Observações:

Sempre que nada for dito em contrário, consideraremos $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana.

Assinalam-se com (*) os exercícios de resolução eventualmente mais elaborada.

1 (a) Verifique se $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma métrica em $\mathbb{R}$:

i. $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 + |x-y| & \text{se } x \neq y \end{cases}$

ii. $d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$

iii. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

iv. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.

(b) Descreva as bolas abertas para cada uma das métricas da alínea anterior.

2 Seja (X, d') um espaço métrico. Verifique quais das funções $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ definidas em seguida são métricas em X:

(a) $d(x,y) = k\, d'(x,y)$ para algum número real $k > 0$;

(b) $d(x,y) = \min\{1, d'(x,y)\}$;

(c) $d(x,y) = (d'(x,y))^2$;

(d) (*) $d(x,y) = \frac{d'(x,y)}{1+d'(x,y)}$.

3 No conjunto das funções reais contínuas definidas em $[0,1]$ considere as métricas ρ do supremo e σ do integral.

(a) Calcule, para cada uma dessas métricas, $d(\sin x, \cos x)$, $d(x^2, x)$ e $d(1-x, x^2)$.

(b) Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ e $g(x) = x$. Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$ e a $B_1(g)$ para a métrica ρ.

(c) Poderá dar uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções de $B_1(f)$ (ou de $B_1(g)$) para a métrica σ? Justifique.

4 No conjunto das funções reais e limitadas de domínio $[0,1[$ considere a métrica ρ do supremo. Considere as funções

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} g : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

(a) Calcule $\rho(f,g)$. Qual a condição menos restrictiva que se deve impôr ao número real δ para que $g \in B_\delta(f)$?

(b) Seja $F = [0,1[\times]-1,1[$. O gráfico de g está contido em F?

(c) Compare, relativamente a funções limitadas $h : [0,1[\to \mathbb{R}$, as duas condições seguintes:

i. $h \in B_1(f)$; ii. $Gr(h) \subseteq F$.

(d) Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$.

5 Sejam (X, d) um espaço métrico e x e y elementos de X.

(a) Prove que, se x e y forem distintos, existem bolas abertas disjuntas B e B' tais que $x \in B$ e $y \in B'$.

(b) Sejam r e s números reais positivos tais que $B_r(x) = B_s(y)$. Podemos então concluir que $x = y$ ou que $r = s$? Justifique a sua resposta.

6 Sejam (X, d) um espaço métrico e a um ponto de X. Mostre que:

(a) $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$;

(b) $\{a\} = \displaystyle\bigcap_{r>0} B_r(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a)$;

(c) $B_r[a] = \displaystyle\bigcap_{s>r} B_s(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r+\frac{1}{n}}(a)$;

(d) $B_r(a) = \displaystyle\bigcup_{0<s<r} B_s[a]$.

7 Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos:

(a) $\mathbb{N}$;

(b) $[1, 2[\cup]2, 3[$;

(c) $\{0\} \cup \{x; x^2 > 2\}$;

(d) $\mathbb{Q}$;

(e) $[5, 7] \cup \{8\}$;

(f) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

8 Verifique se os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$:

(a) $]0, 1[\times]0, 1[$;

(b) $[0, 1[\times]0, 1[$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$;

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}^2$.

9 (*) Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ o espaço métrico das funções contínuas e limitadas, de X em $\mathbb{R}$, munido da métrica do supremo. Considere o subconjunto
$A = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, \forall x \in X \;\; f(x) > 0\}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Mostre que:

(a) se $X = [0, 1]$, então A é aberto.

(b) se $X =]0, 1]$, então A não é aberto.

10 Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 + |x| & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Note que esta função é descontínua para a métrica usual em $\mathbb{R}$. Verifique que, se d é a métrica definida no Exercício 1(a)i (pág.1), então a função $f : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

11 Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual d_1 e a métrica d definida em 1(a)ii (pág.1). Verifique se alguma das funções $f, g : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ é contínua, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

12 Suponha que $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $a \in X$ tal que $f(a) > 0$. Mostre que

$$\exists\, r > 0 : \forall\, x \in B_r(a) \quad f(x) > 0.$$

13 (a) Mostre que as métricas d_1, d_2 e d_∞ definem a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$.

