Análise Infinitesimal I

Maria Manuel Clementino, 2010/11

Sumários Alargados

Capítulo I: Fundamentos – o Rigor e a Demonstração em Análise

1. Operadores lógicos e quantificadores

Recomenda-se a leitura de:

Capítulos 0 e 1 de: J. Lewin/M. Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis*;

Capítulo 1 de: M. T. Oliveira-Martins, *Tópicos de Matemática Finita*;

Capítulos 1 e 2 de: R. Pereira Coelho, *Lições de Análise Infinitesimal*.

2. Conjuntos

Para as Secções 2-6, recomenda-se a leitura de:

Capítulos 1 e 2 do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1.*

Capítulo 3 do livro de J. Lewin/M. Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis.*

2.1. Definição. Um *conjunto* X é uma colecção de objectos, a que chamamos *elementos* de X. Se x é um elemento de X, dizemos que x *pertence a* X e escrevemos $x \in X$.

2.2. Definição. Se todo o elemento de X pertencer a Y, isto é, se

$$\forall x \;\; x \in X \;\Rightarrow\; x \in Y,$$

dizemos que o conjunto X é um *subconjunto de* Y, ou uma *parte de* Y, ou que X *está contido em* Y, e escrevemos $X \subseteq Y$.

Dois *conjuntos* X e Y serão *iguais* se e só se tiverem exactamente os mesmos elementos; logo

$$X = Y \;\Leftrightarrow\; X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq X.$$

Se $X \subseteq Y$ mas $X \neq Y$ (isto é, se existir um elemento y de Y que não pertence a X), dizemos que X *está estritamente contido em* Y, ou que X *é uma parte própria de* Y e escrevemos $X \subset Y$.

Por exemplo,

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;

para todo o conjunto X, $\emptyset \subseteq X$.

2.3. Definição. Dado um conjunto X, designa-se por $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto das partes de* X:

$$\mathcal{P}(X) = \{A\,;\, A \subseteq X\}.$$

2.4. Exemplos.

1. Note-se que se tem sempre $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$.
2. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ é um conjunto singular, cujo único elemento é $\emptyset$.
3. Se $X = \{1, 2, 3\}$, então $\mathcal{P}(X)$ tem 8 elementos:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

2.5. Definições. Dados dois subconjuntos A e B de X, a sua *reunião* é o conjunto

$$A \cup B = \{x \in X\,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\};$$

a sua *intersecção* é o conjunto

$$A \cap B = \{x \in X\,;\, x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são *conjuntos disjuntos*.

2.6. Propriedades da reunião e da intersecção. Se A, B, C, D são subconjuntos de um conjunto X, então:

$$\begin{array}{ll}
A \subseteq A \cup B & A \cap B \subseteq A \\
A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \cup A = A & A \cap A = A \\
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A & A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \\
A \subseteq B \text{ e } C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D & A \subseteq B \text{ e } C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{array}$$

2.7. Exercício. Demonstre as propriedades enunciadas.

2.8. Definição. Dados subconjuntos A e B de um conjunto X, a *diferença entre A e B* é o conjunto

$$A - B = \{x \in X\,;\, x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Chamamos *complementar de A* ao conjunto $X - A$, que também designamos por $X \setminus A$ ou A^c.

2.9. Propriedades do complementar. Se A e B são subconjuntos de X, então:

$$\begin{array}{ll}
A^c = \emptyset \Leftrightarrow A = X & A^c = X \Leftrightarrow A = \emptyset \\
(A^c)^c = A & \\
(A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.
\end{array}$$

2.10. Definição. Dados conjuntos X e Y, podemos formar o conjunto

$$X \times Y = \{(x, y)\,;\, x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

A $X \times Y$ chama-se *produto cartesiano de X e Y*; cada elemento (x, y) de $X \times Y$ chama-se *par ordenado*, sendo x a *primeira coordenada* e y a *segunda coordenada*.

Note-se que $(x, y) = (a, b)$ se e só se $x = a$ e $y = b$.

2.11. Observação. Se $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$.

3. Funções

3.1. Definição. Uma *função* $f : A \to B$ é constituída por:

- um conjunto A, a que se chama *domínio de* f, e que se designa habitualmente por D_f,
- um conjunto B, a que se chama *conjunto de chegada de* f, e
- uma lei de correspondência, que permite associar a cada elemento x de A um (único) elemento $f(x)$ de B; a $f(x)$ chama-se o *valor de* f *em* x.

Duas *funções* $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são *iguais* se $A = C$, $B = D$ e

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x).$$

3.2. Definição. O *gráfico de* $f : A \to B$ é o subconjunto do produto cartesiano de A e B

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B\,;\, y = f(x)\},$$

que também se costuma designar por $\Gamma(f)$.

3.3. Definições. Uma *função* $f : A \to B$ diz-se:

- *injectiva* se
$$\forall x \in A \ \ \forall x' \in A \ \ f(x) = f(x') \ \Rightarrow \ x = x',$$
o que é equivalente a
$$\forall x \in A \ \ \forall x' \in A \ \ x \neq x' \ \Rightarrow \ f(x) \neq f(x');$$
isto é, a elementos diferentes f atribui valores diferentes;
- *sobrejectiva* se
$$\forall y \in B \ \ \exists x \in A \ \ : \ \ f(x) = y;$$
isto é, todo o elemento do conjunto de chegada é imagem por f de algum elemento do domínio;
- *bijectiva* se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva; isto é,
$$\forall y \in B \ \ \exists^1 x \in A \ \ : \ \ f(x) = y.$$

3.4. Definições. Dada uma função $f : A \to B$, para cada subconjunto X de A podemos considerar o seguinte subconjunto de B

$$f(X) = \{f(x)\,;\, x \in X\},$$

e para cada subconjunto Y de B podemos considerar o subconjunto de A

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A\,;\, f(x) \in Y\}.$$

Estas correspondências definem duas funções entre os conjuntos de partes de A e de B:

$$\begin{array}{rcl} f(\ ) : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & f(X) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} f^{-1}(\ ) : \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(A) \\ Y & \mapsto & f^{-1}(Y). \end{array}$$

A $f(\ )$ chamamos *função imagem directa de* f e a $f^{-1}(\ )$ chamamos *função imagem inversa de* f.

