19 Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado

Teorema da Aplicação Aberta. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ um operador linear limitado sobrejectivo. Então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Na prova deste teorema vamos usar os dois lemas que enunciamos em seguida. Omitimos a demonstração do primeiro por ser bastante técnica.

Lema. *Suponhamos que X e Y são espaços normados, X é completo e $T \in \mathsf{L}(X,Y)$ é tal que $\overline{T(B_r(0))} \supseteq B_s(y_0)$. Então $T(B_r(0)) \supseteq B_s(y_0)$.*

Lema. *Se T é um operador linear limitado, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *T é uma aplicação aberta;*

(ii) *$T(B_1(0))$ é aberto;*

(iii) *$0 \in int(T(B_1(0)))$;*

(iv) *$int(T(B_1(0))) \neq \emptyset$;*

(v) *$int(\overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Para provar o lema basta verificar que (iv) $\Rightarrow$ (iii) e que (iii) $\Rightarrow$ (i), uma vez que as implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) são imediatas e que (v) $\Rightarrow$ (iv) segue do lema anterior.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Sejam $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tais que $B_r(y_0) \subseteq T(B_1(0))$. Então também se tem $B_r(-y_0) \subseteq T(B_1(0))$ e podemos ainda concluir que $B_r(0) \subseteq T(B_1(0))$. De facto, se $y \in B_r(0)$, então $y_0 + y \in B_r(y_0) \subseteq T(B_1(0))$ e $-y_0 + y \in B_r(-y_0) \subseteq T(B_1(0))$, logo $y_0 + y = T(x_0)$ e $-y_0 + y = T(x_1)$, com $x_0, x_1 \in B_1(0)$. Portanto

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) = T\big(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\big),$$

com $\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 \in B_1(0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Para provar que T é aberta, basta verificar que, quaisquer que sejam $x_0 \in X$ e $s > 0$, $T(x_0) \in \text{int}(T(B_s(x_0)))$. Da condição $0 \in \text{int}(T(B_1(0)))$ concluímos que existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq T(B_1(0))$. Logo $B_{rs}(0) \subseteq T(B_s(0))$ e então $B_{rs}(T(x_0)) \subseteq T(B_s(x_0))$. ∎

Resta-nos agora provar o teorema. De

$$Y = T(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_n(0))} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{n\,T(B_1(0))},$$

e do facto de Y ser de segunda categoria podemos concluir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(n\,\overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$. Logo $\operatorname{int}(\overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$ e então, pelo segundo lema, T é uma aplicação aberta. ■

Teorema da função inversa. *Se $T : X \to Y$ for um operador linear limitado bijectivo e X e Y forem espaços de Banach, então a sua função inversa é também um operador linear limitado.* ■

Teorema do gráfico fechado. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Então T é limitado se e só se o seu gráfico*

$$\Gamma(T) = \{(x, T(x))\,;\, x \in X\} \subseteq X \times Y$$

é fechado na topologia produto.

Demonstração. Já vimos que o gráfico de uma função contínua cujo conjunto de chegada seja separado é fechado. Falta-nos provar o recíproco.

Em $Z = X \oplus Y = X \times Y$ consideramos a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Por hipótese $\Gamma(T)$ é um subconjunto fechado de Z. Como Z é um espaço de Banach, $\Gamma(T)$ é um subespaço completo. O operador linear $\begin{array}{rcl} U : \Gamma(T) & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$ é uma bijecção contínua, logo, pelo teorema anterior, é um homeomorfismo; isto é, $\begin{array}{rcl} X & \to & \Gamma(T) \\ x & \mapsto & (x, T(x)) \end{array}$ é um operador linear limitado. Portanto, escrevendo

$$(X \xrightarrow{T} Y) = (X \to \Gamma(T) \to X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y),$$

onde $X \to \Gamma(T)$ é a função inversa de U e $\Gamma(T) \to X \times Y$ é a inclusão, concluímos que T é composição de funções contínuas, logo é contínua. ■

20 Espaços de Hilbert

PRODUTO INTERNO
Se V é um espaço vectorial, um produto interno (ou produto escalar) em V é uma função $(\cdot,\cdot) : V \times V \to K$ é tal que, para $x, y, z \in V$ e $\lambda, \mu \in K$:

(a) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$;

(b) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;

(c) $(x, x) \geq 0$, com igualdade só quando $x = 0$.]

OBSERVAÇÃO. Se $(\cdot,\cdot)$ é um produto interno em V, então

$$\|x\| := (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em V.

ESPAÇO EUCLIDIANO/ESPAÇO DE HILBERT
Um espaço normado diz-se um espaço euclidiano se a sua norma for definida por um produto interno. Se, além disso, o espaço for completo, diz-se um espaço de Hilbert.

OBSERVAÇÃO. O produto interno pode recuperar-se facilmente da norma, pois

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2, \quad \text{no caso complexo, e}$$

$$2(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = \frac{1}{2}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big), \quad \text{no caso real.}$$