9 Espaços topológicos separados

ESPAÇO SEPARADO
Um espaço topológico diz-se um espaço de Hausdorff, ou espaço separado, ou espaço T_2, se

$$(\forall x, y \in X)\ \ x \neq y \ \ \Rightarrow \ \ (\exists U \in \mathcal{V}_x)\ \ (\exists V \in \mathcal{V}_y)\ \ :\ \ U \cap V = \emptyset.$$

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço separado e se x e y são limites de uma sucessão (x_n) em X, então $x = y$.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) converge para x e para y. Se $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \in \mathcal{V}_y$, então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que, se $n \geq p$, $x_n \in U$ e, se $n \geq q$, $x_n \in V$. Logo, se $n \geq p$ e $n \geq q$, temos que $x_n \in U \cap V$, e então $U \cap V \neq \emptyset$. Num espaço separado isto significa que $x = y$. ∎

EXEMPLOS.

(1) Todo o espaço topológico metrizável é separado; em particular, $\mathbb{R}^n$, assim como todo o espaço discreto, é separado.

(2) Se $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$, então $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é separado.

(3) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta num conjunto X com mais do que um ponto, então $(X, \mathcal{T})$ não é separado.

Teorema. *As seguintes condições são equivalentes, para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$:*

(i) o espaço X é separado;

(ii) $(\forall x, y \in X)\ \ x \neq y \ \ \Rightarrow \ \ (\exists A, B \in \mathcal{T})\ \ :\ \ x \in A,\ \ y \in B,\ \ e\ \ A \cap B = \emptyset$;

(iii) o conjunto $\Delta = \{(x, x)\,;\, x \in X\}$ é um subconjunto fechado no espaço produto $X \times X$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Por (i) existem $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \in \mathcal{V}_y$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Por definição de vizinhança, existem $A \in \mathcal{T}$ e $B \in \mathcal{T}$ tais que $x \in A \subseteq U$ e $y \in B \subseteq V$. De $U \cap V = \emptyset$ conclui-se que $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Provar que Δ é fechado é provar que, qualquer que seja $(x, y) \in X \times X$ com $x \neq y$, $(x, y) \notin \overline{\Delta}$. Isto segue imediatamente de (ii), pois se $A, B \in \mathcal{T}$ são tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$ então $(A \times B) \cap \Delta = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Então $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$, que é aberto por (iii). Logo, por definição de topologia produto, existem abertos U, V de X tais que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$. Daqui se conclui que $U \in \mathcal{V}_x$, $V \in \mathcal{V}_y$ e $U \cap V = \emptyset$, como queríamos provar. ∎

Proposição. *Sejam Y um espaço de Hausdorff e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Então:*

(1) O conjunto $\{x \in X \, ; \, f(x) = g(x)\}$ *é fechado em* X*.*

(2) Se f *coincide com* g *num subconjunto denso de* X*, então* $f = g$*.*

Demonstração. (1) Se $f, g : X \to Y$ são contínuas, então $< f, g >: X \to Y \times Y$ é contínua. Logo, $< f, g >^{-1} (\Delta)$ é um subconjunto fechado de X, porque Δ é fechado em $Y \times Y$. De

$$< f, g >^{-1} (\Delta) = \{x \in X \, ; \, ((f(x), g(x)) \in \Delta\} = \{x \in X \, ; \, f(x) = g(x)\},$$

segue agora o resultado.

(2) é agora óbvio, uma vez que, por (1), se tem $\{x \in X \, ; \, f(x) = g(x)\} = \overline{\{x \in X \, ; \, f(x) = g(x)\}}$, que por sua vez é denso, ou seja

$$\{x \in X \, ; \, f(x) = g(x)\} = \overline{\{x \in X \, ; \, f(x) = g(x)\}} = X. \qquad \blacksquare$$

Proposição. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos, com* Y *separado. Se* $f : X \to Y$ *é uma função contínua, então o gráfico de* f*,* $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \, ; \, x \in X\}$*, é fechado em* $X \times Y$*.*

Demonstração. A função $F : X \times Y \to Y \times Y$, definida por $F(x, y) = (f(x), y)$ é contínua, pois ao compô-la com as projecções $p_1 : Y \times Y \to Y$ e $p_2 : Y \times Y \to Y$ obtemos funções contínuas. Agora é fácil observar que $F^{-1}(\Delta) = \Gamma_f$, logo Γ_f é fechado porque é a imagem inversa de un fechado por uma função contínua. $\blacksquare$

10 Espaços topológicos conexos

ESPAÇO CONEXO
Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ diz-se conexo se não for reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos não vazios.

`[Um espaço diz-se desconexo se não for conexo.]`

Proposição. *Seja* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ *é um espaço conexo.*

(iii) X *não é reunião de dois subconjuntos fechados disjuntos não vazios.*

(iii) Se U *é um subconjunto aberto e fechado de* $(X, \mathcal{T})$*, então* $U = X$ *ou* $U = \emptyset$*.*

(iv) Qualquer aplicação contínua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_d)$*, onde* $\mathcal{T}_d$ *é a topologia discreta, é constante.*