Determinação da Inversa de uma Matriz

(2.4 b) <u>**Teorema.**</u> *Uma matriz quadrada A é invertível se e só se for não-singular.*

Demonstração. Mostremos que a condição é necessária, isto é, admitindo que a matriz A é invertível mostremos que é não-singular.

Uma vez que A é invertível então qualquer sistema $Ax = b$ (cuja matriz seja A) é possível e determinado já que

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

determina a solução (única)

$$x = A^{-1}b.$$

Mas então, necessariamente, A tem n pivots, ou seja, é não-singular.

Resta agora mostrar que a condição é suficiente, isto é, admitindo que a matriz A é não-singular mostremos que é invertível.

Representemos por E o produto de todas as matrizes elementares correspondentes aos passos elementares do processo de eliminação que permite determinar uma matriz diagonal D de elementos diagonais não-nulos. Então D satisfaz

$$EA = D.$$

Mas a matriz A é invertível porque é um produto de matrizes elementares que são invertíveis. Então

$$A = E^{-1}D$$

e logo A é invertível já que $E^{-1}D$ o é. (De facto, $A^{-1} = D^{-1}E$.)

ALGORITMO. *Cálculo da matriz inversa de uma dada matriz* $A_{n\times n}$

> Para calcular a matriz inversa de A (se existir) efectua-se na matriz do tipo $n \times 2n$, $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$ a parte descendente do método de eliminação de Gauss aplicado a A. Se houver um número de pivots inferior a n a matriz A não é invertível. Se houver n pivots usando-os pela ordem contrária à anteriormente usada, anulam-se com operações elementares todos os elementos acima da diagonal da matriz situada à esquerda. Finalmente, divide-se cada linha pelo respectivo pivot. No fim deste processo a matriz obtida é
>
> $$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right].$$

(2.4 c) <u>**Teorema.**</u> *(Unicidade da factorização $\mathcal{LU}$ no caso não-singular) Se A for não-singular a factorização $\mathcal{LU}$ de A (ou de PA) é única.*

Demonstração. Suponhamos que

$$PA = \mathcal{L}\mathcal{U}$$

$$PA = \mathcal{L}_1\mathcal{U}_1$$

com $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_1$ matrizes triangulares inferiores com elementos diagonais iguais a 1 e $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_1$ matrizes triangulares superiors com elementos diagonais não-nulos. Então

$$\mathcal{L}\mathcal{U} = \mathcal{L}_1\mathcal{U}_1$$

donde

$$\underbrace{\mathcal{L}_1^{-1}\ \mathcal{L}}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{triangular inferior}}} \quad = \quad \underbrace{\mathcal{U}_1\ \mathcal{U}^{-1}}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{triangular superior}}}$$

Como estas matrizes são iguais têm de ser diagonais e os elementos diagonais têm de ser iguais a 1 (porque são os do primeiro membro). Logo

$$\mathcal{L}_1^{-1}\ \mathcal{L} = I_n$$

$$\mathcal{U}_1\ \mathcal{U}^{-1} = I_n$$

ou seja

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}.$$

(2.4 d) <u>**Observações.**</u>

(I) No caso da matriz A ser singular ou rectangular a factorização $\mathcal{L}\mathcal{U}$ de A (ou de PA) pode não ser única. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}}$$

com A singular ($car\ A = 1$).

Também, por exemplo, para $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}'} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}.}$$

(II) Determinemos a solução do sistema

$$Ax = b$$

para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$; (ii) $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Resolução.

1) Comecemos por calcular a decomposição $\mathcal{LU}$ da matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}}$$

$$\begin{aligned} car\ A &= 2 \\ &= \text{ número de linhas não-nulas de } \mathcal{U} \\ &= \text{número de pivots de } A \end{aligned}$$

2) Resolvamos agora o sistema

$$\mathcal{L}y = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ 3y_1 + y_2 = 6 \\ y_1 + 1/2\, y_2 + y_3 = 4 \quad (= -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 12 \\ y_3 = 0 \quad (y_3 = -5) \end{cases}$$

3) Resolução do sistema $\mathcal{U}x = y$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left(= \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

Imediatamente no caso ii. o sistema é impossível. Continuando com a resolução da alínea i., as incógnitas básicas são x_1 e x_3 sendo as livres x_2 e x_4. Resolvamos então o sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -2 - x_2 - 2x_4 \\ -4x_3 = 12 + 4x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2 - x_2 - 2x_4 + 3 + x_4 \\ x_3 = -3 - x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_4 \\ x_3 = -3 - x_4 \end{cases}$$

Logo a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -3 - x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{solução particular de} \\ \text{de } Ax = b \text{ correspondente} \\ \text{a } x_2 = x_4 = 0}} + \underbrace{x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{solução geral de} \\ \text{de } Ax = 0 \\ \text{para } x_2, x_4 \text{ arbitrários}}}$$

2.5 Determinantes (algumas propriedades)

Pretendemos apresentar ainda outro critério de invertibilidade de matrizes. Ele vai aparecer como um corolário do seguinte facto.

