O Teorema de Hahn-Banach pode ser estendido ao caso dos espaços vectoriais complexos. Para isso é fundamental a relação entre as funcionais lineares de um espaço vectorial complexo e as funcionais lineares do espaço vectorial real subjacente, que explicamos em seguida.

Um espaço vectorial complexo pode ser considerado como espaço vectorial real. Para X espaço vectorial complexo, denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$ o espaço vectorial real que lhe corresponde. Podemos então definir as funções

$$\begin{array}{rcl} r : X^* & \longrightarrow & X^*_{\mathbb{R}} = (X_{\mathbb{R}})^* \\ X \xrightarrow{f} \mathbb{C} & \longmapsto & \begin{array}{rcl} X & \overset{r(f)}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} c : X^*_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & X^* \\ X \xrightarrow{g} \mathbb{R} & \longmapsto & \begin{array}{rcl} X & \overset{c(g)}{\to} & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & g(x) - ig(ix). \end{array} \end{array}$$

Estas funções são inversas uma da outra e preservam a norma. São em particular homeomorfismos entre estes espaços.

Teorema. *Sejam Y um subespaço de um espaço normado complexo X e $f_0 \in Y^*$. Existe uma extensão $f \in X^*$ de f_0 a todo o X que tem exactamente a norma de f_0.*

Demonstração. Pelo teorema anterior podemos estender $r(f_0)$ a uma funcional linear $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, limitada, com $\|g\| = \|r(f_0)\| = \|f_0\|$. A funcional complexa $f = c(g) \in X^*$ estende f_0 e verifica $\|f\| = \|f_0\|$. ■

Vejamos agora algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach.

Corolário. *Se X é um espaço normado e $x_0 \in X$, existe uma funcional linear limitada $f : X \to K$, de norma 1, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Para $x_0 = 0$ o resultado é trivial. Se $x_0 \neq 0$, consideramos o subespaço $Y = \mathrm{lin}\{x_0\}$ e definimos $f_0 \in Y^*$ por $f(\lambda x_0) := \lambda\|x_0\|$. Então $\|f_0\| = 1$ e a sua extensão, obtida à custa do Teorema de Hahn-Banach, também tem norma 1. ■

Corolário. *Se X é um espaço normado e $x_0 \in X$, então*

$$x_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in X^* \;\; f(x_0) = 0.$$ ■

Se X e Y são espaços normados, existe uma função (natural) do espaço dos operadores lineares de X em Y no espaço dos operadores lineares de Y^* em X^*:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{F}(X,Y) & \longrightarrow & \mathsf{F}(Y^*,X^*) \\ X \xrightarrow{T} Y & \longmapsto & \begin{array}{rcl} T^* : Y^* & \to & X^* \\ f & \mapsto & f \circ T. \end{array} \end{array}$$

É fácil ver que, se T é um operador linear, então T^* é também um operador linear.

Teorema. *Se X e Y são espaços normados e $T : X \to Y$ é um operador linear limitado, então $T^* : Y^* \to X^*$ é um operador linear limitado e $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demonstração. Como, para todo o $g \in Y^*$, $\|T^*(g)\| = \|g \circ T\| \leq \|g\|\|T\|$, concluímos imediatamente que T é um operador linear limitado e que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Para ver que $\|T^*\| \geq \|T\|$, procedemos do seguinte modo: para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$ e $\|T(x_0)\| \geq \|T\| - \varepsilon$. Seja $g \in S(Y^*)$ tal que $g(T(x_0)) = \|T(x_0)\|$. Então

$$T^*(g)(x_0) = g(T(x_0)) = \|T(x_0)\| \geq \|T\| - \varepsilon.$$

Logo $\|T^*\| \geq \|T\| - \varepsilon$. ■

Dado um espaço vectorial X, com dual X' e bidual X'', existe uma aplicação linear injectiva

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X'' = \mathsf{F}(\mathsf{F}(X,K),K) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} x'' : \mathsf{F}(X,K) & \to & K \\ f & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

(Esta função é um isomorfismo se X tiver dimensão finita.)

Se X for um espaço normado, esta aplicação pode ser considerada entre os espaços normados X e X^{**}:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \hat{x} : \mathsf{F}(X,K) & \to & K \\ f & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

De facto, como $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, $\hat{x}$ é uma funcional linear limitada, e, além disso, $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.

Teorema. *A correspondência $x \mapsto \hat{x}$ define uma imersão $X \to X^{**}$ que preserva a norma.*

Demonstração. Para $x \in X$ com $x \neq 0$, seja $f \in X^*$ tal que $f(x) = \|x\|$ e $\|f\| = 1$. Então $|\hat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\|$ e $|\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|\|f\| = \|\hat{x}\|$, logo $\|x\| \leq \|\hat{x}\|$. ■

`[Esta é uma forma natural de ver` X `como subespaço de um espaço normado completo,` X^{**}`.]`

Falta-nos ainda ver uma extensão natural do Teorema de Hahn-Banach.

