Lema. *Para $f \in X^*$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\|f\| \leq 1$;

(ii) $\forall x \in D \;\; |f(x)| < 1$;

(iii) $I(f) \cap D = \emptyset$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Se $\|f\| \leq 1$, então, para $x \in D$, $|f(x)| \leq \|x\| < 1$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) é óbvio.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Se $\|f\| > 1$, então existe $x \in X$ tal que $|f(x)| > \|x\|$. Logo $x' := \frac{1}{f(x)}x \in D$ e $f(x') = f(\frac{1}{f(x)}x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$. ∎

Teorema. *Seja X um espaço normado.*

(1) *Seja $f : X \to K$ uma funcional linear não nula.*

Se f é limitada, então $K(f)$ e $I(f)$ são fechados e têm interior vazio.

Se f não é limitada, então $K(f)$ e $I(f)$ são densos em X.

(2) *A correspondência $f \mapsto I(f)$ define uma bijecção entre os operadores lineares limitados não nulos e os hiperplanos fechados que não contêm 0.*

Demonstração. (1) Sejam $f \in X^* \setminus \{0\}$ e $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Como f é contínua, $K(f) = f^{-1}(0)$ e $I(f) = f^{-1}(1)$ são fechados. Para verificar que têm interior vazio basta notar que, quaisquer que sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$,

$$f(x + \varepsilon x_0) = f(x) + \varepsilon f(x_0) \neq f(x).$$

Para provar que, se f não é limitada, $K(f)$ é denso, suponhamos que $K(f)$ não é denso, isto é, que existem $x_0 \in X$ e $r > 0$ tais que $B_r(x_0) \cap K(f) = \emptyset$. Então podemos concluir que $\|f\| \leq \frac{|f(x_0)}{r}$: de facto, se $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{r}\|x\|$ para algum $x \in X$, então $y := x_0 - \frac{xf(x_0)}{f(x)} \in B_r(x_0) \cap K(f)$.
(2) Segue imediatamente de (1) e do teorema anterior. ∎

Definição. Se X é um espaço vectorial, uma função $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ diz-se uma `funcional convexa` se verificar as seguintes condições

(1) $\forall t \geq 0 \;\; p(tx) = tp(x)$ `[positiva homogénea];`

(2) $\forall x, y \in X \;\; \forall t \in [0, 1] \;\; p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y)$ `[convexa].`

Observações: (a) Na presença de (1), a condição de ser convexa é equivalente a ser `sub-aditiva`, isto é:

(2') $\forall x, y \in X \;\; p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

(b) As operações em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ são as naturais: $\forall r \in \mathbb{R} \; \infty + r = \infty + \infty = \infty$; $0 \cdot \infty = 0$ e $t \cdot \infty = \infty$ para $t > 0$. Além disso, ∞ é o elemento máximo de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) Toda a norma é uma funcional convexa; toda a funcional linear é uma funcional convexa.

(d) Dado um conjunto X e duas funções $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$), diz-se que φ `domina` ψ (ou ψ `é dominada por` φ) se, para todo o $x \in X$, $\psi(x) \leq \varphi(x)$.

(e) Uma funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ é dominada pela funcional convexa $p : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto N\|x\|$, se e só se f é limitada e $\|f\| \leq N$.

(f) Quando $f : X \to Z$ for uma `extensão` de $g : Y \to Z$, isto é, quando $Y \subseteq X$ e, para todo o $y \in Y$, $f(y) = g(y)$, escrevemos $g \subseteq f$.

Lema. *Sejam Y um subespaço vectorial de codimensão 1 do espaço vectorial real X, $p : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma funcional convexa e $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ uma funcional linear dominada por p. Existe uma extensão $f : X \to \mathbb{R}$ de f_0 que ainda é uma funcional linear dominada por p.*

Demonstração. Como Y tem codimensão 1, existe $z \in X$ tal que todo o elemento de X se escreve na forma $x = y + tz$ para algum $y \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$. Se existir a funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que estende f_0, então f é completamente determinada por $f(z) = c$:

$$f(x) = f(y + tz) = f_0(y) + tf(z) = f_0(y) + tc.$$

Provar a existência de f é então provar a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $y \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$f(y + tz) \leq p(y + tz) \;\; \Leftrightarrow \;\; f_0(y) + tc \leq p(y + tz).$$

