7 Topologia produto

TOPOLOGIA PRODUTO
Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. A topologia $\mathcal{T}$ em $X \times Y$ gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{U \times V\,;\, U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$$

chama-se topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$.

`[Ao espaço topológico` $(X \times Y, \mathcal{T})$ `chama-se espaço produto.]`

Proposição. *Se $\mathcal{T}$ é a topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$, então:*

(1) As projecções $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y : (X \times Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas (e abertas).

(2) Uma função $f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X \times Y, \mathcal{T})$ é contínua se e só se as funções compostas $p_X \circ f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y \circ f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas.

Demonstração. 1. Para verificar que $p_X : X \times Y \to X$ é contínua, basta notar que, se $U \in \mathcal{T}_X$, então $p_X^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y\,;\, x \in U\} = U \times Y$, que é aberto em $X \times Y$.
Para provar que p_X é aberta, consideremos $A \in \mathcal{T}$; isto é, $A = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \times V_i$, com cada $U_i \in \mathcal{T}_X$ e cada $V_i \in \mathcal{T}_Y$. Se $A = \emptyset$, entãp $p_X(A) = \emptyset$ é aberto. Se $A \neq \emptyset$, podemos supor que, para todo o $i \in I$, $V_i \neq \emptyset$. Nesse caso $p_X(A) = p_X(\bigcup\limits_{i \in I} U_i \times V_i) = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.
A demonstração de que a função p_Y é contínua e aberta é análoga.

2. Se f é contínua, então $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas, porque são composições de funções contínuas.
Para provar o recíproco, suponhamos que $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas. Seja $U \times V$ um elemento da base $\mathcal{B}$ da topologia produto. Então

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z\,;\, f(z) \in U \times V\} \\ &= \{z \in Z\,;\, p_X(f(z)) \in U \ \wedge\ p_Y(f(z)) \in V\} \\ &= (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V), \end{aligned}$$

que é aberto porque $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas. ■

Corolário. *Se $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$ são funções entre espaços topológicos, e se considerarmos o conjunto $X \times Y$ munido da topologia produto, a função*
$$\begin{aligned} < f, g >: Z &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$
é contínua se e só se f e g o são.

Demonstração. Pela proposição anterior sabemos que $< f, g >: Z \to X \times Y$ é contínua se e só se $p_X \circ < f, g >$ e $p_Y \circ < f, g >$ o são. Para concluir o resultado basta notar que $p_X(< f, g > (z)) = p_X(f(z), g(z)) = f(z)$ e que $p_Y(< f, g > (z)) = g(z)$, isto é $p_X \circ < f, g >= f$ e $p_Y \circ < f, g >= g$. ∎

[A definição e os resultados anteriores são facilmente generalizáveis ao produto finito de espaços topológicos.]

EXEMPLOS.

(1) A topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é a topologia produto das topologias euclidianas em cada um dos factores $\mathbb{R}$.

(2) Sejam $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ espaços topológicos.

  (a) Se, para todo o i, $\mathcal{T}_i$ é a topologia indiscreta em X_i, então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ é a topologia indiscreta em $\prod\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.

  (b) Se, para todo o i, $\mathcal{T}_i$ é a topologia discreta em X_i, então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ é a topologia discreta em $\prod\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.