Teorema. *Se Y for um espaço de Banach, então $\mathsf{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $\mathsf{L}(X,Y)$. Então, para todo o $x \in X$, uma vez que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \le \|T_n - T_m\| \, \|x\|,$$

concluímos que $(T_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em Y, logo convergente. Designemos por $T(x)$ o seu limite. Definimos assim uma função $T : X \to Y$. Temos agora que verificar que T é um operador linear limitado e que $T_n \to T$. Dados $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$,

$$\begin{aligned}
T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda_1 T_n(x_1) + \lambda_2 T_n(x_2)) \\
&= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} T_n(x_2) \\
&= \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2),
\end{aligned}$$

logo T é um operador linear. Para verificar que é limitado, consideremos $\varepsilon > 0$. Porque (T_n) é de Cauchy, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \ge p$ e $m \ge p$, então $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Então, quaisquer que sejam $x \in X$ e $m \ge p$,

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T_m(x)\| &= \|(\lim_{n\to\infty} T_n(x)) - T_m(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} (T_n - T_m)(x)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(T_n - T_m)(x)\| \le \varepsilon \|x\|.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|T(x)\| \le \varepsilon\|x\| + \|T_m(x)\| \le (\varepsilon + \|T_m\|)\|x\|,$$

e então $T \in \mathsf{L}(X,Y)$; mas também se conclui da desigualdade anterior que $\|T - T_m\| \le \varepsilon$. Logo $T_m \to T$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema. *Se X, Y e Z são espaços normados e $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ são operadores lineares limitados, então $S \circ T : X \to Z$ é um operador linear limitado e $\|S \circ T\| \le \|S\|\|T\|$.* ∎

SÉRIE CONVERGENTE/SÉRIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

Dado um espaço normado X, uma série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ em X (isto é, com $x_k \in X$ para todo o $k \in \mathbb{N}$) diz-se:

(1) convergente para $x \in X$ se a sucessão das somas parciais $(s_n)_n = \big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\big)_n$ convergir para x, isto é

$$\lim_{n\to\infty} \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\Big\| = 0;$$

(2) absolutamente convergente se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_n\|$ convergir em $\mathbb{R}^+$.

Lema. *Num espaço de Banach toda a série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Basta-nos provar que a sucessão das somas parciais (s_n) de uma série absolutamente convergente $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ é uma sucessão de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=p+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$. Então, se $m \geq n \geq p$, $\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$. ∎

OBSERVAÇÃO. Quando, num espaço métrico, queremos provar que uma sucessão de Cauchy (x_n) converge, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^n}$ para todo o $m \geq n$, pois dada qualquer sucessão de Cauchy é fácil construir uma sua subsucessão com esta propriedade, a qual convergirá se e só se a sucessão dada convergir, como indicamos em seguida.

De facto, se (x_n) for de Cauchy, podemos construir uma sua subsucessão $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

(1) existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_1$ e $m \geq p_1$, então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$; em particular, $d(x_{p_1}, x_m) < \frac{1}{2}$ se $m \geq p_1$; definimos $\varphi(1) = p_1$;

(2) de igual modo, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_2$ e $m \geq p_2$, então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^2}$; tomando $\varphi(2) = \max\{p_2, p_1 + 1\}$, temos que $d(x_{\varphi(2)}, m) < \frac{1}{2^2}$, se $m \geq \varphi(2)$, e $\varphi(2) > \varphi(1)$;

(3) dado $n \in \mathbb{N}$ e supondo já definidos $\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(n-1)$ tais que, se $m \geq \varphi(k)$, então $d(x_{\varphi(k)}, x_m) < \frac{1}{2^k}$, escolhemos $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ e tal que, se $m \geq \varphi(n)$, então $d(x_{\varphi(n)}, x_m) < \frac{1}{2^n}$.

A sucessão $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ assim definida verifica a propriedade pretendida.

Teorema. *Um espaço normado é completo se e só se toda a sua série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$: foi provado no lema anterior.

$(\Leftarrow)$: Suponhamos que X é um espaço normado onde toda a série absolutamente convergente é convergente, e seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em X tal que $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq n$. Sejam $x_0 = 0$ e $y_k = x_k - x_{k-1}$ para $k \in \mathbb{N}$. Então (x_n) é a sucessão das somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. É fácil verificar que esta série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ é absolutamente convergente, logo converge para algum $x \in X$, ou seja $x_n \to x$. ∎