3.5. Propriedades das funções imagem directa e imagem inversa. Se $f : A \to B$ é uma função e X, X' são subconjuntos de A e Y, Y' são subconjuntos de B, então:

$$\begin{array}{ll}
f(\emptyset) = \emptyset & f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\
f(A) \subseteq B & f^{-1}(B) = A \\
X \subseteq X' \Rightarrow f(X) \subseteq f(X') & Y \subseteq Y' \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y') \\
f(X \cup X') = f(X) \cup f(X') & f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y') \\
f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X') & f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y') \\
 & f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c.
\end{array}$$

3.6. Definição. Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são funções com $B = C$ (isto é, o domínio de g coincide com o conjunto de chegada de f), define-se a *função composição*

$$\begin{array}{rcl}
g \circ f : A & \to & D \\
x & \mapsto & (g \circ f)(x) := g(f(x)).
\end{array}$$

3.7. Proposição. *A composição de duas funções injectivas (respectivamente sobrejectivas; bijectivas) é uma função injectiva (respectivamente sobrejectiva; bijectiva).*

3.8. Proposição. *A atribuição das imagens directas e das imagens inversas preserva a composição de funções; isto é, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então a função imagem directa de $g \circ f$ é a composição das funções imagem directa de f e de g, e analogamente para as funções imagem inversa:*

$$(g \circ f)(\ ) = g(\ ) \circ f(\ ) \qquad e \qquad (g \circ f)^{-1}(\ ) = f^{-1}(\ ) \circ g^{-1}(\ ).$$

3.9. Definições.

1. Se X é um subconjunto de A, chama-se *restrição de $f : A \to B$ a X* à função $g : X \to B$ definida por $g(x) = f(x)$ para todo o $x \in X$. Denota-se por vezes por $f_{|X}$.

2. Se $f : A \to B$ e $g : X \to B$ são funções tais que $X \subseteq A$ e, para todo o $x \in X$, $f(x) = g(x)$, diz-se que f *é uma extensão de g*.

3.10. Observação. Note-se que a restrição de uma função a um subconjunto dado é única, enquanto que cada função tem diversas extensões a todo o conjunto que contém o domínio. Por exemplo, as funções

$$\begin{array}{rcl}
f : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}, \\
x & \mapsto & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
x & \mapsto & 0
\end{array}
\quad \text{e} \quad
\begin{array}{rcl}
h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
x & \mapsto & \sin(\pi x)
\end{array}$$

são diferentes extensões da função

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{N} & \to & \mathbb{R}. \\
x & \mapsto & 0
\end{array}$$

3.11. Definições. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ duas funções.

1. A função g diz-se *inversa à esquerda de f* se $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Neste caso, f diz-se *inversa à direita de g*.

2. A função g diz-se *inversa de f* se $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

3.12. Proposição. *Seja $f : A \to B$ uma função.*

1. *Se $A \neq \emptyset$, então f tem inversa à esquerda se e só se é injectiva.*

2. *A função f tem inversa à direita se e só se é sobrejectiva.*

3. *f tem função inversa se e só se é bijectiva. Nesse caso a inversa de f é única.*

4. Famílias

4.1. Definição. Dados conjuntos L e X, uma *família* de elementos de X indexada por L é uma função

$$\begin{array}{rcl} x : L & \to & X \\ \lambda & \mapsto & x_\lambda, \end{array}$$

que habitualmente designamos por $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

4.2. Exemplos.

1. Famílias definidas por $L = \{1, 2\}$ não são mais do que *pares ordenados*. Podemos pois identificar $X \times X$ com o conjunto das famílias de elementos de X indexadas por $\{1, 2\}$.

2. Se $L = \{1, 2, \cdots, n\}$, uma família $L \to X$ diz-se um *n-uplo de elementos de X*, e denota-se por $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

3. Para o caso de L ser infinito, obtemos como caso particular importante $L = \mathbb{N}$, sendo então uma família no conjunto X exactamente uma *sucessão* em X.

4.3. Definições. Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X (isto é, uma função $a : L \to \mathcal{P}(X)$ com $a(\lambda) = A_\lambda$), podemos definir a sua *reunião*

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda := \{x \in X \,;\, \exists \lambda \in L \;:\; x \in A_\lambda\},$$

e a sua *intersecção*

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda := \{x \in X \,;\, \forall \lambda \in L \quad x \in A_\lambda\}.$$

4.4. Exercício. Enuncie e demonstre as propriedades da reunião e intersecção de famílias tendo por base as propriedades enunciadas em 2.6.

4.5. Definição. Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos, definimos o seu produto cartesiano

$$\prod_{\lambda \in L} A_\lambda := \{(a_\lambda)_{\lambda \in L} \,;\, \forall \lambda \in L \quad a_\lambda \in A_\lambda\},$$

onde cada $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família; isto é,

$$\prod_{\lambda \in L} A_\lambda := \{a : L \to \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \,;\, a \text{ é uma função e } \forall \lambda \in L \quad a(\lambda) \in A_\lambda\}.$$

5. Relações de ordem

5.1. Definição. Dados conjuntos X e Y, uma *relação binária* de X em Y é um subconjunto de $X \times Y$. Dada uma relação $\rho \subseteq X \times Y$, escrevemos indiferentemente $(x, y) \in \rho$ ou $x\rho y$.

Se $X = Y$, dizemos apenas que ρ é uma *relação binária em* X. Isto é, uma relação binária em X é um subconjunto de $X \times X$.

5.2. Exemplo. Se $f : X \to Y$ é uma função, então o gráfico de f (definido em 3.2.) é uma relação binária de X em Y.

5.3. Exercício. Identifique as relações binárias de X em Y que são gráficos de funções.

5.4. Definições. Se ρ é uma relação binária num conjunto X, diz-se que:

1. ρ é *reflexiva* se
$$\forall x \in X \quad x\rho x;$$

2. ρ é *simétrica* se
$$\forall x, y \in X \quad x\rho y \;\Rightarrow\; y\rho x;$$

3. ρ é *anti-simétrica* se
$$\forall x, y \in X \quad x\rho y \text{ e } y\rho x \;\Rightarrow\; x = y;$$

4. ρ é *transitiva* se
$$\forall x, y, z \in X \quad x\rho y \text{ e } y\rho z \;\Rightarrow\; x\rho z.$$

5.5. Definição. Uma relação binária que seja simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma *relação de equivalência*. Dados uma relação de equivalência ρ em X e um elemento x de X, chama-se *classe de equivalência de x, relativamente a ρ*, ao conjunto

$$\{x' \in X \,;\, x\rho x'\}.$$

5.6. Definições.

1. Uma *relação de ordem* (ou *relação de ordem parcial*) é uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Se ρ é uma relação de ordem parcial no conjunto X, ao par (X, ρ) chama-se *conjunto parcialmente ordenado*.

2. Uma *relação de ordem* ρ em X diz-se *total* se
$$\forall x, y \in X \quad x\rho y \quad \text{ou} \quad y\rho x.$$
O par (X, ρ) diz-se então um *conjunto totalmente ordenado* ou *cadeia*.

