6 Operações de interior e de aderência

PONTO INTERIOR
Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e Y é um subconjunto de X, um ponto x de X diz-se um ponto interior de Y se Y for uma vizinhança de x.

`[O conjunto dos pontos interiores de` Y `chama-se interior de` Y `e denota-se por` $\overset{\circ}{Y}$, `int`(Y) `ou simplesmente int`Y`.]`

Lema. *Se Y é um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então:*

(1) $int(Y) \subseteq Y$; $int(Y) = Y \Leftrightarrow Y \in \mathcal{T}$;

(2) $int(Y)$ é um aberto: é o maior aberto contido em Y; logo, $int(Y) = \bigcup\{A \in \mathcal{T}\,;\, A \subseteq Y\}$.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\mathrm{int}(Y) = Y$.

(2) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então $\mathrm{int}(X) = X$ e $\mathrm{int}(Y) = \emptyset$ desde que $Y \neq X$.

(3) Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana, $\mathrm{int}([a,b]) =]a,b[$, $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$, $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

(4) Em $\mathbb{R}$, com a topologia cofinita, se $Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\mathrm{int}(Y) = \begin{cases} Y & \text{se } \mathbb{R} \setminus Y \text{ finito} \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$

PONTO ADERENTE
Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $Y \subseteq X$, um ponto x de X diz-se um ponto aderente de Y se toda a vizinhança de x intersecta Y; isto é, se $(\forall V \in \mathcal{V}_x)\ \ V \cap Y \neq \emptyset$.

`[O conjunto dos pontos aderentes de` Y `chama-se aderência de` Y `ou fecho de` Y, `e representa-se por` $\overline{Y}$`.]`

Lema. *Se Y é um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então:*

(1) $Y \subseteq \overline{Y}$; $Y = \overline{Y} \Leftrightarrow Y$ é fechado;

(2) $\overline{Y}$ é fechado: é o menor fechado que contém Y; logo $\overline{Y} = \bigcap\{F\,;\, F$ é fechado e $Y \subseteq F\}$.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\overline{Y} = Y$.

(2) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{Y} = X$ desde que $Y \neq \emptyset$.

(3) Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana, $\overline{]a,b[} = [a,b]$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(4) Em $\mathbb{R}$, com a topologia cofinita, se $Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\overline{Y} = \begin{cases} Y & \text{se } Y \text{ finito} \\ \mathbb{R} & \text{caso contrário.} \end{cases}$

SUBCONJUNTO DENSO/FRONTEIRA/EXTERIOR/DERIVADO

Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e Y um subconjunto de X.

(1) Y diz-se denso se $\overline{Y} = X$.

(2) Um ponto x de X diz-se `ponto fronteira de` Y se

$$(\forall U \in \mathcal{V}_x)\ \ U \cap Y \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus Y).$$

O conjunto dos pontos fronteira de Y chama-se `fronteira de` Y e designa-se por $\mathrm{fr}Y$.

(3) Um ponto x de X diz-se `ponto exterior de` Y se tiver uma vizinhança que não intersecta Y; isto é, se for um ponto interior do complementar de Y.

O conjunto dos pontos exteriores de Y chama-se `exterior de` Y e denota-se por $\mathrm{ext}Y$.

(4) Um ponto x de X diz-se ponto de acumulação de Y se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x) \quad V \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset;$$

isto é, se $x \in \overline{Y \setminus \{x\}}$.

O conjunto dos pontos de acumulação de Y chama-se `derivado de` Y e denota-se Y'.

Um ponto $x \in Y$ diz-se ponto isolado de Y se não for ponto de acumulação.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\mathrm{fr}Y = \emptyset$, $\mathrm{ext}Y = X \setminus Y$ e $Y' = \emptyset$; logo, todos os pontos de Y são isolados.

(2) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então, se Y é um subconjunto não vazio de X, Y é denso e $\mathrm{fr}Y = X$. Quanto ao conjunto derivado, se Y for um conjunto singular, então $Y' = X \setminus Y$, enquanto que $Y' = X$ desde que Y tenha pelo menos dois pontos.

(3) Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana,

   (a) $\mathrm{fr}(]a,b[) = \mathrm{fr}([a,b]) = \{a,b\}$, $\mathrm{fr}(\{x\}) = \{x\}$, $\mathrm{fr}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$;

   (b) $\mathrm{ext}(]a,b[) =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$, $\mathrm{ext}(\{x\}) = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, $\mathrm{ext}\mathbb{Q} = \emptyset$;

   (c) $([a,b])' = [a,b]$, $\{x\}' = \emptyset$, $\mathbb{N}' = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.