# 11 Espaços topológicos compactos

---

**COBERTURA ABERTA**

Seja $X$ um conjunto.

(1) Uma família $(U_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de $X$ diz-se uma cobertura de $X$ se $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

(2) Se $(U_i)_{i\in I}$ é uma cobertura de $X$ e $J$ é um subconjunto de $I$ tal que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$, então $(U_j)_{j\in J}$ diz-se uma subcobertura de $(U_i)_{i\in I}$; diz-se finita se $J$ for um conjunto finito.

(3) Uma cobertura $(U_i)_{i\in I}$ de um espaço topológico $X$ diz-se uma cobertura aberta de $X$ se todo o conjunto $U_i$ for aberto em $X$.

---

**ESPAÇO COMPACTO**

Um espaço topológico diz-se compacto se toda a sua cobertura aberta tiver uma subcobertura finita.

---

**Proposição.** *Um espaço $X$ é compacto se e só se, sempre que $(F_i)_{i\in I}$ for uma família de subconjuntos fechados de $X$ tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, existe $J \subseteq I$, finito, tal que $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.* ■

**Proposição.** *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $Y$ um subconjunto de $X$ e $\mathcal{T}_Y$ a topologia de subespaço em $Y$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) O espaço $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é compacto.*

*(ii) Sempre que $(U_i)_{i\in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$ tal que $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, existe um subconjunto finito $J$ de $I$ tal que $Y \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$.* ■

**Teorema de Heine-Borel.** *Dado um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, de toda a cobertura aberta de $[a, b]$ é possível extrair uma subcobertura finita.*

*Demonstração.* Seja $(U_i)_{i\in I}$ uma família de abertos de $\mathbb{R}$ tais que $[a, b] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Sejam

$$Y = \{x \in [a, b]\,;\, [a, x] \text{ está contido numa reunião finita de elementos de } (U_i)_{i\in I}\}$$

e $y = \sup Y$. Existe $j \in I$ tal que $y \in U_j$. Como $y \in \overline{Y}$, existe $x \in Y \cap U_j$. Como $x \in Y$, $[a, x] \subseteq \bigcup_{k=1,\cdots,n} U_{i_k}$, logo $[a, y] \subseteq \bigcup_{k=1,\cdots,n} U_{i_k} \cup U_j$ e então $y \in Y$. Se $y = b$, temos o resultado provado. Se $y < b$, chegamos a uma contradição, pois qualquer ponto de $U_j$ entre $y$ e $b$ ainda pertence a $Y$, o que contraria o facto de $y$ ser o supremo do conjunto. ∎

**EXEMPLOS.**

(1) Todo o espaço finito é compacto.

(2) Se $X$ é um espaço discreto, então $X$ é compacto se e só se é finito.

(3) Todo o espaço indiscreto é compacto.

(4) $\mathbb{R}$ não é compacto. O espaço $]0,1]$, com a topologia euclidiana, não é compacto.