Dado um espaço vectorial real X, uam função $q : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ diz-se uma `funcional côncava` se $-q : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ for uma funcional convexa; isto é,

- $\forall t \geq 0 \;\; q(tx) = tq(x)$;
- $\forall x, y \in X \;\; q(x + y) \geq q(x) + q(y)$.

Suponhamos agora dada uma funcional linear $f_0 : Y \to K$ entre uma funcional côncava q e uma funcional convexa p, isto é tal que

$$\forall y \in Y \;\; q(y) \leq f_0(y) \leq p(y).$$

Que condições precisamos de assegurar para que exista uma extensão de f_0 a todo o X que mantenha estas propriedades?

Se existir uma tal funcional linear $f : X \to K$, temos que

$$\forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; f(y) = f(x+y) - f(x) \quad \text{e} \quad -f(x) \leq -q(x) \;\; \Rightarrow \;\; f(y) \leq p(x+y) - q(x).$$

[Note que esta desigualdade inclui a anterior: basta considerá-la para $x = 0$ e $x = -y$.]

Teorema. *Sejam p uma funcional convexa e q uma funcional côncava no espaço vectorial real X. Se Y é um subespaço de X e $f_0 \in Y'$ é tal que*

$$\forall y \in Y \;\; \forall x \in X \;\; f_0(y) \leq p(x+y) - q(x),$$

então f_0 tem uma extensão $f \in X'$ tal que

$$\forall x \in X \;\; q(x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Demonstração. Vamos apenas construir uma extensão f_1 de f_0 ao subespaço $Z = \text{lin}(Y \cup \{z\})$, onde $z \in X \setminus Y$. Queremos então $f_1 : Z \to K$ tal que

$$\forall u \in Z \;\; \forall x \in X \;\; f_1(u) \leq p(x+u) - q(x).$$

Vamos novamente estudar a escolha de $c = f_1(z)$. Então teremos necessariamente, para $y, y' \in Y$,

$$f_1(y+z) = f_0(y) + c \leq p(x+y+z) - q(x) \text{ e } f_1(y'-z) = f_0(y') - c \leq p(x'+y'-z) - q(x').$$

Logo,

$$-p(x'+y'-z) + q(x') + f_0(y') \leq c \leq p(x+y+z) - q(x) - f_0(y).$$

Portanto, c existe se e só se

$$\forall x, x' \in X \;\; \forall y, y' \in Y \;\; -p(x'+y'-z) + q(x') + f_0(y') \leq p(x+y+z) - q(x) - f_0(y);$$

a desigualdade verifica-se porque

$$f_0(y') + f_0(y) = f_0(y+y') \leq p(x+x'+y+y') - q(x+x') \leq p(x+y+z) + p(x'+y'-z) - q(x) - q(x') \blacksquare$$

Corolário. *Se p é uma funcional convexa e q uma funcional côncava em X tais que, para todo o $x \in X$, $q(x) \leq p(x)$, então existe uma funcional linear f em X tal que*

$$\forall x \in X \;\; q(x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Demonstração. Faça-se $Y = \{0\}$ e $f_0 = 0$ no resultado anterior. ∎

Teorema. *Sejam A e B subconjuntos convexos disjuntos, não vazios, de um espaço vectorial real X. Se existir $\alpha \in A$ tal que, para todo o $x \in X$, existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que $\alpha + tx \in A$ para todo o $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| \leq \varepsilon(x)$, então A e B podem ser separados por um hiperplano; isto é, existem uma funcional linear não nula $f : X \to \mathbb{R}$ e um número real c tais que*

$$\forall x \in A \;\; \forall y \in B \;\; f(x) \leq c \leq f(y).$$

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = 0$; logo

$$\forall x \in X \;\; \exists \varepsilon(x) > 0 \;\; : \;\; [-\varepsilon x, \varepsilon x] \subseteq A.$$

Definimos funções p e q em X do seguinte modo

$$p(x) := \inf\{t \geq 0 \, ; \, x \in tA\} \quad \text{e} \quad q(x) := \sup\{t \geq 0 \, ; \, x \in tB\}.$$

Então p é uma funcional convexa e q é uma funcional côncava. Além disso, como $tA \cap tB = \emptyset$ para $t > 0$, temos $q(x) \leq p(x)$. Logo, pelo corolário anterior, existe uma funcional linear f em X tal que, para todo o $x \in X$, $q(x) \leq f(x) \leq p(x)$. Além disso, se $x \in A$ e $y \in B$,

$$f(x) \leq p(x) \leq 1 \leq q(y) \leq f(y).$$

Logo podemos considerar $c = 1$ (e então A e B estão separados pelo hiperplano $I(f)$). ∎