15 Espaços normados

ESPAÇO NORMADO
Chama-se espaço normado a um par $(V, \|\cdot\|)$, onde V é um espaço vectorial sobre um corpo K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ é uma função que verifica as seguintes condições, para $x, y \in V$ e λ um escalar (i.e. $\lambda \in K$):

(1) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

OBSERVAÇÕES.

(1) Sempre que se considerar um espaço normado sobre $\mathbb{C}$ dir-se-á `espaço normado complexo`.

(2) À função $\|\cdot\|$ chama-se `norma`.

(3) Todo o espaço normado é em particular um espaço métrico, com a métrica $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ definida por
$$d(x, y) = \|x - y\|.$$
Nesse caso a norma é recuperada de d através de $\|x\| = d(x, 0)$. Em particular, todo o espaço normado é um espaço topológico. Sempre que nos referirmos a propriedades de um espaço normado que dependam de uma métrica ou de uma topologia estamos a considerar a métrica e a topologia induzidas pela norma.

(4) Nem toda a métrica num espaço vectorial é definida por uma norma. De facto, dada uma métrica d num espaço vectorial, $\|x\| = d(x, 0)$ define uma norma se e só se, para $x, y, z \in V$ e λ escalar,
$$d(x, y) = d(x + z, y + z) \text{ e } d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

ESPAÇO DE BANACH
Um espaço de Banach é um espaço normado completo.

EXEMPLOS.

(1) $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, como espaços vectoriais, com a norma

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$; a estes espaços chamamos, respectivamente, `espaço real euclidiano` e `espaço complexo euclidiano`.

(2) Se X é um conjunto, o espaço vectorial $\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X)$, munido da `norma` (`do supremo` ou `uniforme`)

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \rho(f, 0)$$

é um espaço normado (completo).

(3) Se X é um espaço topológico, o espaço vectorial $\mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^*(X)$ das funções contínuas e limitadas de X em $\mathbb{R}$ é um espaço normado (completo) quando munido da norma do supremo. Em particular, se X é um espaço compacto, o espaço vectorial das funções contínuas $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é um espaço normado para a norma do supremo. Note-se que, como $f(X)$ é um compacto, $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$.

(4) Se $X = \mathbb{R}^n$ ou $X = \mathbb{C}^n$, a norma $\| \cdot \|_1$ definida por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

(Note-se que em $\mathbb{R}^n$ $\| \cdot \|_1$ é a norma definida pela métrica d_1.) A este espaço chama-se `espaço` (`real` ou `complexo`) l_1^n e à norma chama-se `norma` l_1.
De igual modo, podemos considerar o `espaço` l_∞^n com a `norma` l_∞ definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

(que corresponde à métrica d_∞ já estudada).

(5) Se $1 \le p < \infty$, definimos o espaço (real ou complexo) l_p^n como o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ munido da norma l_p:

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Note-se que l_2^n é o espaço euclidiano (de dimensão n).

(6) Em

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, ; \;\; f \text{ contínua e existem } a, b \in \mathbb{R} \text{ tais que } \{x \in \mathbb{R} \, ; \, f(x) \neq 0\} \subseteq [a, b]\}$$

definimos a norma

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

(7) Para $1 \leq p < \infty$, o `espaço` l_p consiste no conjunto das sucessões $x = (x_1, x_2, \cdots)$ tais que

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

A norma de um elemento $x \in l_p$ é

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

O `espaço` l_∞ é o espaço das sucessões limitadas munido da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|,$$

e c_0 é o espaço de todas as sucessões (de escalares) que convergem para 0, munido da norma $\| \cdot \|_\infty$.

(8) O espaço $\mathcal{C}^{(n)}(0,1)$ tem como pontos as funções $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ deriváveis até à ordem n e com derivadas (até à ordem n) contínuas e limitadas, e como norma

$$\|f\| = \sup\{\sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(t)| \; ; \; 0 < t < 1\}.$$

(9) O conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n, $f(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$, pode ser munido da norma

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} (k+1)|c_k|.$$