## 2 Espaços Topológicos

---

**TOPOLOGIA**
Dado um conjunto $X$, um subconjunto $\mathcal{T}$ de partes de $X$ diz-se uma topologia em $X$ se

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;

(2) se $A, B \in \mathcal{T}$ então $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(3) se $(A_i)_{i\in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$, então $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

---

`[Ao par` $(X, \mathcal{T})$ `chama-se espaço topológico. Os elementos de` $\mathcal{T}$ `dizem-se os abertos do espaço topológico` $(X, \mathcal{T})$`.]`

---

**FUNÇÃO CONTÍNUA**
Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $f : X \to Y$ é uma função, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$

(1) diz-se contínua em $a \in X$ se: $(\forall V \in \mathcal{T}')\ \ f(a) \in V \ \Rightarrow\ (\exists U \in \mathcal{T})\ :\ a \in U$ e $f(U) \subseteq V$;

(2) diz-se contínua se: $(\forall V \in \mathcal{T}')\ \ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

---

**Proposição.** *Se $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ e $(Z, \mathcal{T}'')$ são espaços topológicos e $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ e $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ são funções contínuas, então a sua composição $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ é ainda uma função contínua.*

**EXEMPLOS.**

(1) Se $(X, d)$ é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é o conjunto dos abertos definidos pela métrica $d$, então $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico. Por exemplo, a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$ define uma topologia em $\mathbb{R}^n$, a que se chama `topologia euclidiana`.

(2) Em qualquer conjunto $X$ podemos definir:

   (a) a `topologia discreta` $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, em que todo o subconjunto de $X$ é aberto (induzida pela métrica discreta);

   (b) a `topologia indiscreta` (ou `topologia grosseira`) $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$.

(3) Se $X$ é um conjunto qualquer, $\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid X\backslash A$ é um conjunto finito$\}$ é uma topologia em $X$, a que se dá o nome de `topologia cofinita`.

(4) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dado um subconjunto $Y$ de $X$, $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y\ ;\ U \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em $Y$. A esta topologia chama-se `topologia relativa` – ou `topologia de subespaço` – em $Y$ induzida por $\mathcal{T}$.

---

**ESPAÇO TOPOLÓGICO METRIZÁVEL**
Um espaço topológico cuja topologia seja exactamente o conjunto dos abertos definidos por uma métrica diz-se um espaço topológico metrizável.

---

`[ Note-se que: Duas métricas diferentes num conjunto` $X$ `podem definir a mesma topologia: métricas topologicamente equivalentes. ]`

**Proposição.** *Se $d$ e $d'$ são métricas num conjunto $X$, $d$ e $d'$ são topologicamente equivalentes se e só se as funções* $\begin{array}{ccc}(X,d) & \longrightarrow & (X,d') \\ x & \longmapsto & x\end{array}$ *e* $\begin{array}{ccc}(X,d') & \longrightarrow & (X,d) \\ x & \longmapsto & x\end{array}$ *são contínuas.*

**Lema.** *Se $(X,\mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ é a topologia de subespaço em $Y \subseteq X$, então a função inclusão* $\begin{array}{ccc}(Y,\mathcal{T}_Y) & \longrightarrow & (X,\mathcal{T}) \\ y & \longmapsto & y\end{array}$ *é contínua.*

**Proposição.** *Sejam $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.*

*(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua.*

*(2) Se $\mathcal{T}'$ é a topologia indiscreta, $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua.*