Proposição. *Toda a sucessão de Cauchy com uma subsucessão convergente é convergente.*

Demonstração. Seja x o limite de uma subsucessão $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ da sucessão de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Queremos provar que (x_n) também converge para x. Seja $\varepsilon > 0$. Porque $(x_{\varphi(n)})$ converge para x, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, porque (x_n) é de Cauchy, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq q$, então $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se considerarmos agora $r = \max\{\varphi(p), q\}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq r$, obtemos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(p)}) + d(x_{\varphi(p)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

logo (x_n) converge para x. ∎

Corolário. *Se (x_n) é uma sucessão num espaço métrico, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (x_n) *é convergente;*

(ii) (x_n) *é de Cauchy e tem um ponto aderente;*

(iii) (x_n) *é de Cauchy e tem uma subsucessão convergente.* ∎

13 Espaços métricos completos

ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO
Um espaço métrico (X, d) diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em X for convergente.

EXEMPLOS.

(1) $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

(2) $\mathbb{Q}$ e $]0, 1]$, com a métrica euclidiana, não são espaços completos.

Proposição.

(1) Se Y é um subespaço completo de um espaço métrico X, então Y é fechado em X.

(2) Se X é um espaço métrico completo e Y é um subconjunto de X, então Y é um subespaço métrico completo se e só se é fechado em X.

Demonstração. (1) Se $x \in \overline{Y}$, existe uma sucessão (y_n) em Y que converge para x. A sucessão (y_n) é então de Cauchy, logo converge em Y para um ponto $y \in Y$. Nesse caso também converge em X para y e então podemos concluir que $x = y \in Y$, pela unicidade do limite.

(2) Temos apenas que provar que um subconjunto fechado Y de um espaço completo X é um espaço completo. Seja (y_n) uma sucessão de Cauchy em Y. Então (y_n) é uma sucessão de Cauchy em X, logo converge para $x \in X$, visto que X é completo. Como Y é fechado, concluímos que $x \in Y$ e então (y_n) é convergente em Y. ∎

Proposição. *Todo o espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico compacto e (x_n) uma sucessão de Cauchy em X. Se (x_n) não for convergente, então não tem nenhum ponto aderente. Logo, para cada $a \in X$, existe $U_a \in \mathcal{T}$ tal que $a \in U_a$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n$, então $x_m \notin U_a$. A cobertura aberta assim obtida $(U_a)_{a \in X}$ tem uma subcobertura finita: $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}$. Para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, por construção da cobertura existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n_i$, então $x_m \notin U_{a_i}$. Logo podemos concluir que, se $m \geq \max\{n_i\,;\, i = 1, \cdots, k\}$, $x_m \notin \bigcup U_{a_i} = X$, o que é absurdo. ∎