Corolário.

(1) Se $f : X \to Y$ é contínua e A é um subconjunto conexo de X, então $f(A)$ é um subconjunto conexo de Y.

(2) Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então X é conexo se e só se Y o é.

(3) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é conexo, então $f(X)$ é um intervalo.

(4) Em $\mathbb{R}^2$, com a métrica euclidiana, qualquer bola aberta é conexa.

Teorema. *Se $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ são espaços não vazios e $\mathcal{T}$ é a topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$, então $(X \times Y, \mathcal{T})$ é conexo se e só se $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ o são.*

Demonstração. Se $X \times Y$ for conexo, então, porque as projecções são funções contínuas e sobrejectivas, X e Y são conexos.

Suponhamos agora que X e Y são conexos. Seja $(a, b) \in X \times Y$. Os subconjuntos $\{a\} \times Y$ e $X \times \{b\}$ de $X \times Y$ são conexos, porque são imagens, por funções contínuas, de Y e X, respectivamente. Além disso, a sua intersecção é não vazia (é igual a $\{(a, b)\}$), logo o subconjunto $S_{(a,b)} = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$ é conexo, porque é a reunião de dois conexos que se intersectam. Para concluir que $X \times Y$ é conexo, basta agora reparar que $X \times Y = \bigcup_{(a,b)\in X\times Y} S_{(a,b)}$ e que, para cada par de pontos $(a, b), (a', b') \in X \times Y$, $S_{(a,b)} \cap S_{(a',b')} \neq \emptyset$. ∎

EXEMPLOS. $\mathbb{R}^2$ é conexo; o complementar de um ponto em $\mathbb{R}^2$ é ainda conexo, mas o complementar de uma recta é desconexo.

COMPONENTE CONEXA

Se X é um espaço topológico e $x \in X$, chama-se componente conexa de x ao maior conexo que contém x (e será designada por C_x).

`[Nota: Como a família de todos os subconjuntos conexos de` X `que contêm` x `é uma família de conexos com intersecção não vazia, a sua reunião é necessariamente o maior conexo que contém` x`.]`

Proposição.

(1) Se $x, y \in X$, então $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$.

(2) Toda a componente conexa é fechada (mas pode não ser aberta).

EXEMPLOS.

(1) Se X é um espaço discreto, então $C_x = \{x\}$.

(2) Se X é um espaço indiscreto, então $C_x = X$, qualquer que seja $x \in X$.

(3) Se considerarmos $\mathbb{Q}$ com a topologia euclidiana e $x \in \mathbb{Q}$, então $C_x = \{x\}$.

Corolário.

(1) Se $f : X \to Y$ é uma função contínua, então a imagem por f de uma componente conexa está contida numa componente conexa (mas pode não coincidir com ela).

(2) Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e C_x é a componente conexa de x em X, então $f(C_x)$ é a componente conexa de $f(x)$ em Y.

(3) Dois espaços homeomorfos têm o mesmo número de componentes conexas.

(4) Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços homeomorfos. Se $x \in X$ e $X \setminus \{x\}$ tem n componentes conexas, então existe $y \in Y$ tal que $Y \setminus \{y\}$ tem n componentes conexas.

ESPAÇO CONEXO POR ARCOS

(1) Dado um espaço topológico X, um caminho em X é uma aplicação contínua $f : [0,1] \to X$. Diz-se que um caminho f vai de a a b se $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

(2) Um espaço topológico X diz-se conexo por arcos se dados quaisquer pontos a e b de X existir um caminho em X de a a b.

[Todo o espaço conexo por arcos é conexo, mas nem todo o espaço conexo é conexo por arcos. Por exemplo, o subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$X := \{(x, \sin(\frac{1}{x})\, ;\, x > 0\} \cup \{(0, y)\, ;\, y \in [-1, 1]\}$$

é conexo mas não é conexo por arcos.]

EXEMPLOS. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se é um intervalo e se e só se é conexo por arcos.

Toda a bola aberta em $\mathbb{R}^2$ é conexa por arcos.

Proposição. *Todo o subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$ é conexo por arcos.*

Demonstração. Sejam A um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$ e $a \in A$. Consideremos o conjunto $U = \{x \in A\, ;\, \text{existe um caminho de } a \text{ a } x \text{ em } A\}$. Então U e $A \setminus U$ são abertos, logo $U = A$. ∎