(b) Verifique quais das métricas d definidas no Exercício 2 (pág.1) são topologicamente equivalentes a d'.

(c) Compare as topologias definidas em $\mathbb{R}$ pelas métricas do Exercício 1 (pág.1).

14 (*) Considere, no conjunto $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, as métricas ρ do supremo e σ do integral.

(a) Sendo $0 < r \leq 2$, considere
$$\begin{array}{rcl} g:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{r}+4 & \text{se } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{r}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$
Mostre que $g \in B_r^\sigma(f) \setminus B_1^\rho(f)$, onde $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2$.

(b) Conclua que ρ e σ não são topologicamente equivalentes.

(c) Mostre que $\mathcal{T}^\sigma \subset \mathcal{T}^\rho$.

15 Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $X = \{a,b,c,d,e\}$:

(a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$,

(b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$,

(c) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$,

(d) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$.

16 Mostre que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]q,+\infty[\,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ não é uma topologia em $\mathbb{R}$.

17 Prove que a intersecção de duas topologias num conjunto X ainda é uma topologia em X, mas que a sua união nem sempre é uma topologia em X. O que poderemos dizer acerca da intersecção de uma família qualquer de topologias em X?

18 Dê exemplo de duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \not\subseteq \mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_2 \not\subseteq \mathcal{T}_1$.

19 Mostre que todo o subespaço de um espaço discreto é discreto.

20 Seja $\mathcal{T}$ a topologia usual em $\mathbb{R}$.

(a) Determine a topologia relativa $\mathcal{T}_\mathbb{N}$ no conjunto $\mathbb{N}$.

(b) Verifique se cada um dos seguintes subconjuntos de $[0,1]$ é aberto em $[0,1]$:

i. $]\frac{1}{2}, 1]$; ii. $]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$; iii. $]0, \frac{1}{2}]$.

21 Considere o conjunto $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]a,+\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia relativa de $[0,1]$ induzida por $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

22 Considere o conjunto $\mathcal{T}_0 = \{A \,|\, A \subseteq\,]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}_0$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia relativa de $]-\infty, 0]$ e de $]0,+\infty[$ induzida por $\mathcal{T}_0$.

23 Prove que, se $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua, também o é $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_1')$ sempre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_1' \subseteq \mathcal{T}'$.

24 Prove que, se $f : X \to Y$ é constante, então f é contínua em relação a quaisquer topologias $\mathcal{T}_1$ em X e $\mathcal{T}_2$ em Y.

25 Considere a topologia $\mathcal{T}$ definida no Exercício 21. Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$ são contínuas.

26 Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$, com $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$ são contínuas, onde $\mathcal{T}_0$ é a topologia definida no Exercício 22.

27 Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Mostre que, se toda a função $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X.

28 Sejam $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função contínua, A um subconjunto de X e f_A a restrição de f a A.

(a) Mostre que, se $\mathcal{T}_A$ é a topologia relativa definida em A por $\mathcal{T}$, então $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

(b) Encontre um exemplo que mostre que o resultado recíproco é falso.

29 Mostre que:

(a) o intervalo $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$;

(b) qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

(c) o intervalo $[0, 1]$ não é homeomorfo ao intervalo $]0, 1]$.

30 Mostre que $\mathcal{B} = \{]r, s[\,;\ r, s \in \mathbb{Q},\ r < s\}$ é uma base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.

31 Verifique se $\mathcal{S} = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}\}$ é uma base para uma topologia em $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e, em caso afirmativo, determine essa topologia.

32 Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Construa a topologia gerada por $\mathcal{U}$ quando:

(a) $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}\}$; (b) $\mathcal{U} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, e\}\}$.

33 Determine a topologia em $\mathbb{R}$ gerada por $\mathcal{S} = \{[x, x+1]; x \in \mathbb{R}\}$.

34 Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual $\mathcal{T}$ e a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base

$$\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Mostre que $\mathcal{T}$ é menos fina do que $\mathcal{T}'$.

