4 Vizinhanças

VIZINHANÇA
Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e a um ponto de X. Diz-se que um subconjunto V de X é uma vizinhança de a se existir um aberto A tal que $a \in A \subseteq V$.

Designaremos o conjunto das vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$ por $\mathcal{V}_x$.

EXEMPLOS. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

(1) Qualquer que seja $x \in X$, $X \in \mathcal{V}_x$.

(2) Se A é aberto e $x \in A$, então $A \in \mathcal{V}_x$.

(3) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, então, quaisquer que sejam $Y \subseteq X$ e $x \in Y$, $Y \in \mathcal{V}_y$.

Proposição. *Um conjunto $A \subseteq X$ é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos.*

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $x \in X$, então:*

(1) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ e $V \in \mathcal{V}_x \ \Rightarrow \ x \in V$;

(2) $V \in \mathcal{V}_x$ e $W \supseteq V \ \Rightarrow \ W \in \mathcal{V}_x$;

(3) $V, W \in \mathcal{V}_x \ \Rightarrow \ V \cap W \in \mathcal{V}_x$;

Proposição. *Seja $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função.*

(1) f é contínua em $a \in X$ se e só se a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(a)$ é uma vizinhança de a.

(2) f é contínua se e só se, para todo o $x \in X$, a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(x)$ é uma vizinhança de x.

SISTEMA FUNDAMENTAL DE VIZINHANÇAS
Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $x \in X$. Um subconjunto $\mathcal{U}_x$ de $\mathcal{V}_x$ diz-se uma base de vizinhanças de x ou sistema fundamental de vizinhanças de x se, para cada $V \in \mathcal{V}_x$, existir $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subseteq V$.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ for uma topologia em X definida por uma métrica d, então o conjunto das bolas abertas centradas em $x \in X$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

(2) Se $\mathcal{T}$ for a topologia discreta em X, então o conjunto singular $\mathcal{U}_x = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $x \in X$.

Proposição. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ a topologia relativa em $Y \subseteq X$.*

(1) Se $x \in Y$ e $\mathcal{V}_x$ é o conjunto das vizinhanças de x no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então $\mathcal{V}'_x := \{V \cap Y\,;\, V \in \mathcal{V}_x\}$ é o conjunto das vizinhanças de x em $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(2) Se $x \in Y$ e $\mathcal{U}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então $\mathcal{U}'_x := \{U \cap Y\,;\, U \in \mathcal{U}_x\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x em $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

5 Subconjuntos fechados de um espaço topológico

FECHADO
Um subconjunto A de um espaço $(X, \mathcal{T})$ chama-se fechado se o seu complementar for aberto.

Proposição. *Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ se e só se verifica as seguintes condições:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$;

(2) se $U, V \in \mathcal{F}$ então $U \cup V \in \mathcal{F}$;

(3) se $(U_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{F}$, então $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{F}$.

Proposição. *Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se, qualquer que seja o subconjunto fechado F de $(Y, \mathcal{T}')$, $f^{-1}(F)$ é fechado em $(X, \mathcal{T})$.*

Lema. *Se $\mathcal{F}$ é o conjunto dos subconjuntos fechados de $(X, \mathcal{T})$ e Y é um subconjunto de X, então $\mathcal{F}_Y = \{F \cap Y \mid F \in \mathcal{F}\}$ é o conjunto dos fechados do subespaço $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

FUNÇÃO ABERTA/FUNÇÃO FECHADA
Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se aberta (resp. fechada) se, sempre que A for um subconjunto aberto (fechado) de X, $f(A)$ for um subconjunto aberto (fechado) de Y.

Proposição. *Se $\mathcal{T}_Y$ é a topologia de subespaço em Y definida por $(X, \mathcal{T})$, então a inclusão $(Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ é aberta (fechada) se e só se Y é um subconjunto aberto (fechado) de $(X, \mathcal{T})$.*

Lema. *Toda a função bijectiva, contínua e aberta é um homeomorfismo.*