1 Espaços Métricos

ESPAÇO MÉTRICO

Um par (X, d) diz-se um espaço métrico se X for um conjunto e $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ for uma aplicação que verifica as seguintes condições, quaisquer que sejam $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

`[À função` d `chama-se métrica e aos elementos de` X `pontos do espaço métrico; a condição (3) designa-se por desigualdade triangular.]`

Note que, ao verificar (3), basta-nos considerar três pontos distintos $x, y, z \in X$, uma vez que, se dois deles coincidirem, o resultado é trivial ou segue imediatamente de (1).

BOLA ABERTA e BOLA FECHADA

Dados um (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$, os conjuntos

$$B_r(a) := \{x \in X\,;\, d(x, a) < r\} \quad \text{e} \quad B_r[a] := \{x \in X\,;\, d(x, a) \leq r\}$$

designam-se, respectivamente, por bola aberta e bola fechada de centro a e raio r.

EXEMPLOS.

(1) Se X é um conjunto, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, definida por $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases}$ é uma métrica. `[métrica discreta]`

(2) Em $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ podemos definir diversas métricas:

(a) $d_1(a, b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$,

(b) $d_2(a, b) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$, `[métrica euclidiana]`

(c) $d_\infty(a, b) = \max\{|a_i - b_i|\,;\, i = 1, \cdots, n\}$,

onde $a = (a_i)_{i=1,\cdots,n}$, $b = (b_i)_{i=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^n$.

(3) Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos, podemos definir em $X \times Y$ as métricas

(a) $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + d'(y_1,y_2)$,

(b) $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \left(d(x_1,x_2)^2 + d'(y_1,y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(c) $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}$,

onde (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in X \times Y$.

(4) Se A é um subconjunto de X e d é uma métrica em X, a restrição d_A de d a $A \times A$ é uma métrica em A.

`[Diz-se então que` (A, d_A) `é um subespaço métrico de` (X, d)`.]`

(5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. No conjunto das funções limitadas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ podemos considerar a métrica ρ definida por

$$\rho(f,g) := \sup\,\{|f(x) - g(x)|\,;\, x \in [a,b]\},$$

onde $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções limitadas.

`[Esta métrica chama-se habitualmente métrica do supremo, e o espaço métrico designa-se por` $\mathcal{L}([a,b],\mathbb{R})$`.]`

(6) Como toda a função contínua de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada, podemos considerar ainda o subespaço métrico de $\mathcal{L}([a,b],\mathbb{R})$ das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, que se costuma denotar por $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, ou simplesmente por $\mathcal{C}[a,b]$.

(7) No conjunto das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ podemos ainda considerar a métrica

$$\sigma(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

`[métrica do integral]`

CONJUNTO LIMITADO/FUNÇÃO LIMITADA

Um subconjunto A de um espaço métrico (Y,d) é limitado se existirem $a \in Y$ e $r > 0$ tais que $d(y,a) < r$ qualquer que seja $y \in A$. Uma função $f : X \to (Y,d)$ é limitada se $f(X)$ for um subconjunto limitado de (Y,d).

EXEMPLO.

(8) Se X é um conjunto e (Y,d) um espaço métrico, podemos considerar o espaço métrico $\mathcal{L}(X,(Y,d))$ das funções limitadas de X em (Y,d) munido da métrica do supremo

$$\rho(f,g) := \sup\,\{d(f(x),g(x))\,;\, x \in X\}.$$