5.7. Exemplos.

1. Em $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, a relação definida por $x\rho y$ se $xy > 0$ é uma relação de equivalência.

2. Em $\mathbb{Q}$, a relação definida por $x\rho y$ se $[x] = [y]$, onde $[a]$ é o maior inteiro menor ou igual a a, é uma relação de equivalência.

3. O par $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, isto é, a relação $\leq$ é uma relação de ordem total em $\mathbb{N}$.

4. De modo análogo, $(\mathbb{Q}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado.

5. Para todo o conjunto X, a relação de inclusão $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto $\mathcal{P}(X)$. Note-se que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ não é em geral totalmente ordenado.

6. A relação
$$x\rho y \quad \text{se} \ \ x \text{ divide } y$$
é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$.

5.8. Definições. Sejam $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, A um subconjunto de X e x um elemento de X. Diz-se que:

1. x é *minorante* de A se
$$\forall a \in A \quad x \leq a.$$

2. $x_0 \in X$ é *ínfimo* de A se for o maior dos minorantes de A; isto é,
$$\forall x \in X \ (x \text{ é minorante de } A \ \Leftrightarrow \ x \leq x_0),$$
ou ainda
$$\forall x \in X \ ((\forall a \in A \ \ x \leq a) \ \Leftrightarrow \ x \leq x_0).$$

3. x é elemento *mínimo* de A se for ínfimo de A e pertencer a A, ou, equivalentemente, se for minorante de A e pertencer a A.

De modo análogo, diz-se que:

1. x é *majorante* de X se
$$\forall a \in A \quad a \leq x.$$

2. $x_1 \in X$ é *supremo* de A se for o menor dos majorantes de A; isto é,
$$\forall x \in X \ (x \text{ é majorante de } A \ \Leftrightarrow \ x_1 \leq x),$$
ou ainda
$$\forall x \in X \ ((\forall a \in A \ \ a \leq x) \ \Leftrightarrow \ x_1 \leq x).$$

3. x é elemento *máximo* de A se for supremo de A e pertencer ou A, o que é equivalente a ser majorante de A e pertencer a A.

Observação. Quando existe, o mínimo (respectivamente ínfimo; máximo; supremo) de A é único.

5.9. Definição. Um *conjunto* parcialmente ordenado $(X, \leq)$ diz-se *bem ordenado* se todo o subconjunto não vazio de X tiver mínimo.

O Princípio da Boa Ordenação dos números naturais garante-nos que $(\mathbb{N}, \leq)$ é bem ordenado.

6. Conjuntos finitos e infinitos

6.1. Definição. Dois *conjuntos* X e Y dizem-se *numericamente equivalentes* se existir uma bijecção $X \to Y$, e escreve-se $X \sim Y$.

6.2. Definição. Diz-se que o *conjunto* X *é numericamente inferior ou igual ao conjunto* Y, ou que *o cardinal de* X *é menor ou igual ao o cardinal de* Y se existir uma função injectiva de X em Y. Neste caso escreveremos $X \leq^\sharp Y$.

6.3. Proposição. *Se X, Y e Z são conjuntos, então:*

(1) $X \leq^\sharp X$;

(2) $X \leq^\sharp Y$ e $Y \leq^\sharp X \;\Rightarrow\; X \sim Y$;

(3) $X \leq^\sharp Y$ e $Y \leq^\sharp Z \;\Rightarrow\; X \leq^\sharp Z$.

A propriedade (2) segue do seguinte resultado.

6.4. Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder. *Se existirem funções injectivas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$, então existe uma bijecção $X \to Y$.*[1]

6.5. Definições. Um *conjunto* X diz-se *finito* se for vazio ou for numericamente equivalente a $\{1, 2, \cdots, n\}$ para algum número natural n. Diz-se neste caso que X tem n elementos, ou que X tem cardinal n.

Um *conjunto* diz-se *infinito* se não for finito.

6.6. Definição. Um *conjunto* diz-se *numerável* se for finito ou numericamente equivalente a $\mathbb{N}$. Caso contrário, diz-se *não numerável*.

6.7. Proposição. *Se $X \subseteq \mathbb{N}$, então X é finito ou numericamente equivalente a $\mathbb{N}$. Logo, um conjunto é numerável se e só se é numericamente equivalente a uma parte de $\mathbb{N}$ (se e só se é numericamente inferior ou igual a $\mathbb{N}$).*

6.8. Proposição. *Seja $f : X \to Y$ uma função.*

1. *Se f for injectiva e Y for numerável, então X é numerável.*

2. *Se f for sobrejectiva e X for numerável, então Y é numerável.*

[1] Pode consultar a demonstração deste resultado no livro de P.R. Halmos, *Naive Set Theory*.

6.9. Corolário.

1. *O conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é numerável.*
2. *O produto cartesiano de dois conjuntos numeráveis é numerável.*
3. $\mathbb{Q}$ *é numerável.*
4. *A reunião de uma família numerável de conjuntos numeráveis é numerável.*

6.10. Teorema. *O cardinal de* $\mathbb{N}$ *é menor ou igual ao cardinal de qualquer conjunto infinito.*

6.11. Proposição. *Dado um conjunto* X*, o conjunto* $\mathcal{P}(X)$ *das suas partes é numericamente equivalente ao conjunto das funções de* X *em* $\{0,1\}$*.*

6.12. Corolário. *Se* X *tem* n *elementos, então* $\mathcal{P}(X)$ *tem* 2^n *elementos.*

6.13. Teorema de Cantor. *Se* X *for um conjunto arbitrário e* Y *for um conjunto com pelo menos dois elementos, então o cardinal de* X *é estritamente inferior ao do conjunto* $\mathcal{F}(X;Y)$ *das funções de* X *em* Y*; isto é, não existe uma função sobrejectiva de* X *em* $\mathcal{F}(X;Y)$*.*

6.14. Corolário.

1. *O produto cartesiano de uma família indexada por* $\mathbb{N}$ *de conjuntos infinitos numeráveis não é numerável.*
2. *Todo o conjunto tem cardinal estritamente inferior ao cardinal do conjunto das suas partes.*
3. *O conjunto das partes de* $\mathbb{N}$ *não é numerável.*

6.15. Exercícios.

1. Prove que, se X é um conjunto infinito numerável, então o conjunto das partes finitas de X também é infinito numerável.
2. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(1,n) = 2n-1$ e $f(m+1,n) = 2^m \cdot (2n-1)$. Prove que f é uma bijecção.
3. Defina uma função sobrejectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.

