
FUNÇÃO CONTÍNUA

Sejam (X,d) e (Y,d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Diz-se que $f : (X,d) \to (Y,d')$ é uma função contínua em $a \in X$ se

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \quad : \quad (\forall x \in X) \ \ d(x,a) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

$f : (X,d) \to (Y,d')$ diz-se uma função contínua se for contínua em todo o ponto x de X.

Na definição de função contínua em $a \in X$ as bolas abertas são essenciais. De facto:

[Uma função $f : (X,d) \to (Y,d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \quad : \quad f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)).]$$

As bolas abertas têm uma propriedade interessante:

Se $x \in B_r(a)$ então existe $s > 0$ tal que $B_s(x) \subseteq B_r(a)$.

ABERTO

Se (X,d) é um espaço métrico e $A \subseteq X$, A diz-se um subconjunto aberto de (X,d) se

$$(\forall x \in A) \ \ (\exists s > 0) \quad : \quad B_s(x) \subseteq A.$$

Já sabemos que toda a bola aberta é um aberto. Há no entanto abertos que não são bolas abertas. Por exemplo, $]0, +\infty[$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ (com a métrica euclidiana) embora não seja uma bola aberta.

É fácil verificar que os abertos de um espaço métrico (X,d) têm as seguintes propriedades:

(1) $\emptyset$ e X são subconjuntos abertos de (X,d);

(2) se A e B são subconjuntos abertos de (X,d), então também $A \cap B$ o é;

(3) se I é um conjunto e $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de (X,d), então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é ainda um aberto de (X,d).

Note-se que, uma vez que a intersecção de dois abertos é um aberto (Propriedade 2), também qualquer intersecção *finita* de abertos é um aberto. Não podemos no entanto generalizar esta propriedade ao caso de uma família qualquer de abertos: há famílias (infinitas) de abertos cuja intersecção não é aberta. Por exemplo, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$ não é um aberto em $\mathbb{R}$.

Proposição. *Um subconjunto de um espaço métrico é aberto se e só se é reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Como cada bola aberta é um aberto e estes são estáveis para a reunião, conclui-se imediatamente que a reunião de bolas abertas é aberta.

Reciprocamente, se $A \subseteq X$ é aberto, então, para cada $a \in A$, existe $\delta_a > 0$ tal que $B_{\delta_a}(a) \subseteq A$. Logo $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_{\delta_a}(a) \subseteq A$, e obtemos a igualdade pretendida. ∎

O estudo dos subconjuntos abertos de um espaço métrico é justificado pelo seguinte resultado.

Proposição. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.*

(1) $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se, para cada subconjunto aberto V de (Y, d') ao qual $f(a)$ pertença, existir um aberto U de (X, d) tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq V$.

(2) A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua se e só se todo o subconjunto aberto de (Y, d') tiver como imagem inversa por f um subconjunto aberto de (X, d).

Demonstração. (1) ($\Rightarrow$) Seja V um aberto de Y ao qual $f(a)$ pertence. Por definição de aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Da continuidade de f em a conclui-se então que existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, considerando $U = B_\delta(a)$, obtemos $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$, como pretendido.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. A bola aberta $B_\varepsilon(f(a))$ é em particular um aberto ao qual $f(a)$ pertence. Logo, por hipótese, existe um aberto U de X tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Por definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq U$. Finalmente temos $f(B_\delta(a)) \subseteq f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$.
(2) ($\Rightarrow$) Sejam V um subconjunto aberto de Y e $a \in f^{-1}(V)$. Como V é aberto e $f(a) \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$ e podemos então concluir que $f^{-1}(V)$ é um aberto de X.

($\Leftarrow$) Sejam $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $B_\varepsilon(f(a))$ é um aberto de Y, da hipótese segue que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ é um aberto de X. Como $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, pela definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, o que é equivalente a $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, f é contínua em a. ∎