
SUBESPAÇO NORMADO
(1) Se X é um espaço normado, um seu subespaço normado é um subespaço vectorial equipado com a norma induzida pela norma de X.

(2) Dado $Z \subseteq X$, chama-se subespaço linear gerado por Z a

$$\text{lin}Z = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \ : \ z_k \in Z, \, \lambda_k \in K, \, n = 1, 2, \cdots\}$$

(que é o menor subespaço que contém Z).

Se X é um espaço normado, chamamos `bola unitária` à bola aberta de raio 1 e centro 0, que denotamos por D (ou por $D(X)$ se estivermos a trabalhar com mais do que um espaço).

Proposição. *Seja V um espaço vectorial.*

(1) Dada uma norma $\|\cdot\|$ em V, a sua bola unitária $D = \{x \in X \, ; \, \|x\| < 1\}$ tem as seguintes propriedades:

(a) $\forall x, y \in D \; \forall \lambda, \mu \in K \; |\lambda| + |\mu| \leq 1 \;\Rightarrow\; \lambda x + \mu y \in D$;

(b) $\forall x \in D \; \exists \varepsilon > 0 \; x + \varepsilon D \subseteq D$;

(c) $\forall x \in V \; x \neq 0 \; \exists \lambda, \mu \in K \; : \; \lambda x \in D \; \wedge \; \mu x \notin D$.

(2) Se $D \subseteq V$ satisfizer as condições (a)-(c), então

$$\|x\| := \inf\{t \, ; \, t > 0 \ e \ x \in tD\}$$

define uma norma em X tal que D é a sua bola unitária.

OBSERVAÇÃO. Num espaço normado X as bolas abertas são completamente determinadas por D; de facto

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall a \in X \;\; B_\varepsilon(a) = a + \varepsilon D.$$

OPERADOR LINEAR/OPERADOR LINEAR LIMITADO
(1) Se X e Y são espaços normados sobre o mesmo corpo, chama-se operador linear de X em Y a uma função linear $T : X \to Y$; isto é

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2),$$

para todo o par de pontos x_1, x_2 de X e todo o par de escalares λ_1, λ_2.
Se $Y = K$, T diz-se uma funcional linear.

(2) Um operador linear $T : X \to Y$ diz-se limitado se

$$\exists N > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \|T(x)\| \leq N\|x\|.$$

Dados espaços normados X e Y, designamos o espaço vectorial dos operadores lineares de X em Y por $\mathsf{F}(X, Y)$, e o seu subespaço vectorial dos operadores lineares limitados por $\mathsf{L}(X, Y)$. Dado um espaço normado X, denotamos o espaço vectorial das suas funcionais lineares por X' e o seu subespaço das funcionais lineares limitadas por X^*.

Teorema. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *T é contínuo;*

(ii) *T é contínuo nalgum ponto de X;*

(iii) *T é limitado.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) é óbvio.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se T é contínuo em $x_0 \in X$, então, tomando $\varepsilon = 1$,

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \|x - x_0\| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \|T(x) - T(x_0)\| < 1.$$

Logo, se $y \in X$ for tal que $\|y\| < \delta$, então, considerando $x = x_0 + y$, temos que $\|x - x_0\| = \|y\| < \delta$, logo $\|T(y)\| = \|T(x - x_0)\| = \|T(x) - T(x_0)\| < 1$. Portanto, se $z \in X$ e $z \neq 0$,

$$\text{como } z = \frac{2\|z\|}{\delta} \, \frac{\delta z}{2\|z\|} \text{ e } \Big\|\frac{\delta z}{2\|z\|}\Big\| = \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ temos que } \|T(z)\| = \frac{2\|z\|}{\delta} \, \Big\|T\Big(\frac{\delta z}{2\|z\|}\Big)\Big\| < \frac{2}{\delta}\|z\|.$$

Temos então que T verifica a condição requerida tomando $N = \frac{2}{\delta}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Vamos em seguida provar que todo o operador linear limitado é uma função uniformemente contínua. Sabemos, por hipótese, que existe $N > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq N\|x\|$, para todo o $x \in X$. Então, se $\varepsilon > 0$, o valor $\delta = \frac{\varepsilon}{N} > 0$ é tal que, para $x, y \in X$,

$$\|x - y\| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq N\|x - y\| < N\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

■

Corolário. *Se X e Y são espaços normados e $T : X \to Y$ é um operador linear, então T é um homeomorfismo se e só se T é uma bijecção tal que T e a sua função inversa são operadores lineares limitados.*

Demonstração. Para concluir o resultado basta-nos provar que, se T é um operador linear e bijectivo, com função inversa $T_1 : Y \to X$, então T_1 é um operador linear. Para provar isso, sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ e $y_1, y_2 \in Y$. Sejam x_1, x_2 (os únicos) elementos de X tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Então $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Logo, por definição de inversa, $T_1(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 T_1(y_1) + \lambda_2 T_1(y_2)$. ∎

Duas `normas` $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num mesmo espaço vectorial V dizem-se `equivalentes` se forem topologicamente equivalentes, isto é, se definirem a mesma topologia em V.

Corolário. *Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em V são equivalentes se e só se*

$$\exists c > 0 \;\; \exists d > 0 \; : \; \forall x \in V \;\; \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \leq d\|x\|_1.$$

Demonstração. As duas normas são equivalentes se e só se, por definição, as funções identidade $(V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ e $(V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1)$ são isomorfismos, o que é equivalente – uma vez que são operadores lineares – a serem operadores lineares limitados. Isto é,

$$\exists N > 0 \; : \; \|x\|_2 \leq N\|x\|_1 \text{ e } \exists M > 0 \; : \; \|x\|_1 \leq M\|x\|_2.$$

É agora trivial tirar a conclusão pretendida. ∎

Corolário. *Se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas equivalentes em V, então $(V, \|\cdot\|_1)$ é um espaço completo se e só se $(V, \|\cdot\|_2)$ o for.*

Demonstração. Basta notar que as funções identidade $(V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ e $(V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1)$ são – como provámos no teorema acima – uniformemente contínuas e usar o resultado do Exercício 100 (d). ∎

Se X e Y são espaços normados, podemos munir o espaço vectorial $\mathsf{L}(X, Y)$ dos operadores lineares limitados de X em Y de uma norma, do seguinte modo:

$$\|T\| := \inf\{N > 0 \; ; \; \forall x \in X \;\; \|T(x)\| \leq N\|x\|\}.$$

OBSERVAÇÃO. Veremos na aula teórico-prática que a função assim definida é uma norma e que se tem ainda

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \; ; \; \|x\| \leq 1\}.$$

Aqui vamos apenas observar uma outra propriedade importante de $\|T\|$: o número real $\|T\|$ é o mínimo do conjunto $\{N > 0 \; ; \; \forall x \in X \;\; \|T(x)\| \leq N\|x\|\}$, isto é, tem-se que

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|.$$

Suponhamos, por redução ao absurdo, que esta desigualdade não é válida, isto é, que existe $x \in X$ tal que $\|T(x)\| > \|T\| \, \|x\|$. Então fazendo $M = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ temos que $M > \|T\|$ e que qualquer valor inferior a M, nomeadamente qualquer valor entre M e $\|T\|$ não pertence ao conjunto em causa. Logo $\|T\|$ não será o ínfimo do conjunto, o que é absurdo.