7. A recta real

7.1. Subconjuntos de $\mathbb{R}$. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$.

1. X diz-se *limitado superiormente* se tiver um majorante em $\mathbb{R}$; isto é, se existir $b \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in X$, $x \leq b$.
2. X diz-se *limitado inferiormente* se tiver minorante em $\mathbb{R}$;
3. X diz-se *limitado* se for limitado superior e inferiormente;

4. X diz-se um intervalo se tiver a seguinte propriedade:

$$\forall a, b \in X \;\; \forall c \in \mathbb{R} \;\; a \leq c \leq b \;\Rightarrow\; c \in X.$$

Um intervalo X pode escrever-se numa das formas, com $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\} &]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leq b\} \\ [a,b[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x < b\} & [a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x\} \\ ]a,+\infty\,[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x\} &]-\infty,b\,] & = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq b\} \\ ]-\infty,b\,[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < b\} &]-\infty,+\infty\,[& = & \mathbb{R} \end{array}$$

7.2. Algumas propriedades de $\mathbb{R}$.

Completude: Todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.

Propriedade Arquimediana: $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.

7.3. Proposição.

As seguintes condições equivalem-se:

(i) $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) *para cada par a, b de números reais com $a > 0$, existe um número natural n tal que $na > b$;*

(iii) *para cada $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

7.4. Teorema.

1. *$\mathbb{R}$ é numericamente equivalente a qualquer intervalo não degenerado.*
2. *$\mathbb{R}$ é numericamente equivalente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

7.5. Definições.

Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.

1. O ponto x diz-se *ponto interior de* X se existir um intervalo aberto $]a,b[$ tal que $x \in\,]\,a,b\,[\, \subseteq X$. O conjunto dos pontos interiores de X chama-se *interior* de X e denota-se por $\overset{\circ}{X}$.
2. x diz-se *ponto aderente de* X se todo o intervalo aberto ao qual x pertença intersectar X. Ao conjunto dos pontos aderentes de X chama-se *aderência* ou *fecho* de X e designa-se por $\overline{X}$.
3. O conjunto X diz-se *aberto* se todo o seu ponto for interior.
4. O conjunto X diz-se *fechado* se o seu complementar em $\mathbb{R}$ for aberto.

7.6. Lema.

Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.

1. *x é ponto interior de X se e só se existir $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq X$.*
2. *x é ponto aderente de X se e só se, para todo o $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \cap X \neq \emptyset$.*

7.7. Exemplos.

Todo o intervalo aberto (resp. fechado) é um subconjunto aberto (resp. fechado) de $\mathbb{R}$; nomeadamente, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, $]a,+\infty[$ é aberto e $[a,+\infty[$ é fechado.

Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

7.8. Lema.

1. *A intersecção de dois abertos é um aberto.*

2. *A reunião de uma família qualquer de abertos é aberta.*

3. *Um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *é aberto se e só se é reunião de intervalos abertos.*

7.9. Exercício. Prove que a reunião de dois fechados é fechada e que a intersecção de uma família qualquer de fechados é fechada.

7.10. Lema. *As únicas partes de* $\mathbb{R}$ *que são simultaneamente fechadas e abertas são* $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}$.

7.11. Proposição. *Um subconjunto* X *de* $\mathbb{R}$ *é fechado se e só se coincide com o seu fecho.*

7.12. Definição. Um *subconjunto* X de $\mathbb{R}$ diz-se *denso* se o conjunto dos seus pontos aderentes for $\mathbb{R}$, isto é, se $\overline{X} = \mathbb{R}$.

7.13. Proposição. $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *são subconjuntos densos de* $\mathbb{R}$.

7.14. Definição. Um ponto x diz-se *ponto de acumulação de* $X \subseteq \mathbb{R}$ se todo o intervalo aberto ao qual x pertença intersectar $X \setminus \{x\}$.

7.15. Lema. *Se um subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *tiver supremo* s *tal que* $s \notin A$, *então* s *é ponto de acumulação de* A.

7.16. Proposição. *Dados* $X \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}$, *as seguintes afirmações equivalem-se:*

(i) x *é ponto de acumulação de* X*;*

(ii) *para todo o* $\varepsilon > 0$, *o conjunto* $X \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ *contém algum ponto diferente de* x*;*

(iii) *para todo o* $\varepsilon > 0$, *o conjunto* $X \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ *é infinito.*

7.17. Corolário. *Se* A *é um subconjunto finito de* $\mathbb{R}$, *então* A *não tem pontos de acumulação.*

7.18. Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Todo o subconjunto infinito limitado de* $\mathbb{R}$ *tem algum ponto de acumulação.*

Capítulo II: Limites

Para o estudo de limites, recomenda-se a leitura de:

Capítulo 12 do livro de James Stewart, *Calculus*, Vol. II.

Capítulo 4, Parágrafos 1-6 e Capítulo 6, Parágrafos 1-4, do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1.*

8. Limites de sucessões

8.1. Definições. Uma *sucessão* num conjunto X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$; é habitual designar-se a imagem $x(n)$ por x_n – a que se chama *termo de ordem n da sucessão* – e a própria sucessão por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou apenas por (x_n).

Chama-se *subsucessão* da sucessão $x : \mathbb{N} \to X$ uma sucessão que se obtenha como composição de x com uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo o par de números naturais j, k, se $j < k$ então $\varphi(j) < \varphi(k)$.

De agora em diante vamos falar apenas de sucessões de números reais, isto é, de sucessões em $\mathbb{R}$.

8.2. Definição. Uma sucessão (x_n) de números reais diz-se *limitada superiormente* (resp. *limitada inferiormente*, *limitada*) se o conjunto das suas imagens $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto limitado superiormente (resp. limitado inferiormente, limitado) em $\mathbb{R}$.

8.3. Definições. Uma sucessão (x_n) em $\mathbb{R}$ diz-se:

1. *estritamente crescente* se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$;
2. *crescente* (*em sentido lato*) se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$;
3. *estritamente decrescente* se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$;
4. *decrescente* (*em sentido lato*) se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n+1}$.

A sucessão (x_n) diz-se *monótona* se tiver uma das propriedades anteriores.

8.4. Definição. Diz-se que um número real a é *limite* da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq p \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Neste caso diz-se que (x_n) *converge para a*. Este limite é único (como se prova no teorema seguinte), logo, escrever-se-á $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$ quando (x_n) convergir para a.