(2.5 a) **<u>Teorema.</u>** *Para A matriz quadrada e $\mathcal{U}$ a matriz que se obtém de A por aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss temos*

$$det\ A = \pm\ det\, \mathcal{U}.$$

Demonstração. Verificámos anteriormente que o valor do determinante de uma matriz não se altera quando a uma linha adicionamos um múltiplo de outra linha (cf. (3) da Prop.(1.5j)). Mas tal significa que o valor do determinante de uma matriz não se altera com a *parte descendente* do algoritmo de eliminação de Gauss sempre que não haja troca de linhas. Neste caso, se o algoritmo transformar A na matriz $\mathcal{U}$ temos $det\ A = det\ \mathcal{U}$. Sempre que haja troca de linhas no algoritmo de eliminação aplicado a A temos $det\ A = det\, \mathcal{U}$ se o número de trocas for par e $det\ A = -det\, \mathcal{U}$ se o número de trocas for ímpar.

Nota. Este teorema fornece ainda um processo de cálculo de determinantes.

(2.5 b) **<u>Corolário.</u>** *Uma matriz quadrada A é invertível se e só se $det\ A \neq 0$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior temos $det\ A = \pm\ det\, \mathcal{U}$. Uma vez que $\mathcal{U}$ é triangular (superior) o $det\, \mathcal{U}$ é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal. No caso de A ser não-singular (que é equivalente a ser invertível) os elementos diagonais de $\mathcal{U}$ são os n pivots que se determinam quando se aplica o método de eliminação de Gauss a A e, portanto $det\ A = det\, \mathcal{U} \neq 0$.

Demonstremos a implicação recíproca, isto é, sempre que $det\ A \neq 0$ então A é invertível, mostrando a validade do respectivo contra-recíproco. Assim iremos admitir que A não é invertível e iremos mostrar que $det\, A = 0$. Sendo A não-invertível, isto é, sendo A singular, a característica de A é inferior à respectiva ordem. Então $\mathcal{U}$ tem pelo menos um elemento diagonal nulo e logo $det\, \mathcal{U} = 0$. Uma vez que $det\ A = \pm\ det\, \mathcal{U}$ temos $det\ A = 0$, conforme pretendido.

(2.5 c) **Teorema.** *Para A e B matrizes quadradas de ordem n*

$$det(AB) = det\ A\ det\ B.$$

Demonstração. Vamos efectuar uma demonstração por divisão do argumento em casos (referente a propriedades de B).

Caso 1. $det\ B = 0$

Então B é singular e portanto o sistema $Bx = 0$ tem soluções não-nulas. Seja v uma dessas soluções. Então $Bv = 0$. Multiplicando ambos os membros por A obtemos

$$ABv = 0.$$

Mas tal significa que também o sistema $ABx = 0$ tem soluções não-nulas o que significa que a matriz AB é também singular e portanto, $det\ (AB) = 0$. Logo

$$det\ (AB) = 0, \quad det\ A\ det\ B = (det\ A) \times 0 = 0$$

verificando-se a propriedade requerida.

Caso 2. $det\ B \neq 0$

Então a matriz B é não-singular e logo pode escrever-se como produto de matrizes elementares (Recordemos que existe E matriz produto de matrizes elementares tal que $EB = D$ ou ainda, $B = E^{-1}D$ ambas produto de elementares). Imediatamente, para $B = E_k\ E_{k-1}\ ...\ E_1$ matrizes elementares temos, atendendo à alínea (ii) do último exercício do primeiro capítulo,

$$\begin{aligned} det\ (AB) &= det\ (A\ E_k\ E_{k-1}\ ...\ E_1) \\ &= det\ (A\ E_k\ E_{k-1}\ ...\ E_2)\ det\ E_1 \\ &... \\ &= det\ A\ det\ E_k\ det\ E_{k-1}\ ...\ det\ E_1 \\ &... \\ &= det\ A\ det(E_k\ ...E_1) \\ &= det\ A\ det\ B. \end{aligned}$$

(2.5 d) **Corolário.** *Para A matriz quadrada invertível tem-se*

$$det\ (A^{-1}) = \frac{1}{det\ A}.$$

Demonstração. De $A\,A^{-1} = I$ vem, usando o teorema anterior,

$$det\ A\ det\ A^{-1} = 1$$

donde o requerido.

(2.5 e) **Proposição.** *Para P matriz de permutação tem-se*

$$det(P^T) = det\ P.$$

Demonstração. Uma vez que ambas as matrizes P e P^T são matrizes de permutação, o determinante de cada uma delas é igual a 1 ou igual a -1. Mas como a inversa de uma matriz de permutação é a respectiva transposta temos $P\,P^T = I$. Imediatamente $det\ P\ det\ P^T = 1$. Logo $det\ P$ e $det\ P^T$ são ambos iguais a 1 ou ambos iguais a -1.