35 Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $f : X \to [0, 1]$ uma aplicação. Mostre que, se $f^{-1}(]a, 1])$ e $f^{-1}([0, b[)$ são abertos de X para todo o $a, b \in]0, 1[$, então f é contínua.

36 Seja X um espaço topológico. Mostre que, para que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua é necessário que os conjuntos $\{x \in X : f(x) > 0\}$ e $\{x \in X : f(x) < 0\}$ sejam abertos. Será suficiente?

37 Considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$ em $X = \{a,b,c,d,e\}$. Indique as vizinhanças dos pontos c e d.

38 Considere a topologia euclidiana em $\mathbb{R}$. Verifique se algum dos conjuntos seguintes é um sistema fundamental de vizinhanças de 0:

(a) $\{\, [0,\varepsilon[\,;\, \varepsilon > 0\}$;
(b) $\{\,]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$;
(c) $\{\,]-1+\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$;
(d) $\{\, [-\delta,\delta]\,;\, \delta > 0\}$.

39 Considere agora $\mathbb{R}^2$ munido da topologia euclidiana. Verifique se algum dos conjuntos é um sistema fundamental de vizinhanças do ponto (x_0, y_0):

(a) $\{\, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} < 1\}\,;\, a \in \mathbb{R}^+ \,\}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

(b) $\{\, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |x-2| + |y-3| < \frac{1}{n}\}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, $(x_0,y_0) = (2,3)$.

40 Denotando por $\mathcal{T}_1$ a topologia cofinita, verifique se

(a) $\{]-\delta,\delta[\,;\, \delta > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$;

(b) o conjunto $\{\{1\} \cup \{k \in \mathbb{N}\,;\, k \geq n\}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 em $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$.

41 Considere agora a topologia $\mathcal{T}_0 = \{\,]-\infty, a[\,;\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}$ e verifique se os seguintes conjuntos são sistemas fundamentais de vizinhanças de 7:

(a) $\{\,]-\infty, 7+\frac{1}{n}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$;
(b) $\{\,]-\infty, 7+\delta]\,;\, \delta \geq 0\}$.

42 Sejam (X,d) um espaço métrico e $\mathcal{T}$ a topologia definida por d em X. Mostre que, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B_{\frac{1}{n}}(x); n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

43 Suponha que, para cada ponto y de $(Y, \mathcal{T}')$, $\mathcal{U}_y$ é um sistema fundamental de vizinhanças de y, e seja $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função. Mostre que:

(a) f é contínua em x se e só se, qualquer que seja $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_x$;

(b) f é contínua se e só se, sempre que $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_x$.

44 Considere a topologia usual em $\mathbb{R}$. Prove que todo o subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado. Conclua que a topologia cofinita é menos fina do que a usual.

45 Determine os fechados de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]-\infty, a[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

46 Considere $\mathbb{Q}$ munido com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$.

(a) Como sabe, os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Indique um subconjunto de $\mathbb{Q}$ (diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{Q}$) que seja simultaneamente aberto e fechado em $\mathbb{Q}$.

(b) Mostre que toda a aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ é constante.

47 Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A e B dois subconjuntos de X. Mostre que:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

(b) $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$ e $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$;

(c) as inclusões anteriores podem ser estritas.

48 Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Mostre que:

(a) $\overline{A} = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)$;

(b) $\overline{A} = A \cup \mathrm{fr}A$;

(c) $\mathrm{fr}A = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A$ aberto e fechado;

(d) $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{fr}A \cup \mathrm{int}(X \backslash A)$.

49 Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico metrizável, sendo $\mathcal{T}$ definida pela métrica d. Prove que a bola fechada $B_\delta[x]$ é fechada em X, mas nem sempre é o fecho de $B_\delta(x)$.

50 Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X. Prove que as seguintes equivalências não se verificam, exibindo contra-exemplos:

(a) A é aberto se e só se $A = \mathrm{int}(\overline{A})$;

(b) A é fechado se e só se $A = \overline{\mathrm{int}(A)}$.