Em geral, se (x_n) tiver algum limite em $\mathbb{R}$, diz-se que (x_n) é uma *sucessão convergente.*

Se uma *sucessão* não for convergente, diz-se *divergente.*

8.5. Teorema: Unicidade do limite. *Uma sucessão de números reais tem no máximo um limite em $\mathbb{R}$.*

8.6. Teorema. *Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a se e só se toda a sua subsucessão converge para a.*

8.7. Proposição. *Toda a sucessão convergente é limitada.*

8.8. Teorema. *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

8.9. Proposição. *Se (x_n) é uma sucessão que converge para $a > 0$, então*

$$\exists p \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq p \ \Rightarrow \ x_n > 0.$$

8.10. Proposição. *Se (x_n) é uma sucessão limitada e (y_n) é uma sucessão que converge para 0, então a sucessão $(x_n y_n)$ converge para 0.*

8.11. Lema. *Se (x_n) é uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ se e só se $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.*

8.12. Teorema. *Se (x_n) e (y_n) são sucessões convergentes, para a e b respectivamente, então:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$;

(4) *se (y_n) não tiver termos nulos e $b \neq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.*

8.13. Teorema das sucessões enquadradas. *Se (x_n), (y_n) e (z_n) são sucessões tais que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n \leq y_n \leq z_n,$$

e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, então $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

8.14. Corolário. *Se (x_n) e (y_n) são sucessões convergentes e tais que $x_n \leq y_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Em particular, se (x_n) é uma sucessão convergente que só toma valores iguais ou inferiores a um número real a, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq a$.*

8.15. Definições. Seja (x_n) uma sucessão divergente.

1. Diz-se que (x_n) *tende para* $+\infty$ (ou *diverge para* $+\infty$), e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, se

$$\forall r > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq p \ \Rightarrow \ x_n > r.$$

2. Diz-se que (x_n) *tende para* $-\infty$ (ou *diverge para* $-\infty$), e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, se

$$\forall r > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq p \ \Rightarrow \ x_n < -r.$$

3. Diz-se que (x_n) *tende para* ∞ (ou *diverge para* ∞) se a sucessão $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ divergir para $+\infty$, e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; isto é, se

$$\forall r > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq p \ \Rightarrow \ |x_n| > r.$$

8.16. Teorema. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sucessões de números reais.*

(1) *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente, então* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

(2) *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente por um número real* $c > 0$*, então* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = +\infty$.

(3) *Se* (x_n) *não tiver nenhum termo igual a* 0*, então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$ *se e só se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

8.17. Definição. Um número real a diz-se *valor de aderência* (ou *ponto de acumulação*) da sucessão (x_n) se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; m \geq n \;\wedge\; x_m \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[.$$

8.18. Proposição. *Se* (x_n) *é uma sucessão e* $a \in \mathbb{R}$*, as seguintes condições equivalem-se:*

(i) a *é valor de aderência de* (x_n)*;*

(ii) *existe uma subsucessão de* (x_n) *que converge para* a.

8.19. Corolário. *Toda a sucessão convergente tem um único valor de aderência, o seu limite.*

8.20. Proposição. *Toda a sucessão limitada tem um valor de aderência.*

8.21. Corolário. *Toda a sucessão limitada tem uma subsucessão convergente.*

8.22. Teorema: Critério de convergência de Cauchy. *Uma sucessão* (x_n) *de números reais é convergente se e só se*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} \; : \; \forall m, n \in \mathbb{N} \;\; m \geq p \;\wedge\; n \geq p \;\Rightarrow\; |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

8.23. Teorema. *Seja* X *um subconjunto de* $\mathbb{R}$*. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) X *é fechado e limitado;*

(ii) *Todo o subconjunto infinito de* X *tem um ponto de acumulação que pertence a* X*;*

(iii) *Toda a sucessão com valores em* X *tem um valor de aderência que pertence a* X.

9. Limites de funções

Ao longo deste parágrafo $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função cujo domínio X é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de X. (De agora em diante denotaremos o conjunto de pontos de acumulação de X por X'.)

9.1. Definição. Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X, dizemos que o número real L *é o limite de $f(x)$ quando x tende para a*, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; \forall x \in X \;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Note-se que, tal como para sucessões, o limite de $f(x)$ quando x tende para um ponto a, quando existe, é único.)

9.2. Proposição. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $Y \subseteq X$, a um ponto de acumulação de Y e $\lim_{x\to a} f(x) = L$. A restrição de f a Y, $g : Y \to \mathbb{R}$, com $g(y) = f(y)$ para todo o $y \in Y$, ainda tem limite L quando y tende para a.*

9.3. Observação. Note que o recíproco da proposição anterior não é válido, embora a existência de limite possa ser garantida à custa da existência de limite para uma restrição, desde que o domínio desta contenha $X \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ para algum $\varepsilon > 0$.

9.4. Teorema. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O limite de $f(x)$ quando x tende para a é L.*

(ii) *Qualquer que seja a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $X \setminus \{a\}$ com limite a, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

9.5. Teorema. *Se existe $\lim_{x\to a} f(x)$, então f é limitada numa vizinhança de a; isto é,*

$$\exists A > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; : \forall x \in X \;\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| < A.$$

9.6. Teorema. *Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$. Se, para todo o elemento x de X diferente de a, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim_{x\to a} g(x) = L$.*

9.7. Proposição.

(1) *Se $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > 0$.*

(2) *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in X \setminus \{a\}$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $L \leq M$.*

9.8. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então:*

(1) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$;

(2) $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = LM$;

(3) *Se $M \neq 0$, então* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Além disso, se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g for uma função limitada, então $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

9.9. Teorema: Critério de Cauchy para funções. *Se $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe* $\lim_{x\to a} f(x)$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x, y \in X\ 0 < |x-a| < \delta$ *e* $0 < |y-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

9.10. Teorema. *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ tais que $f(X) \subseteq Y$, $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in Y' \cap Y$ e $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$, então $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b)$.*

9.11. Definições.

1. Um ponto a de $\mathbb{R}$ diz-se um *ponto de acumulação à direita* de um conjunto X se for ponto de acumulação do conjunto $X \cap]a, +\infty[$. Analogamente, a diz-se um *ponto de acumulação à esquerda* de X se for ponto de acumulação de $X \cap]-\infty, a[$. Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação à direita (respectivamente à esquerda) de X por X'_+ (respectivamente por X'_-).

2. Se $a \in X'_+$, dizemos que o número real L *é o limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a*, e escrevemos $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, se
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in X\ a < x < a + \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$
Analogamente se define *limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a*, que se denota por $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

9.12. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Seja $Y = X \cap]a, +\infty[$ e $g = f_{|Y}$. Então $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ se e só se $\lim_{x\to a^+} g(x) = L$.*

9.13. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Então $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se e só se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$.*

9.14. Definições. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se:

1. *estritamente crescente* se, para todo o par $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$;

2. *crescente* (*em sentido lato*) se, para todo o par $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$;

3. *estritamente decrescente* se, para todo o par $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) > f(y)$;

4. *decrescente* (*em sentido lato*) se, para todo o par $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \geq f(y)$;

5. *monótona* se verificar alguma das propriedades anteriores, isto é, se for crescente ou decrescente.