(2.5 f) **Teorema.** *Para A matriz quadrada tem-se*

$$det\ A^T = det\ A.$$

Demonstração. Apliquemos à matriz A o algoritmo de eliminação de Gauss.

Suponhamos que não há necessidade de efectuarmos trocas de linhas.
Então temos

$$A = \mathcal{L}\mathcal{U}$$

$$det\ A = det\,\mathcal{U}.$$

Quanto à transposta temos

$$A^T = \mathcal{U}^T\ \mathcal{L}^T$$

donde

$$det\ A^T = det\,\mathcal{U}^T\ det\ \mathcal{L}^T = det\,\mathcal{U}^T$$

pois $det\ \mathcal{L}^T = 1$ porque $\mathcal{L}^T$ é triangular com todos os elementos diagonais iguais a 1. Mas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^T$ têm os mesmos elementos diagonais. Logo $det\,\mathcal{U}^T = det\,\mathcal{U}$.

Mostremos agora que o mesmo acontece caso haja necessidade de efectuarmos trocas de linhas.

Neste caso temos

$$PA = \mathcal{L}\mathcal{U}.$$

Então, pelo teorema (2.5c),

$$det\ P\ det\ A = det\ \mathcal{L}\ det\ \mathcal{U}$$

$$det\ A = det\ P^{-1}\ det\ \mathcal{U}.$$

Agora para as transpostas, de

$$PA = \mathcal{L}\mathcal{U}$$

vem

$$A^T\ P^T = \mathcal{U}^T\ \mathcal{L}^T$$

$$det\ A^T\ det\ P^T = det\ \mathcal{U}^T\ det\ \mathcal{L}^T$$

$$det\ A^T\ det\ P = det\ \mathcal{U}^T.$$

Pela proposição anterior $det\ P^T = det\ P$ e $det\ \mathcal{U}^T = det\ \mathcal{U}$ já que têm os mesmos elementos diagonais. Assim,

$$det\ A^T = det\ P^{-1}\ det\ \mathcal{U}$$

donde

$$det\ A = det\ A^T.$$

Observação. Atendendo ao teorema ($2.5f$) todas as propriedades de determinantes que são válidas para linhas são também válidas para colunas.

A regra de Cramer

Recordemos que, para $A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{n\times n}$ e $i, j = 1, ..., n$ chamamos complemento algébrico de um elemento a_{ij} de A a

$$(-1)^{i+j}\ det\ A_{ij}$$

onde A_{ij} designa a $(n-1)\times(n-1)$-submatriz de A obtida por supressão da linha i e da coluna j.

(2.5 g) **Definição.**

Para $A = \left[\; a_{ij} \; \right]_{n\times n}$ designamos por $\tilde{A}$ a matriz dos complementos algébricos dos elementos de A,

$$\tilde{A} = \left[\; (-1)^{i+j} \; det \; A_{ij} \; \right]_{n\times n}.$$

À matriz $\tilde{A}^T$ chamamos m*atriz adjunta* de A.

(2.5 h) **Exemplo.** A matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é
$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

(2.5 i) **Exemplo.** A matriz adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
é

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23} & \cdots & \cdots \\ -a_{21}\,a_{33} + a_{31}\,a_{23} & \cdots & -a_{11}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21} \\ a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

(Os elementos não apresentados são facilmente calculados.)

(2.5 j) **Teorema.** *Para A matriz quadrada de ordem n*

$$A\,\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} det\;A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & det\;A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & det\;A \end{bmatrix} = (det\;A)I_n.$$

Demonstração. É deixada como exercício.

(2.5 k) **Corolário.** *Para A matriz invertível*

$$A^{-1} = \frac{1}{det\;A}\,\tilde{A}^T.$$

Demonstração. Pelo corolário anterior temos

$$A\ \tilde{A}^T = (det\ A)\ I_n.$$

Sendo A invertível, $det\ A \neq 0$, e podemos escrever

$$A\ \underbrace{\frac{1}{det\ A}\ \tilde{A}^T}\ = I_n$$

e logo
$$\frac{1}{det\ A}\ \tilde{A}^T = A^{-1}.$$

Nota. Este corolário fornece um método de construção da inversa de uma matriz.

(**2.5 l**) <u>**Teorema.**</u> ***(Regra de Cramer)***
Para $A_{n\times n}$ martiz invertível a solução única do sistema $Ax = b$ é a coluna cujos elementos são os quocientes

$$\frac{det\ A(i)}{det\ A},\ i = 1, ..., n$$

onde $A(i)$ é a matriz que se obtém de A substituindo a coluna i por b.

(**2.5 m**) <u>**Exemplo.**</u> Sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ invertível e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ a solução do sistema $Ax = b$ é o elemento (x_1, x_2) dado por

$$x_1 = \frac{det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}\ ,$$

$$\left\{ \left(\frac{det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{detA}\ ,\ \frac{det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{detA} \right) \right\}.$$