51 Calcule em $\mathbb{R}$ o interior, o exterior, o fecho, a fronteira e o conjunto derivado de:

(a) $A =]0, 1] \cup \{2\}$;

(b) $B = \mathbb{R}$;

(c) $C = \mathbb{Q}$;

(d) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(e) $E = \{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$;

(f) $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

52 (a) Mostre que o conjunto $\mathcal{T}$, constituído por $\mathbb{N}$, pelo vazio e pelos conjuntos da forma $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, é uma topologia no conjunto dos números naturais.

(b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado dos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2n - 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

53 Determine o interior, o fecho, a fronteira, o exterior, o conjunto derivado e o conjunto dos pontos isolados de $A = [7, +\infty[$, $B = [3, 7[$, $C = \mathbb{N}$, $D = \mathbb{Z}$ e $E =]-\infty, 0]$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, quando:

(a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana;

(b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathcal{T} = \{\, A \,|\, A \subseteq]-\infty, 1] \,\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

54 Considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ em $X = \{a, b, c\}$ e a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, Y, \{u\}\}$ em $Y = \{u, v\}$. Determine uma base $\mathcal{B}$ da topologia produto em $X \times Y$.

55 Determine uma base para a topologia produto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ quando $\mathcal{T}$ é a topologia da alínea (b) do Exercício 53 (pág.6).

56 Sejam X e Y espaços topológicos e $X \times Y$ o seu espaço produto. Dados $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, mostre que:

(a) $\mathrm{int}(A \times B) = \mathrm{int}(A) \times \mathrm{int}(B)$;

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

57 No espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ verifique se as sucessões $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, e, em caso afirmativo, para que números reais convergem, quando:

(a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana;

(b) $\mathcal{T}$ é a topologia discreta;

(c) $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta;

(d) $\mathcal{T}$ é a topologia cofinita;

(e) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;

(f) $\mathcal{T} = \{A \mid A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$;

(g) $\mathcal{T}$ é a topologia gerada pela base $\{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

58 Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é separado quando $\mathcal{T}$ é definida como em cada alínea do Ex. 57.

59 Considere, em $\mathbb{R}^2$, a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r\ ;\ r > 0\}$, onde $U_r = \{(x, y)\ ;\ \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$ não é separado.

60 Prove que, se X é finito, $(X, \mathcal{T})$ é um espaço separado se e só se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta.

61 (a) Mostre que, se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e injectiva e Y é um espaço separado, então também X é separado.

(b) Conclua que todo o subespaço de um espaço separado é separado.

(c) Dê um exemplo de um espaço não separado com um subespaço não trivial separado.

62 Mostre que o produto de dois espaços separados é separado.

63 (a) Usando resultados teóricos, mostre que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, xy = 1\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$.

(b) Conclua que as projecções de um espaço produto nos factores nem sempre são aplicações fechadas.
(Sugestão: Considere o conjunto A da alínea anterior e mostre que $p_{\mathbb{R}}(A)$ não é fechado.)

64 Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço conexo, quando:

(a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathcal{T} = \{\, A\,;\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\,\mathbb{R}\,\}$;

(c) $\mathcal{T}$ tem como base $\{]a, b]\,;\, a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

65 Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologias no conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) $(X, \mathcal{T}_1)$ conexo $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ conexo;

(b) $(X, \mathcal{T}_2)$ conexo $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ conexo.

66 Quais dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ são conexos?

(a) $B_1(1,0)$;

(b) $B_1(1,0) \cup B_1(-1,0)$;

(c) $\overline{B_1(1,0)} \cup \overline{B_1(-1,0)}$;

(d) $\overline{B_1(1,0)} \cup B_1(-1,0)$;

(e) $\{(q,y) \in \mathbb{R}^2 \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in [0,1]\} \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$;

(f) o conjunto de todos os pontos que têm pelo menos uma coordenada em $\mathbb{Q}$;

(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{x}\}$.

67 Dê exemplos de:

(a) conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa;

(b) uma sucessão decrescente de conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa.