9.15. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Então existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$.*

9.16. Definições. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que $\lim_{x\to+\infty} f(X) = L$ se
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists A > 0\ \ \forall x \in X\ \ x > A\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$
Define-se de modo análogo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

9.17. Teorema. *Se X for ilimitado superiormente e $f : X \to \mathbb{R}$ for monótona limitada, então existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.*

9.18. Definições. Dados $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ se

$$\forall A > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > A.$$

De igual modo, diz-se que:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ se

$$\forall A > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < -A.$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ se

$$\forall A > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)| > A.$$

De forma análoga, definem-se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, -\infty, \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ (-\infty, \infty)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \ (-\infty, \infty)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \ (-\infty, \infty)$.

9.19. Resultados que envolvem limites infinitos.

(1) *Se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, este limite é único, independentemente de ser real ou infinito.*

(2) *Se $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $g : Y \to \mathbb{R}$ é a restrição de f a Y e $a \in Y'$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.*

(3) *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \ (-\infty, \infty)$, então a função f não é limitada.*

(4) *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in X$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.*
Se $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < g(x).$$

(5) *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*;*

(ii) *para toda a sucessão (x_n) em X, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.*

(6) *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = L$ (ou $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$), então $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L$ (ou $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = +\infty$).*

(7) *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona e $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$, então existem (sendo possivelmente infinitos) os limites laterais $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.*

Capítulo III: Continuidade

Para este capítulo, recomenda-se a leitura de:

Capítulo 4 (4.1 e 4.2) do livro de Philip Gillet, *Calculus and Analytic Geometry.*

Capítulo 7 (Parágrafos 1-4) do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1.*

10. Funções contínuas

10.1. Definições. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua em* $a \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

A função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos de X.

Se f não for contínua em $a \in X$, então f diz-se *descontínua em* a e a diz-se um *ponto de descontinuidade de* f. A função f diz-se *descontínua* se for descontínua nalgum ponto do domínio.

10.2. Observações. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função.

1. Repare-se que, contrariamente à situação do estudo do limite de f num ponto a, só faz sentido falar de (des)continuidade de f em a se a pertencer ao domínio de f.

2. Se a pertencer a X, mas não for ponto de acumulação de X, então f é contínua em a.

3. Se $a \in X \cap X'$, então f é contínua em a se e só se existir o $\lim_{x \to a} f(x)$ e for igual a $f(a)$.

10.3. Proposição. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, $g : Y \to \mathbb{R}$ a restrição de f a $Y \subseteq X$ e $a \in Y$.*

(1) *Se f for contínua em a, então g é contínua em a.*

(2) *Se $Y = X \cap I$, onde I é um intervalo aberto, então f é contínua em a desde que g o seja.*

10.4. Proposição. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a, então f é limitada em $X \cap I$, onde I é um intervalo aberto contendo a.*

10.5. Teorema. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. As seguintes condições equivalem-se:*

(i) *f é contínua em a;*

(ii) *se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em X que converge para a, então $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.*

10.6. Teorema. *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$, então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas no ponto a. Se $g(a) \neq 0$, então também $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a.*

10.7. Exemplos.

1. Toda a função constante é contínua.
2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x$ é contínua.
3. Pelo Teorema anterior, todo o polinómio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é contínuo.
4. Ainda pelo Teorema anterior, toda a função racional $f : X \to \mathbb{R}$, com$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são polinómios e $X = \{x \in \mathbb{R}\,;\, q(x) \neq 0\}$, é uma função contínua.

10.8. Teorema. *A composta de duas funções contínuas é contínua.*

10.9. Definições. Seja $a \in X$ um ponto de descontinuidade da função $f : X \to \mathbb{R}$; isto é,

$$\exists \varepsilon > 0 \;:\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in X \;:\; |x - a| < \delta \;\wedge\; |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Diz-se que f tem:

1. uma *descontinuidade removível* em a se existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e for um número real diferente de $f(a)$.
2. um *pólo* em a se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (isto é, $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$);
3. uma *descontinuidade essencial* em a se não for removível nem pólo.

   As descontinuidades essenciais dividem-se em dois tipos:

   (a) *descontinuidade essencial de 1ª espécie*, se existirem os limites laterais em a (reais) e forem diferentes;

   (b) *descontinuidade essencial de 2ª espécie*, se não existir o limite à esquerda de f em a, sendo a um ponto de acumulação à esquerda de X, ou se não existir o limite à direita de f em a, sendo a um ponto de acumulação à direita de X.

10.10. Exemplos.

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$ tem uma descontinuidade removível em $a = 0$.
2. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$ tem um pólo em $a = 0$.
3. A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(x) = \frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$ e $h(0) = 1$ tem uma descontinuidade essencial de 1ª espécie em zero; a função $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $k(x) = [x]$ a característica de x (isto é, o maior inteiro menor ou igual a x) tem uma descontinuidade essencial de 1ª espécie em todo o número a inteiro.
4. A função $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $s(x) = \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $s(0) = 0$ tem uma descontinuidade essencial de 2ª espécie em zero. A função $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $l(x) = \ln x$ se $x > 0$ e $l(0) = 0$ tem uma descontinuidade essencial de 2ª espécie em zero.

10.11. Teorema. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ for monótona e descontínua em $a \in X'_- \cap X'_+$, então f tem uma descontinuidade essencial de 1ª espécie em a.*

10.12. Corolário. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona e $f(X)$ é um intervalo, então f é contínua.*

11. Funções contínuas em intervalos

11.1. Lema. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a, $d \in \mathbb{R}$ e $f(a) > d$, então*

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > d.$$

11.2. Teorema do Valor Intermédio. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$.*

11.3. Observação. O resultado ainda é válido se se tiver $f(a) > d > f(b)$. Resulta imediatamente da aplicação do Teorema à função contínua $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

11.4. Corolários.

(1) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

(2) *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Se $a, b \in I$ e $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$.*

(3) *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo.*

11.5. Teorema. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injectiva, definida num intervalo I. Então f é monótona, com imagem $J = f(I)$ um intervalo, e a sua função inversa $g : J \to \mathbb{R}$ é contínua.*

12. Funções contínuas em subconjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}$

12.1. Teorema. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Se X é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$, então $f(X)$ é também um subconjunto de $\mathbb{R}$ fechado e limitado.*

12.2. Teorema de Weierstrass. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$, então f tem máximo e mínimo.*

12.3. Observação. A hipótese de X ser fechado e limitado é essencial no Teorema de Weierstrass. De facto:

1. Se X não for limitado, então a função

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

é contínua mas não tem máximo, se X for ilimitado superiormente, ou não tem mínimo, se X for ilimitado inferiormente.

