12 Sucessões convergentes e de Cauchy em espaços métricos

Lema. *Num espaço métrico uma sucessão não pode convergir para dois pontos distintos.* ∎

Teorema. *Se X é um espaço métrico e A é um subconjunto de X, então um ponto x de X pertence a $\overline{A}$ se e só se existe uma sucessão em A que converge para x em X.*

Demonstração. Já vimos que, em qualquer espaço topológico, se x é limite de uma sucessão que toma valores em $A \subseteq X$, então $x \in \overline{A}$. Falta-nos então ver que, se X é um espaço métrico, o recíproco também se verifica. Sejam X um espaço métrico, $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a bola aberta $B_{\frac{1}{n}}(x)$ intersecta A. Seja $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$. Verifica-se agora facilmente que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que toma valores em A, converge para x. ∎

Corolário. *Um subconjunto A de um espaço métrico X é fechado se e só se toda a sucessão convergente com valores em A tem o seu limite em A.* ∎

Teorema. *Se X e Y são espaços métricos e $f : X \to Y$ é uma função, então f é contínua se e só se, sempre que (x_n) é uma sucessão em X que converge para x, a sucessão $(f(x_n))$ converge para $f(x)$.*

Demonstração. Para toda a função contínua f entre espaços topológicos, se (x_n) converge para x, então $(f(x_n))$ converge para $f(x)$, como provámos atrás. Resta-nos provar que esta condição caracteriza as funções contínuas entre espaços métricos. Suponhamos que X e Y são espaços métricos e que $f : X \to Y$ é tal que, se (x_n) converge para x em X, então $(f(x_n))$ converge para $f(x)$ em Y. Seja B um fechado de Y. Queremos porvar que a imagem inversa por f, $f^{-1}(B)$ é fechada em X. Seja $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. Pelo teorema anterior, existe uma sucessão (x_n) em $f^{-1}(B)$ que converge para x. Logo, por hipótese, $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Como $(f(x_n))$ é uma sucessão que toma valores em B e B é por hipótese fechado, podemos concluir que o seu limite, $f(x)$, ainda pertence a B. Logo $x \in f^{-1}(B)$ e então este conjunto é fechado, como queríamos provar. ∎

Proposição. *Num espaço métrico todo o ponto aderente a uma sucessão é limite de uma subsucessão da sucessão dada.*

Demonstração. Seja a um ponto aderente da sucessão (x_n) no espaço métrico X. Vamos usar recorrência para construir uma subsucessão de (x_n) que convirja para a. Para $n = 1$, existe $p(1) \in \mathbb{N}$ tal que $x_{p(1)} \in B_1(a)$, por definição de ponto aderente e uma vez que $B_1(a)$ é uma vizinhança de a. Para $n = 2$, existe $p(2) \in \mathbb{N}$ tal que $p(2) > p(1)$ e $x_{p(2)} \in B_{\frac{1}{2}}(a)$, por definição de ponto aderente. Definido $p(k)$ para $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $p(k+1) \in \mathbb{N}$ de forma que $p(k+1) > p(k)$ e $x_{p(k+1)} \in B_{\frac{1}{k+1}}(a)$. A sucessão assim definida é, por construção, uma subsucessão de (x_n) que converge para a. ∎

SUCESSÃO DE CAUCHY

Uma sucessão (x_n) num espaço métrico (X, d) diz-se uma sucessão de Cauchy se verificar a seguinte condição: $(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists p \in \mathbb{N})\ \ :\ \ (\forall n, m \in \mathbb{N})\ \ n \geq p,\ m \geq p \ \ \Rightarrow\ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$

Proposição.

(1) Toda a sucessão convergente num espaço métrico é de Cauchy.

(2) Toda a sucessão de Cauchy é limitada.

Demonstração. (1) Seja (x_n) uma sucessão que converge para x no espaço métrico (X, d), e seja $\varepsilon > 0$. Por definição de sucessão convergente, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, se $n \geq p$ e $m \geq p$, obtemos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy no espaço métrico (X, d).
Para $\varepsilon = 1$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq p$, então $d(x_n, x_m) < 1$. Então a bola aberta $B_1(x_p)$ contém todos os termos da sucessão de ordem igual ou superior a p. Resta-nos agora limitar os restantes termos $x_1, \cdots, x_{p-1}$, que são em número finito. Podemos então considerar $r = \max\{d(x_i, x_p)\,;\, i \leq p\} + 1$. É óbvio que todos os termos da sucessão se encontram na bola aberta $B_r(x_p)$ e então a sucessão é limitada. ∎