- Se $t = 0$, a desigualdade é trivialmente satisfeita.
- Se $t > 0$, para todo o $y \in Y$,

$$f_0(y) + tc \leq p(y + tz) \;\; \Leftrightarrow \;\; c \leq \frac{p(y + tz) - f_0(y)}{t} = p\big(\frac{y}{t}\big) - f_0\big(\frac{y}{t}\big);$$

- Se $t < 0$, isto é $t = -s$, com $s > 0$, para todo o $y \in Y$,

$$f_0(y) - sc \leq p(y - sz) \;\; \Leftrightarrow \;\; c \geq \frac{-p(y - sz) + f_0(y)}{s} = -p\big(\frac{y}{s} - z\big) + f_0\big(\frac{y}{s}\big).$$

Logo, f é dominada por p se e só se, quaisquer que sejam $y', y'' \in Y$,

$$-p(y'' - z) + f_0(y'') \leq c \leq p(y' + z) - f_0(y).$$

Existirá um $c \in \mathbb{R}$ nestas condições se e só se, quaisquer que sejam $y', y'' \in Y$,

$$-p(y'' - z) + f_0(y'') \leq p(y' + z) - f_0(y') \quad \Leftrightarrow \quad f_0(y') + f_0(y'') \leq p(y' + z) - p(y'' - z).$$

Como f é uma funcional linear dominada por p, temos que

$$f_0(y') + f_0(y'') = f_0(y' + y'') \leq p(y' + y'') = p(y' + z + y'' - z) \leq p(y' + z) + p(y'' - z). \quad \blacksquare$$

O resultado do Lema pode estender-se ao caso de Y não ter codimensão 1. A técnica subjacente é a iteração do processo de construção de f. Podemos então afirmar:

Teorema. *Se Y for um subespaço vectorial do espaço vectorial real X tal que $X = \operatorname{lin}(Y \cup \{z_i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ e $f_0 \in Y'$ é dominada por uma funcional convexa $p : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então f_0 pode ser estendida a uma funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ ainda dominada por p.*

Além disso, se X for um espaço normado e f_0 for uma funcional linear limitada, então f_0 tem uma extensão $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|f_0\|$.

Demonstração. A primeira afirmação segue do lema anterior, iterando o processo de construção de f. A segunda afirmação sai da primeira, atendendo à observação já feita de que f_0 é dominada pela funcional convexa $p : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f_0\|\|x\|$. $\blacksquare$

Na demonstração do Teorema de Hahn-Banach vamos usar a seguinte condição, que é equivalente ao Axioma da Escolha:

Lema de Zorn. *Todo o conjunto ordenado em que todo o seu subconjunto totalmente ordenado tem majorante tem elemento maximal.*

Teorema da Extensão de Hahn-Banach. *Seja Y um subespaço do espaço vectorial real X. Se $f_0 : X \to \mathbb{R}$ é uma funcional linear dominada pela funcional convexa $p : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então existe uma funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que estende f_0 e que é dominada por p.*

Se X é um espaço normado e $f_0 \in Y^*$, então existe $f \in X^*$ tal que $f_0 \subseteq f$ e $\|f\| = \|f_0\|$.

Demonstração. Consideremos o conjunto $\mathcal{F} = \{f_\gamma : Y_\gamma \to \mathbb{R}\,;\, f_\gamma \in Y'_\gamma \text{ e } f_0 \subseteq f_\gamma \leq p\}$, ordenado pela inclusão $\subseteq$. Se $\mathcal{F}_0 = \{f_\gamma\,;\, \gamma \in \Gamma_0\} \subseteq \mathcal{F}$ for um conjunto totalmente ordenado, então $\tilde{f} : \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} Y_\gamma \to \mathbb{R}$, onde $\tilde{f}(x) = f_\gamma(x)$ para $\gamma \in \Gamma_0$ tal que $x \in Y_\gamma$, é um supremo de $\mathcal{F}_0$. Logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tem um elemento maximal, f. Se o domínio de f não for X, pelo lema anterior f pode ser estendida a um subespaço maior, o que contraria o facto de f ser maximal. Logo f tem domínio X e é uma extensão de f_0 nas condições pretendidas.
A segunda afirmação sai agora da primeira, tal como no teorema anterior. $\blacksquare$