2. Se X não for fechado e a for um ponto aderente de X que não pertence a X, então a função

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array}$$

é contínua mas não tem máximo, se a for um ponto de acumulação à direita de X, ou não tem mínimo, se a for um ponto de acumulação à esquerda de X.

Capítulo IV: Cálculo Diferencial

13. Conceito de derivada

Para este capítulo, recomenda-se a leitura de:

Capítulo 2 (2.4 e 2.5), 3, 4 e 5 do livro de Philip Gillet, *Calculus and Analytic Geometry.*

Capítulo 8 (Parágrafos 1-3) do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1.*

13.1. Definições.

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Diz-se que f *é derivável* (ou *diferenciável*)*no ponto* a se existir $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, que se designa habitualmente por $f'(a)$. Note-se que
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
2. Para cada função $f : X \to \mathbb{R}$, define-se a *função derivada de* f, que tem como domínio o conjunto Y dos pontos de $X \cap X'$ onde f é diferenciável:
$$\begin{array}{rcl} f' : Y & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) = \lim\limits_{z\to x} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}. \end{array}$$

13.2. Proposição. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a, então f é contínua em a.*

13.3. Aproximação linear da função f. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X \cap X'$, então, para todo o $x \in X$,*
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$$
com $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{r(x)}{x-a} = 0$. Reciprocamente, se $f(x) = f(a) + L(x-a) + s(x)$, para todo o $x \in X$, com $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{s(x)}{x-a} = 0$, então f é derivável em a e $f'(a) = L$.

14. Cálculo de derivadas

14.1. Teorema: Derivação da soma, do produto e do quociente de funções. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Então as funções $f+g$, $f-g$, $f \times g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$) são diferenciáveis em a, e*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$,
3. $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

14.2. Corolário. *Se f é derivável em a e $c \in \mathbb{R}$, então*

1. $(cf)'(a) = cf'(a)$,
2. $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{(f(a))^2}$, *se* $f(a) \neq 0$.

14.3. Teorema: Derivada da função composta. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subseteq Y$, $a \in X \cap X'$ e $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existirem $f'(a)$ e $g'(b)$, então a função $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$ [2]

14.4. Corolário: Derivada da função inversa. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g : Y = f(X) \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em $a \in X \cap X'$ e g é contínua em $b = f(a)$, então g é derivável em b se e só se $f'(a) \neq 0$. Nesse caso, tem-se*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

14.5. Derivada da função implícita. Suponhamos que queremos obter a derivada de uma função f que nos é apresentada, não na sua forma explícita, mas como solução de uma equação dada (em $f(x)$ e na variável x). Dizemos então que *a equação define implicitamente a função f.*

A equação estabelece uma igualdade entre funções (as definidas pelo primeiro e segundo membros da equação). Derivando essas funções, obtemos uma igualdade entre as suas derivadas, e que é uma equação que envolve a função derivada. A este processo chama-se *derivação implícita da função f.*

Este cálculo é por vezes muito útil. Por exemplo, se quisermos calcular a derivada da função $f(x) = x^\alpha$, com α número real não nulo fixo, fazendo $y = y(x) = f(x)$, se $x \neq 0$ a função é solução da equação

$$\ln |y| = \alpha \ln |x|.$$

Derivando implicitamente y, obtemos

$$\frac{y'}{y} = \alpha \, \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; y' = \alpha \, \frac{y}{x} = \alpha \, \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \, x^{\alpha-1}.$$

E é óbvio que esta fórmula é também válida quando $x = 0$ e $\alpha \geq 1$.

14.6. Método de Newton. Se $f : X \to \mathbb{R}$ for derivável no seu domínio, com derivada limitada, $x_1 \in X$ e a sucessão definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

convergir para $a \in X$, então $f(a) = 0$. [3]

---

[2] Recomenda-se a consulta da demonstração em: Michael Spivak, *Calculus*, terceira edição, páginas 176-177.

[3] Para melhor compreensão da eficácia do método, ver: J.Lewin/M. Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis*, páginas 216-217.

15. Uso da derivada no estudo de máximos e mínimos de funções

15.1. Definições. Seja $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Se $a \in X \cap X'_+$, definimos a *derivada à direita da função f no ponto a* como

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando este limite existir.

2. De igual modo, se $a \in X \cap X'_-$, definimos a *derivada à esquerda de f em a* por

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando este limite existir.

15.2. Definições. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$.

1. Diz-se que f possui um *máximo local* no ponto a se

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ x \in]a - \delta, a + \delta[\ \Rightarrow \ f(x) \leq f(a).$$

Se se tiver $f(x) < f(a)$ para todo o elemento x, diferente de a, do intervalo $]a - \delta, a + \delta[$, diz-se que f possui um *máximo local estrito* em a.

2. De modo análogo definem-se *mínimo local* e *mínimo local estrito.*

15.3. Lema.

1. *Se f é crescente e derivável em a, então $f'(a) \geq 0$.*

2. *Se f é decrescente e derivável em a, então $f'(a) \leq 0$.*

15.4. Observação. Note-se que, de $f'(a) \geq 0$, não se pode concluir que f é crescente: a função

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

tem derivada em 0, igual a $\frac{1}{2}$, mas não é crescente em nenhum intervalo aberto contendo 0.

15.5. Teorema. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$. Se $f'_+(a) > 0$, então*

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ f(a) < f(x).$$

15.6. Corolário. *Se $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a e possui um máximo ou mínimo local em a, então $f'(a) = 0$.*

16. Funções deriváveis em intervalos

Ao longo deste parágrafo I é um intervalo.

16.1. Definição. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I e a sua função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é contínua, a função f diz-se *de classe* $\mathcal{C}^1$ (ou *continuamente derivável*).

16.2. Observações.

1. Uma função pode ser derivável em todo o seu domínio e não ser de classe $\mathcal{C}^1$ (veja, por exemplo, a função h definida em 15.4.).

2. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for de classe $\mathcal{C}^1$, o Teorema do Valor Intermédio aplicado à função $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-nos que f' toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$. O próximo resultado diz-nos que esta afirmação é válida mesmo quando f' não é contínua.

