Teorema. *Se X é um conjunto não vazio e (Y, d) um espaço métrico, então o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ das funções limitadas de X em Y, munido da métrica do supremo*

$$\rho(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x))\,;\, x \in X\},$$

é um espaço completo se e só se (Y, d) é completo.

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Seja (y_n) uma sucessão de Cauchy em Y. Consideremos as funções constantes $f_n : X \to Y$ com $f_n(x) = y_n$. A sucessão de funções (f_n) é de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$, pois $\rho(f_n, f_m) = d(y_n, y_m)$. Logo a sucessão (f_n) converge para uma função $f : X \to Y$ em $\mathcal{L}(X, Y)$. Sejam $x \in X$ e $y = f(x)$. Então, como $d(y_n, y) \le \rho(f_n, f)$, é agora fácil concluir que (y_n) converge para y em (Y, d).

$(\Leftarrow)$: Seja $(f_n : X \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$. Para cada $x \in X$, $d(f_n(x), f_m(x)) \le \rho(f_n, f_m)$; logo $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em Y. Como Y é completo, $(f_n(x))$ é uma sucessão convergente. Designando por $f(x)$ o seu limite, construímos uma função $f : X \to Y$. Falta-nos provar que a sucessão (f_n) converge para f e que f é uma função limitada.

Seja $\varepsilon > 0$. Porque a sucessão (f_n) é de Cauchy, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \ge p$ e $m \ge p$, então $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Para cada $x \in X$, como $f_n(x) \to f(x)$ em Y, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \ge q$, então $d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, se $n \ge p$, temos que

$$d(f_n(x), f(x)) \le d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Considerando $m = \max\{p, q\}$, obtemos

$$d(f_n(x), f(x)) \le d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

o que prova que

$$\rho(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x))\,;\, x \in X\} \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

É agora imediato que f é limitada. ∎

Proposição. *Se (X, d') e (Y, d) são espaços métricos, então o espaço métrico $\mathcal{C}^*(X, Y)$ das funções limitadas e contínuas de (X, d) em (Y, d'), munido da métrica do supremo, é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $(f_n : (X, d) \to (Y, d'))_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções contínuas e seja $f : (X, d) \to (Y, d')$ o seu limite em $\mathcal{L}(X, Y)$. Queremos provar que $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \ge p$, então $\rho(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. A continuidade da função f_p em x garante-nos que existe $\delta > 0$ tal que, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta$, então $d'(f_p(x), f_p(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta$, temos que

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f_p(x)) + d'(f_p(x), f_p(x')) + d'(f_p(x'), f(x')) \leq \rho(f, f_p) + \frac{\varepsilon}{3} + \rho(f, f_p) = \varepsilon.$$

∎

Corolário. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. O espaço $\mathcal{C}^*(X, Y)$ é um espaço métrico completo se e só se (Y, d') é completo.*

Demonstração. Para provar $(\Rightarrow)$ usa-se exactamente a argumentação usada no Teorema anterior, pois as funções constantes são também contínuas.

$(\Leftarrow)$: Se (Y, d') for completo, então $\mathcal{C}(X, Y)$ é um subespaço fechado do espaço completo $\mathcal{L}(X, Y)$. ∎

OBSERVAÇÃO. Se considerarmos o seguinte subespaço de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})\,;\, \rho(f, g) \leq 1\}$$

onde g é a função nula, então A é completo e limitado, mas não é compacto.