Vejamos agora como definir novos espaços à custa de espaços dados.

(1) Se X é um espaço normado e $S \subseteq X$, já mencionámos o subespaço linear $\mathrm{lin}S$ gerado por S, que é o menor subespaço que contém S. Podemos também considerar o menor subespaço fechado que contém S, e que denotamos por $\overline{\mathrm{lin}}S$. Note que $\overline{\mathrm{lin}}S$ é exactamente o fecho de $\mathrm{lin}S$.

(2) Se $T : X \to Y$ é um operador linear entre os espaços normados X e Y, o seu núcleo $\mathrm{Ker}T = \{x \in X\,;\, T(x) = 0\}$ é um subespaço de X enquanto que a sua imagem $\mathrm{Im}T = T(X)$ é um subespaço de Y.

(3) Se X é um espaço vectorial e Z é um seu subespaço, consideramos em X a relação de equivalência $\sim$ definida por $x \sim y$ se $x - y \in Z$. Note que a classe de equivalência de $x \in X$ é $[x] = x + Z$; em particular $[x] = 0$ se e só se $x \in Z$. A estrutura de espaço vectorial em X induz naturalmente uma estrutura de espaço vectorial em $X/_{\sim} = \{[x]\,;\, x \in X\}$: $\lambda[x] + \mu[y] := [\lambda x + \mu y]$. Denotamos este espaço por X/Z.

Se Z for um subespaço fechado de X podemos definir em X/Z uma norma:

$$\|[x]\|_0 := \inf\{\|y\|\,;\, y \sim x\} = \inf\{\|x + z\|\,;\, z \in Z\}.$$

Chamamos ao espaço normado X/Z o `espaço normado quociente` e à norma $\|\cdot\|_0$ `norma quociente`.

Em particular, se $T : X \to Y$ é um operador linear limitado, então o seu núcleo $Z = \mathrm{Ker}T$ é um subespaço fechado de X e induz um operador linear $T_0 : X/Z \to Y$.

Proposição. *Sejam $T : X \to Y$ um operador linear limitado entre espaços normados, $Z = \mathrm{Ker}T$ e $T_0 : X/Z \to Y$ o operador linear induzido por T. Então T_0 é um operador linear limitado e a sua norma é exactamente $\|T\|$.* ∎

SOMA DIRECTA DE ESPAÇOS NORMADOS

Suponhamos que Y e Z são subespaços fechados dum espaço normado X tais que $Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z = X$. Note que nesse caso X pode identificar-se com $Y \times Z$. Nesse sentido, se as projecções $p_Y : X \to Y$ e $p_Z : X \to Z$ são contínuas (i.e. operadores lineares limitados), diz-se que X é a soma directa de Y e Z e escreve-se $X = Y \bigoplus Z = \{(y, z)\,;\, y \in Y, z \in Z\}$.

---

16 O Teorema de Hahn-Banach

Sejam X um espaço normado, X' o seu dual algébrico (isto é, o espaço vectorial das suas funcionais lineares) e X^* o seu espaço dual.

Lema. *Se $f \in X'$, então f é limitada se e só se $f(B) \neq K$.* ∎

HIPERPLANO
Um hiperplano afim (ou simplesmente um hiperplano) é um conjunto da forma

$$H = \{x_0\} + Y = \{x_0 + y\,;\, y \in Y\},$$

onde $x_0 \in X$ e $Y \subseteq X$ é um subespaço de codimensão 1 (isto é, tal que $\dim X/Y = 1$). Diz-se então que H é uma translação de Y.

Se $f \in X'$ e $f \neq 0$, então definimos

$$K(f) := f^{-1}(0) = \{x \in X\,;\, f(x) = 0\} \quad \text{e} \quad I(f) = f^{-1}(1).$$

Note que, se $f \neq 0$, então existe $x_0 \in X$ tal que $I(f) = \{x_0\} + K(f)$, logo $I(f)$ é uma translação de $K(f)$. (Basta considerar $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \neq 0$ e $x_0 := \frac{1}{f(x_1)}\, x_1$.)

Teorema. *Seja X um espaço vectorial.*

(a) Se $f \in X' \setminus \{0\}$, então $K(f)$ é um subespaço de codimensão 1, logo $I(f)$ é um hiperplano (que não contém 0). Além disso, todo o $x \in X$ se escreve de forma única como $x = y + \lambda x_0$, onde $y \in K(f)$ e $\lambda \in K$.

(b) Se $f, g \in X' \setminus \{0\}$ então $f = \lambda g$ se e só se $K(f) = K(g)$.

(c) A correspondência $f \mapsto I(f)$ define uma função bijectiva entre as funcionais lineares não nulas e os hiperplanos que não contêm 0. ∎