16.3. Teorema de Darboux. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em $[a, b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = d$.*

16.4. Corolário. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I e $f' : I \to \mathbb{R}$ é descontínua em $c \in I$, então essa descontinuidade é essencial de segunda espécie.*

16.5. Teorema de Rolle. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em $]a, b[$, então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

16.6. Teorema do Valor Médio de Lagrange. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em $]a, b[$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

16.7. Corolários do Teorema de Lagrange.

1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de $]a, b[$, então f é uma função constante.*

2. *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, deriváveis em $]a, b[$ e $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in]a, b[$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo o $x \in [a, b]$.*

3. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo o $x \in I$, então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*

4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $\lim_{x \to a^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, então existe $f'(a)$ $(= f'_+(a))$, e é igual a L.*

5. *Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ contínua em $]a, b[$ e derivável em $]a, b[\setminus \{c\}$, com $c \in]a, b[$. Se $\lim_{x \to c} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, então existe $f'(c)$ e é igual a L.*

6. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I.*

   (a) *Tem-se $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$ se e só se f for crescente em I.*

   (b) *Se $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I. Neste caso, f possui inversa $g : f(I) = J \to \mathbb{R}$ derivável em J, com $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(g(y))}$, para todo o $y = f(x) \in J$.*

7. *Sejam* $c \in]a,b[\subseteq X$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua em* $]a,b[$ *e derivável em* $]a,b[\setminus\{c\}$.

   (a) $\forall x \in X\ (a < x < c \Rightarrow f'(x) > 0) \wedge (c < x < b \Rightarrow f'(x) < 0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(c)$ *é máximo local de* f.

   (b) $\forall x \in X\ (a < x < c \Rightarrow f'(x) < 0) \wedge (c < x < b \Rightarrow f'(x) > 0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(c)$ *é mínimo local de* f.

   (c) *Se* f' *não muda de sinal em* c, *então* $f(c)$ *não é extremo local de* f.

16.8. Teorema do Valor Médio de Cauchy. *Se* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas em* $[a,b]$ *e diferenciáveis em* $]a,b[$, *e se* g' *não se anula em* $]a,b[$, *então existe* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

16.9. Regra de Cauchy.

1. *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínuas em* $[a,b]$ *e deriváveis em* $]a,b[\setminus\{c\}$, *com* $c \in]a,b[$. *Se* g' *não se anula em* $]a,b[\setminus\{c\}$, *se* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *e se existe o* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *então*
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. *Sejam* $f, g :]a,b[\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ *deriváveis em* $]a,b[\setminus\{c\}$, *com* $c \in]a,b[$. *Se* g' *não se anula, se* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ *e se existe o* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *então*
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. *Se* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *são deriváveis no intervalo* I, *ilimitado superiormente, se* g' *não se anula em* I *e se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ *e existe o* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *então*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

17. Fórmula de Taylor

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima derivada de uma função f designa-se por $f^{(n)}$ e é definida por $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$; denotamos neste caso f por $f^{(0)}$.

17.1. Definições. Seja $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que:

1. f é *n vezes derivável* no intervalo I se existir $f^{(n)}(x)$ para todo o $x \in I$;
2. f é *n vezes derivável no ponto* $a \in I$ se existir um intervalo aberto J contendo a tal que $f_{|I\cap J}$ seja $(n-1)$ vezes derivável em J e se existir $f^{(n)}(a)$ (isto é $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$);
3. f é de classe $\mathcal{C}^n$ se f for derivável n vezes e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for contínua;
4. f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ se for de classe $\mathcal{C}^n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

17.2. Exemplos.

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|x^n$ é de classe $\mathcal{C}^n$ mas não é de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

2. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é de classe $\mathcal{C}^\infty$, sendo $g^{(n)}(0) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

17.3. Observação. Um polinómio de grau n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

é completamente determinado pelas suas derivadas, até à ordem n, no ponto 0: $a_0 = p(0)$, $a_1 = p'(0)$, $a_2 = \dfrac{p^{(2)}(0)}{2}$, $a_3 = \dfrac{p^{(3)}(0)}{3 \cdot 2}$, $\cdots$, $a_n = \dfrac{p^{(n)}(0)}{n!}$.

17.4. Definição. Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto a, chama-se *polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto a* ao polinómio

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Note-se que a diferença entre a função f e o seu polinómio de Taylor é uma função que tem derivadas nulas, até à ordem n, no ponto a.

17.5. Lema. *Para uma função $r : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável ($n \geq 1$) no ponto $0 \in I$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $r(0) = r'(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

17.6. Teorema: Fórmula de Taylor. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. Para todo o $x \in I$, tem-se*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x),$$

onde $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

17.7. Teorema: Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $(n+1)$ vezes derivável no intervalo $]a, b[$ e seja $x \in]a, b[$. Então existe $c \in]a, x[$ tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

equivalentemente, para todo o $h \in]0, b-a[$, existe $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

17.8. Observação. O resultado ainda é válido para $x \in]d, a[\subseteq I$, quando a função f é $(n+1)$ vezes derivável em $]d, a[$. Assim, para cada $x \in]d, a[$, existe $c \in]x, a[$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

18. Aplicações da Fórmula de Taylor ao estudo de funções

18.1. Teorema: Estudo de máximos e mínimos de funções. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável num ponto a, que pertence ao interior do domínio de f. Suponhamos que $f^{(j)}(a) = 0$, para $j = 1, \ldots, n-1$, e que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Então:*

1. *Se n for ímpar, f não atinge um extremo local em a;*
2. *Se n for par:*

$$f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ tem um máximo local em } a,$$

$$f^{(n)}(a) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ tem um mínimo local em } a.$$

18.2. Definição. Uma *função* $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, diz-se *convexa* (resp. *côncava*) se, sempre que $x \in]a, b[\subseteq [a, b] \subseteq I$, o ponto $(x, f(x))$ está situado abaixo (resp. acima) da recta que liga $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

18.3. Observação. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se e só se,

$$(\forall a, x, b \in I)\;\; a < x < b \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

18.4. Teorema. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for duas vezes derivável em I, f é convexa (resp. côncava) se e só se $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) para todo o $x \in I$.*

18.5. Estudo completo de uma função real de variável real. Dada uma função real de variável real f, para procedermos ao seu estudo, devemos percorrer as seguintes etapas:

1. calcular o domínio;
2. verificar se é par, ímpar ou periódica (o que permitirá reduzir o domínio a estudar);
3. calcular a primeira derivada;
4. estabelecer o quadro de variação da função;
5. calcular valores limite, que permitirão completar o quadro de variação (e.g., os limites laterais em pontos de descontinuidade, ou que não pertençam ao domínio, e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$).
6. calcular o contradomínio;
7. determinar (caso existam) as assímptotas ao gráfico de f;
8. calcular a segunda derivada;
9. estudar a concavidade e os pontos de inflexão;
10. calcular os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados;

11. esboçar o gráfico da função.

Capítulo V: Estudo de funções trigonométricas e hiperbólicas

Recomenda-se a leitura de:
Capítulo 9 do livro de Philip Gillet, *Calculus and Analytic Geometry*.