SUBCONJUNTO CONEXO

Um subconjunto A de $(X, \mathcal{T})$ diz-se conexo se o subespaço $(A, \mathcal{T}_A)$ for conexo.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathrm{card} X \leq 1$, X é um espaço conexo.

(2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são subconjuntos desconexos de $\mathbb{R}$.

(3) Se X é um espaço discreto, então X é conexo se e só se tem quando muito um ponto.

(4) Se X é um espaço indiscreto, então X é conexo.

(5) Se X é um conjunto infinito munido da topologia cofinita, então X é conexo.

Proposição. *Se A é um subconjunto de $(X, \mathcal{T})$ denso e conexo, então $(X, \mathcal{T})$ é conexo.*

Demonstração. Se B for um subconjunto aberto e fechado de X, $B \cap A$ é um subconjunto aberto e fechado de A. Como A é conexo, $B \cap A = \emptyset$ ou $B \cap A = A$. Se se verificar a primeira igualdade, A é um subconjunto de $X \setminus B$, que é fechado em X. Logo $X = \overline{A} \subseteq X \setminus B$ e então $B = \emptyset$. Se $B \cap A = A$, então $A \subseteq B$, logo, porque B é fechado, $X = \overline{A} \subseteq B$ e então $B = X$. ∎

Corolário. *Se A é um subconjunto conexo de $(X, \mathcal{T})$ e B é um subconjunto de X tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é conexo.*

Demonstração. Se considerarmos B com a topologia de subespaço, A é um subconjunto denso de B. Como A é conexo, concluímos que B é conexo, pela proposição anterior. ∎

Proposição. *Sejam A e B subconjuntos de $(X, \mathcal{T})$, com A conexo. Se*

$$A \cap int(B) \neq \emptyset \neq A \cap int(X \setminus B),$$

então $A \cap \mathrm{fr} B \neq \emptyset$.

Demonstração. Como $X = \mathrm{int}(B) \cup \mathrm{fr} B \cup \mathrm{int}(X \setminus B)$, e então

$$A = (A \cap \mathrm{int}(B)) \cup (A \cap \mathrm{fr} B) \cup (A \cap \mathrm{int}(X \setminus B)),$$

se $A \cap \mathrm{fr} B = \emptyset$, concluímos que A se pode escrever como reunião de dois abertos disjuntos: $A = (A \cap \mathrm{int}(B)) \cup (A \cap \mathrm{int}(X \setminus B))$. Logo um destes tem que ser vazio, o que contraria a hipótese. ∎

Proposição. *Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos conexos de $(X,\mathcal{T})$. Se $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, então $\bigcup_{i\in I} A_i$ é um subconjunto conexo de $(X,\mathcal{T})$.*

Demonstração. Seja B um subconjunto aberto e fechado de $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Se B for não vazio, existe $j \in I$ tal que $B \cap A_j \neq \emptyset$. Logo, como A_j é, por hipótese, conexo e $B \cap A_j$ é aberto e fechado em A_j, conclui-se que $B \cap A_j = A_j$. Como, para todo o $i \in I$, $A_j \cap A_i \neq \emptyset$, $B \cap A_i \neq \emptyset$ e então concluímos que $B = A_i$. Portanto $B = A$ e então A é conexo. ∎

Corolário.

(1) Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos conexos de $(X,\mathcal{T})$ que se intersectam dois a dois (isto é, para todo o par i,j em I, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$), então $\bigcup_{i\in I} A_i$ é um subconjunto conexo de $(X,\mathcal{T})$.

(2) Se $(X,\mathcal{T})$ é um espaço topológico tal que, para cada par de pontos x e y de X, existe um subconjunto conexo que os contém, então $(X,\mathcal{T})$ é conexo.

Teorema. *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se é um intervalo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ não for um intervalo, existem $x,y,z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y < z$, $x,z \in A$ e $y \notin A$. Então A é reunião de dois subconjuntos abertos, não vazios, disjuntos:

$$A = (A \cap]-\infty, y[) \cup (A \cap]y, +\infty[).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que I é um intervalo. Suponhamos, por redução ao absurdo, que existem subconjuntos A e B abertos e fechados em I, disjuntos, não vazios, cuja reunião é I. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Suponhamos que $a < b$. O intervalo $[a,b]$ está contido em I, porque I é um intervalo e $a,b \in I$. Sejam $A' = A \cap [a,b]$ e $B' = B \cap [a,b]$, e seja $b' = \inf B'$. Como A' e B' são fechados em $[a,b]$, também são fechados em $\mathbb{R}$. Logo $b' \in B'$ e então $a < b'$. Sejam $A'' = A' \cap [a,b']$ e $a'' = \sup A''$. Então $a'' \in A''$, porque A'' é fechado, logo $a'' < b'$. Podemos então concluir que o intervalo aberto $]a'', b'[$ não intersecta A' nem B', donde não intersecta I, o que é absurdo. ∎

Proposição. *Se $f : X \to Y$ é contínua e sobrejectiva e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Se $B \subseteq Y$ é aberto e fechado em Y, também $f^{-1}(B)$ é aberto e fechado em X. Logo, porque X é conexo, $f^{-1}(B) = \emptyset$, caso em que necessariamente $B = \emptyset$, ou $f^{-1}(B) = X$, caso em que $B = f(f^{-1}(B)) = f(X) = Y$. ∎