Teorema. *Todo o espaço métrico é subespaço denso de um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico. Consideremos no conjunto

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (x_n) \text{ é uma sucessão de Cauchy em } X\}$$

a relação de equivalência: $(x_n) \sim (y_n)$ se a sucessão $(d(x_n, y_n))$ convergir para 0 em $\mathbb{R}^+$. Seja Y o conjunto das classes de equivalência desta relação; isto é,

$$Y = \{[(x_n)]\ ;\ (x_n) \text{ é uma sucessão de Cauchy em } X\}.$$

Para cada par de elementos de Y, $[(x_n)], [(y_n)]$, definimos

$$\gamma([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

(Note-se que, se (x_n) e (y_n) são sucessões de Cauchy, então $(d(x_n, y_n))$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}^+$, logo converge.)

(a) Vejamos em primeiro lugar que a função γ está bem definida, isto é, que a expressão acima não depende dos representantes das classes escolhidos: se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então

$$\begin{array}{rrcl} & d(x_n, y_n) & \leq & d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ \text{e} & d(x'_n, y'_n) & \leq & d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n). \end{array}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0$, concluímos pelo Teorema das Sucessões Enquadradas que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

(b) γ é uma métrica em Y:

(b1) $\gamma([(x_n)], [(y_n)]) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow [(x_n)] = [(y_n)]$.

(b2) $\gamma([(x_n)], [(y_n)]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \gamma([(x_n)], [(y_n)])$.

(b3)
$$\begin{aligned} \gamma([(x_n)], [(z_n)]) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = \gamma([(x_n)], [(y_n)]) + \gamma([(y_n)], [(z_n)]). \end{aligned}$$

(c) Podemos identificar X com um subespaço de Y através da função (injectiva)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & [(x)] \end{array}$$

(onde $[(x)]$ representa a classe de equivalência da sucessão constante igual a x). Como $\gamma([(x)], [(y)]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$, X tem a métrica de subespaço. Para verificar que X

é denso em Y, consideremos um elemento $[(x_n)]$ de Y. A sucessão de classes de equivalência das sucessões constantes

$$y^1 = [(x_1)], \cdots, y^k = [(x_k)], \cdots$$

converge para $[(x_n)]$ pois $\gamma([y^k], [(x_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_k, x_n)$, que sabemos tender para 0 quando k tende para $+\infty$, por definição de sucessão de Cauchy.

(d) Falta verificar que Y é um espaço completo. Para isso consideremos uma sucessão $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de Y, onde, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$y^k = [(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Isto é,

$$\begin{array}{lllllll}
y_1: & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots & x_n^1 & \cdots \\
y_2: & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & \cdots \\
y_3: & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
y_n: & x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Porque cada $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_k$ e $m \geq n_k$, então

$$d(x_n^k, x_m^k) < \frac{1}{k}.$$

Consideremos a sucessão $(x_{n_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em X e verifiquemos que é de Cauchy. Sejam $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{k} < \varepsilon$. Porque $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em Y, existe $p \in \mathbb{N}$, que podemos considerar maior ou igual a k, tal que, se $l \geq p$ e $m \geq p$, então

$$\gamma(y^l, y^m) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^l, x_n^m) < \frac{1}{k}.$$

Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq q$, então $d(x_n^l, x_n^m) \leq \frac{1}{k}$. Donde

$$d(x_{n_l}^l, x_{n_m}^m) \leq d(x_{n_l}^l, x_n^l) + d(x_n^l, x_n^m) + d(x_n^m, x_{n_m}^m) < \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \frac{1}{m} < \frac{3}{k} < \varepsilon.$$

Falta agora verificar que $y^n \to y = [(x_{n_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}]$; isto é, que $\lim_{n\to\infty} \gamma(y^n, y) = 0$. Mas

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(y^n, y) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} d(x_k^n, x_{n_k}^k) \leq \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (d(x_k^n, x_{n_n}^n) + d(x_{n_n}^n, x_{n_k}^k)) = 0,$$

por construção de $(x_{n_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$. ∎

14 Espaços métricos compactos e funções uniformemente contínuas

Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos.

FUNÇÃO UNIFORMEMENTE CONTÍNUA
Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ diz-se uniformemente contínua se

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) \ : \ (\forall x, x' \in X) \ d(x, x') < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Proposição. *A composição de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.* ■

Teorema. *Se (X, d) é um espaço métrico compacto e $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma função contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$ existe $\delta(x) > 0$ tal que, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta(x)$, então $d'(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Considerando, para cada $x \in X$, $r(x) := \frac{\delta(x)}{2}$, as bolas abertas $B_{r(x)}(x)$ formam uma cobertura aberta de X, que é compacto. Logo, existem $a_1, \cdots, a_n \in X$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r(a_i)}(a_i)$.
Sejam $\delta = \min\{r(a_i)\,;\, i = 1, \cdots, n\}$ e $x, x' \in X$ tais que $d(x, x') < \delta$. Existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x \in B_{r(a_j)}(a_j)$. Então

$$d(x', a) \leq d(x', x) + d(x, a) < \delta + r(a_j) \leq r(a_j) + r(a_j) = \delta(a_j).$$

Logo $d(x, a_j) < \delta(a_j)$ e $d(x', a_j) < \delta(a_j)$, e então

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f(a)) + d'(f(a), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

MÉTRICAS UNIFORMEMENTE EQUIVALENTES
Duas métricas d e d' em X dizem-se uniformemente equivalentes se as funções identidade $(X, d) \to (X, d')$ e $(X, d') \to (X, d)$ forem funções uniformemente contínuas.

`[E os espaços` (X, d) `e` (X, d') `dizem-se uniformemente equivalentes.]`

EXEMPLO. Sejam d_1, d_2 e d_∞ as métricas em $\mathbb{R}^2$ definidas no Exemplo 1.3.2. Os espaços métricos $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ e $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ são uniformemente equivalentes.