TOPOLOGIAS COMPARÁVEIS

No conjunto das topologias de um conjunto X podemos definir uma relação de ordem do seguinte modo: se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Nesse caso diz-se que $\mathcal{T}$ é uma `topologia menos fina do que` $\mathcal{T}'$ e que $\mathcal{T}'$ é uma `topologia mais fina do que` $\mathcal{T}$.

OBSERVAÇÕES.

(1) Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, dizer que $\mathcal{T}$ é mais fina do que $\mathcal{T}'$ é equivalente a dizer que a função identidade $(X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ é contínua.

(2) A topologia discreta é mais fina do que qualquer outra topologia que se possa definir no conjunto X, enquanto que a topologia indiscreta é menos fina do que qualquer outra.

HOMEOMORFISMO/ESPAÇOS HOMEOMORFOS

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos.

(1) Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se um `homeomorfismo` se for uma função contínua, bijectiva, com função inversa $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ contínua.

(2) Se existir um homeomorfismo $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se que os espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são `homeomorfos`.

EXEMPLOS. Como subespaços de $\mathbb{R}$, são homeomorfos: $[0,1]$ e $[a,b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$); $]0,1]$ e $[1,+\infty[$; $\mathbb{R}$ e $]0,+\infty[$.

3 Bases e sub-bases

BASE

Um subconjunto $\mathcal{B}$ de uma topologia $\mathcal{T}$ num conjunto X diz-se uma base da topologia $\mathcal{T}$ se todo o elemento de $\mathcal{T}$ for uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$; isto é

$$\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid (B_i)_{i \in I} \text{ é uma família de elementos de } \mathcal{B}\}.$$

Lema. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, então $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$ se e só se, para todo o aberto A, se verificar* $(\forall x \in A)\ (\exists B \in \mathcal{B}) \ :\ x \in B \subseteq A.$

EXEMPLOS.

(1) Se (X,d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é a topologia definida pela métrica d, então o conjunto $\mathcal{B} = \{B_r(x) \,|\, r > 0,\ x \in X\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$.

`[Em particular, os intervalos abertos limitados formam uma base para a topologia euclidiana em` $\mathbb{R}$`.]`

(2) Um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de X é uma base para a topologia discreta em X se e só se, para todo o ponto x de X, $\{x\} \in \mathcal{B}$.

Proposição. *Dados um conjunto X e um subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(X)$, o conjunto $\mathcal{T}$ constituído pelas reuniões quaisquer de intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma topologia em X.*

SUB-BASE

Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ estão nas condições da proposição anterior, diz-se que $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}$, e que $\mathcal{T}$ é a topologia gerada por $\mathcal{S}$.

`[A topologia gerada por` $\mathcal{S}$ `é portanto a topologia menos fina que contém` $\mathcal{S}$`.]`

EXEMPLOS.

(1) Toda a base de uma topologia é em particular uma sub-base.

(2) $\{]a, a+1[\,|\, a \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$ `[mas não é uma base]`.

(3) A topologia euclidiana em $\mathbb{R}$ é gerada por $\mathcal{S} = \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, b[\,;\, b \in \mathbb{R}\}$.

(4) Qualquer que seja X, $\{X \setminus \{x\} \,|\, x \in X\}$ é uma sub-base da topologia cofinita em X.

Proposição. *Se $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}'$, então uma função $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua se e só se toda a imagem inversa, por f, de um elemento de $\mathcal{S}$ for um aberto em $(X,\mathcal{T})$.*

Proposição. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{S}$ é uma base para uma topologia em X.*

(ii) (B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$;

(B2) $(\forall B_1,\, B_2 \in \mathcal{S})\ (\forall x \in B_1 \cap B_2)\ (\exists B_3 \in \mathcal{S})\ :\ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposição. *Sejam $(X,\mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ a topologia relativa em $Y \subseteq X$.*

(1) Se $\mathcal{B}$ é base da topologia $\mathcal{T}$, então $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y\,;\, B \in \mathcal{B}\}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}_Y$.

(2) Se $\mathcal{S}$ é sub-base de $\mathcal{T}$, então $\mathcal{S}_Y := \{S \cap Y\,;\, S \in \mathcal{S}\}$ é uma sub-base da topologia $\mathcal{T}_Y$.