Proposição.

(1) Todo o subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.

(2) Todo o subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.

Demonstração. (1) Sejam X um espaço de Hausdorff, K um subespaço compacto de X e $x \in X \setminus K$. Queremos provar que $x \notin \overline{K}$. Para cada $y \in K$ existem abertos U_y e V_y tais que $x \in U_y$, $y \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$. A família $(V_y)_{y \in K}$ constitui uma cobertura aberta de K, que, por K ser compacto, tem uma subcobertura finita $(V_y)_{y \in F}$. Obtemos então considerar o conjunto aberto $\displaystyle\bigcap_{y \in F} U_y$, ao qual x pertence e que não intersecta $\displaystyle\bigcup_{y \in F} V_y \supseteq K$. Logo $x \notin \overline{K}$, como queríamos demonstrar.

(2) Suponhamos que X é compacto e que F é um subespaço fechado de X. Qualquer que seja a família $(U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abertos de X que cubra F, a família $(U_i)_{i \in I \cup \{0\}}$ obtida juntando à primeira o conjunto aberto $U_0 = X \setminus F$ é uma cobertura aberta de X. Logo, porque X é compacto, tem uma subcobertura finita, o que prova em particular que F é coberto por uma parte finita da família (U_i). ∎

Corolário. *Se o espaço X é compacto e de Hausdorff e Y é um subespaço de X, então Y é compacto se e só se é fechado em X.* ∎

Proposição. *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e A é um subespaço compacto de X, então $f(A)$ é um subespaço compacto de Y.*

Demonstração. Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de Y que cobre $f(A)$, então $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ é uma família de abertos de X que cobre A. Como A é compacto, existe um subconjunto finito J de I tal que $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$. Logo, $f(A) \subseteq \displaystyle\bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, o que prova que $f(A)$ é compacto. ∎

Corolário.

(1) Se X é um espaço compacto e Y um espaço separado, então toda a aplicação contínua $f : X \to Y$ é fechada.

(2) Se X é compacto e Y é separado, então toda a aplicação bijectiva e contínua $f : X \to Y$ é um homeomorfismo. ∎

Teorema de Tychonoff. *Sejam X e Y espaços topológicos não vazios. O espaço produto $X \times Y$ é compacto se e só se X e Y são compactos.*

Demonstração. Se X e Y são não vazios, as projecções p_X e p_Y são aplicações sobrejectivas. Logo, se $X \times Y$ é compacto, $p_X(X \times Y) = X$ e $p_Y(X \times Y) = Y$ são compactos.

Reciprocamente, sejam X e Y compactos e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$. Seja $x \in X$. Para cada $y \in Y$ existe $U_{(x,y)} \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \in U_{(x,y)}$. Por construção da topologia produto, existem abertos $A_{(x,y)}$ e $B_{(x,y)}$ de X e Y respectivamente tais que $(x, y) \in A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} \subseteq U_{(x,y)}$. Obtemos assim uma cobertura aberta $(B_{(x,y)})_{y \in Y}$ de Y, a qual, como Y é compacto, tem uma subcobertura finita $(B_{(x,y)})_{y \in Y_x}$. O conjunto $A_x = \bigcap_{y \in Y_x} A_{(x,y)}$ é um aberto de X (porque intersecção finita de abertos) ao qual x pertence. Façamos agora esta construção para todo o $x \in X$. Obtemos uma cobertura aberta $(A_x)_{x \in X}$, que, por X ser compacto, tem uma subcobertura finita $(A_x)_{x \in X_0}$. É fácil ver agora que a família finita $(U_{(x,y)})_{x \in X_0,\, y \in Y_x}$ é uma cobertura aberta de $X \times Y$, pois, para cada $(a, b) \in X \times Y$, existem $x \in X_0$ e $y \in Y_x$ tais que $a \in A_x$ e $b \in B_{(x,y)}$; logo, $(a, b) \in A_x \times B_{(x,y)} \subseteq A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} \subseteq U_{(x,y)}$. ∎

Teorema de Kuratowski-Mrowka. *Um espaço topológico X é compacto se e só se, para cada espaço Y, a projecção $p_Y : X \times Y \to Y$ é fechada.* ∎

Proposição. *Todo o espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico compacto e $a \in X$. A cobertura aberta $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(a)$ tem uma subcobertura finita, isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X = B_m(a)$. Logo, X é limitado. ∎

Teorema. *Um subespaço de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Demonstração. Se $X \subseteq \mathbb{R}$ for fechado e limitado, então é subconjunto fechado de um intervalo $[a, b]$, que é compacto. Logo, é compacto.

Suponhamos agora que $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Então é fechado em $\mathbb{R}$, porque $\mathbb{R}$ é separado e é limitado, como já vimos. ∎