17 Espaços normados de dimensão finita

Teorema. *Num espaço vectorial de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes.*

Demonstração. Dado um espaço vectorial V de dimensão n, com base $(e_i)_{i=1}^n$, vamos provar que qualquer norma $\|\cdot\|$ em V é equivalente à norma $\|\cdot\|_1$, definida por $\big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\big\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$. Sejam $S_1 = \{x \in V\,;\, \|x\|_1 = 1\}$ e $f : (S_1, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \|x\|$. Como S_1 é um subconjunto fechado da bola fechada unitária, S_1 é compacto. Além disso, se $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| &\leq \|x-y\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i e_i - \sum_{i=1}^n y_i e_i\Big\| &&\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\|e_i\| \\ &\leq \big(\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|\big)\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| &&= \big(\max_{1\leq i\leq n}\|e_i\|\big)\|x-y\|_1, \end{aligned}$$

e então f é uma função contínua. Logo, tem máximo M e mínimo m. Note-se que $m > 0$ uma vez que $|f(x)| = \big|\|x\|\big| > 0$ para todo o $x \in S_1$. Logo, atendendo a que, para todo o $x \in V \setminus \{0\}$ $\|x\| = \|x\|_1 f\big(\frac{x}{\|x\|_1}\big)$ e $m \leq f\big(\frac{x}{\|x\|_1}\big) \leq M$, obtemos, para todo o $x \in V$,

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1. \qquad \blacksquare$$

Corolário. *Se X e Y são espaços normados e X tem dimensão finita, então qualquer operador linear $T : X \to Y$ é limitado.*

Demonstração. A função $\|\cdot\|' : X \to K$ definida por $\|x\|' = \|x\| + \|T(x)\|$ é uma norma em X. Como $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ são equivalentes, existe $N > 0$ tal que $\|x\|' \leq N\|x\|$, para todo o $x \in X$. Logo $\|T(x)\| \leq \|x\|' \leq N\|x\|$ e então $\|T\| \leq N$. $\blacksquare$

Corolário. *Dois espaços normados de dimensão finita são homeomorfos se e só se têm a mesma dimensão.*

Demonstração. Já sabemos que dois espaços vectoriais de dimensão finita isomorfos têm a mesma dimensão. Por outro lado, se os dois espaços X e Y têm a mesma dimensão, finita, então existe um operador linear $T_1 : X \to Y$ com inversa $T_2 : Y \to X$, também operador linear. Pelo corolário anterior, as aplicações T_1 e T_2 são contínuas. $\blacksquare$

Corolário. *Todo o espaço normado de dimensão finita é espaço de Banach.*

Demonstração. Sai do corolário anterior e do facto de l_2^n ser completo. ∎

Corolário. *Num espaço de dimensão finita X um subconjunto é compacto se e só se é fechado e limitado. Em particular a bola unitária fechada e a esfera unitária fechada*

$$B(X) = \{x \in X\,;\, \|x\| \leq 1\} \text{ e } S(X) = \{x \in X\,;\, \|x\| = 1\}$$

são compactas.

Demonstração. Segue do facto do resultado ser válido em l_2^n. ∎

Corolário. *Todo o subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado.*

Demonstração. Como espaço de dimensão finita, o subespaço é completo, logo necessariamente fechado como subespaço. ∎

Num espaço métrico X, para cada $Y \subseteq X$ e $x \in X$, definimos $\operatorname{dist}(x,Y) := \inf\{d(x,y)\,;\, y \in Y\}$. (Note que $\operatorname{dist}(x,Y) = 0$ se e só se $x \in \overline{Y}$.)

Teorema. *Seja Y um subespaço próprio do espaço normado X.*

(1) Se Y é fechado, então $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in S(X) \ : \ \operatorname{dist}(x,Y) \geq 1 - \varepsilon.$

(2) Se Y tiver dimensão finita, então existe $x \in S(X)$ tal que $\operatorname{dist}(x,Y) = 1$.

Demonstração. Sejam $z \in X \setminus Y$ e $Z := \operatorname{lin}(Y \cup \{z\})$. Consideremos a funcional linear $f_0 : Z \to \mathbb{R}$ definida por $f_0(y + \lambda z) = \lambda$.
(a) Como Y é fechado e $\operatorname{Ker}(f_0) = Y$, f_0 é uma funcional linear limitada e então, pelo Teorema de Hahn-Banach, tem uma extensão $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|f_0\| > 0$. Tem-se ainda $Y \subseteq \operatorname{Ker} f$. Como $\|f\| = \sup_{x \in S(X)} |f(x)|$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in S(X)$ tal que $|f(x)| \geq (1-\varepsilon)\|f\|$. Então, se $y \in Y$,

$$\|x - y\| \geq \frac{|f(x-y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

(b) Se Y for de dimensão finita, podemos também considerar X de dimensão finita. Então a restrição de f a $S(X)$ tem máximo, porque $S(X)$ é compacto. Logo, existe $x \in S(X)$ tal que $|f(x)| = \|f\|$. Então, para todo o $y \in Y$, temos

$$\|x - y\| \geq \frac{|f(x-y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = 1.$$ ∎

Corolário. *Se* $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ *é uma sucessão de subespaços de dimensão finita de um espaço normado (com todas as inclusões próprias), então existem vectores unitários* $x_1, x_2, \cdots$ *tais que* $x_n \in X_n$ *e* $d(x_n, X_{n-1}) = 1$*, para todo o* $n \geq 2$*.*

Em particular, todo o espaço normado de dimensão infinita contém uma sucessão (x_n) *de vectores unitários tais que* $\|x_n - x_m\| \geq 1$*, para todo* $n, m \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Construímos a sucessão (x_n) aplicando o teorema anterior ao caso de $X = X_n$ e $Y = X_{n-1}$, para $n \geq 2$. (Sendo x_1 qualquer vector de X_1.) ■

Teorema. *Um espaço normado tem dimensão finita se e só se a sua bola fechada unitária é compacta.*

Demonstração. Se X é um espaço normado com dimensão infinita, consideramos uma sucessão (x_n) em X tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, cuja existência é garantida pelo teorema anterior. Então a cobertura aberta $\left(B_{\frac{1}{2}}(x)\right)_{x \in X}$ não tem subcobertura finita, pois cada uma das bolas abertas contém no máximo um dos termos da sucessão. ■