8 Sucessões convergentes

SUCESSÃO CONVERGENTE

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X converge para $x \in X$ se $(\forall V \in \mathcal{V}_x)\ \ (\exists p \in \mathbb{N})\ \ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geq p \ \ \Rightarrow \ \ x_n \in V$.

Diz-se então que x é um limite da sucessão (x_n).

Uma sucessão em $(X, \mathcal{T})$ que convirja para algum $x \in X$ diz-se uma sucessão convergente.

Um ponto $y \in X$ é ponto aderente de (x_n) se $(\forall V \in \mathcal{V}_x)$ $(\forall p \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}) :$ $n \geq p$ e $x_n \in V$.

Lema. *Um ponto y de $(X, \mathcal{T})$ é um ponto aderente de uma sucessão (x_n) em X se e só se*

$$y \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n\, ;\, n \geq p\}}.$$

OBSERVAÇÕES.

(1) Uma sucessão pode convergir para mais do que um ponto.

(2) Se x é um limite de (x_n), então é ponto aderente de (x_n). O recíproco não se verifica.

(3) Toda a sucessão constante – ou constante a partir de alguma ordem – igual a x é convergente, e converge para x.

EXEMPLOS.

(1) Num espaço discreto uma sucessão é convergente se e só se é constante a partir de alguma ordem.

(2) Num espaço indiscreto toda a sucessão é convergente, e converge para todo o ponto do espaço.

Proposição. *Se $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ é uma função contínua e (x_n) é uma sucessão que converge para x em X, então $f(x_n)$ converge para $f(x)$ em Y.*

Demonstração. Seja $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Por definição de função contínua, existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $f(U) \subseteq V$. Como $x_n \to x$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $x_n \in U$. Logo, se $n \geq p$, $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$. ∎

Proposição. *Se A é um subconjunto de $(X, \mathcal{T})$ e (x_n) é uma sucessão em A que converge para x em X, então $x \in \overline{A}$.*

Demonstração. Se $V \in \mathcal{V}_x$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, $x_n \in V$. Como todos os termos da sucessão pertencem a A, concluímos que, para $n \geq p$, $x_n \in V \cap A$, logo $V \cap A \neq \emptyset$ e então $x \in \overline{A}$. ∎