68 (a) Dê um exemplo de um conexo de $\mathbb{R}^2$ (diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{R}^2$):

i. X_1 tal que o complementar de X_1 seja conexo;

ii. X_2 tal que o complementar de X_2 tenha duas componentes conexas;

iii. X_4 tal que o complementar de X_4 tenha quatro componentes conexas;

iv. X tal que o complementar de X tenha uma infinidade de componentes conexas.

(b) Se os problemas de (a) fossem postos relativamente a $\mathbb{R}$ (em vez de $\mathbb{R}^2$), que respostas daria? Porquê?

69 Mostre que se o espaço X, não singular, é conexo e separado, então não tem pontos isolados.

70 (a) Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}^2$.

(b) Será necessariamente contínua uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico seja conexo?

71 Mostre que os seguintes conjuntos são conexos por arcos:

(a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para $n > 1$;

(b) o anel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$;

(c) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$.

72 Usando resultados teóricos, mostre que:

(a) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.

(b) Quaisquer dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos:

$$\begin{aligned}
A &= ([0,2] \times \{0,1\}) \cup (\{1\} \times [0,1]); \\
B &= \{(x,x) \mid |x| \leq 1\} \cup \{(x,-x) \mid |x| \leq 1\}; \\
C &= \{(x,x) \mid |x| \leq 1\} \cup \{(x,-x) \mid x \in [-1,0]\}.
\end{aligned}$$

73 (a) Mostre que todo o espaço finito é compacto.

(b) Mostre que um espaço topológico discreto é compacto se e só se é finito.

(c) Mostre que todo o espaço munido da topologia cofinita é compacto.

(d) Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias definidas num conjunto A tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Mostre que, se $(A, \mathcal{T}_2)$ é compacto, também $(A, \mathcal{T}_1)$ é compacto.

74 Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ são compactos?

(a) $[0, 1)$; (b) $[0, +\infty)$; (c) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$; (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 1\}$;

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 < 1\}$; (f) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}\right\}$.

75 Verifique se os subconjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{-2\} \cup]-1, 0[$ e $]0, 1[$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ são compactos, quando:

(a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathcal{T} = \{\, A \,;\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\, \mathbb{R}\,\}$.

76 Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base $\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Mostre que o intervalo $[0, 1]$ (com a topologia de subespaço de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$) não é compacto.

77 Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para o ponto x no espaço topológico X. Mostre que $S = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é um subespaço compacto de X.

78 Defina uma topologia $\mathcal{T}$ em $\mathbb{N}$ de forma que o espaço $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ seja compacto e separado.

79 Seja X um espaço topológico. Mostre que:

(a) a reunião finita de subespaços compactos de X é um compacto;

(b) a intersecção de um subconjunto fechado com um subconjunto compacto de X é compacta;

(c) se X é um espaço de Hausdorff, então a intersecção de qualquer família de subespaços compactos de X é ainda um compacto;

(d) no resultado da alínea anterior é fundamental a hipótese de que o espaço topológico X seja de Hausdorff;

(e) um subespaço compacto nem sempre é fechado.

80 (a) Mostre que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, \cdots, n\} \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é uma topologia em $\mathbb{N}$.

(b) Verifique que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ não é compacto.

(c) Verifique que toda a função contínua $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é constante.

81 Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostre que, se A não é compacto, então:

(a) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada;

(b) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que, embora limitada, não tem máximo.

82 Considere em $\mathbb{R}$ a métrica d definida por $d(x, y) = |x| + |y|$ se $x \neq y$.

Mostre que o conjunto $]-1, 1[$:

(a) é fechado e limitado; (b) não é compacto.

83 Considere o conjunto $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ munido da topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \gamma, \delta\}\}$. Seja $Y = \{\beta, \gamma, \varepsilon\}$.

(a) Determine o conjunto das vizinhanças de δ.

(b) Determine o interior, o fecho e o derivado de Y.

(c) Verifique se o espaço $(X, \mathcal{T})$:

i. é conexo; ii. é de Hausdorff; iii. é compacto.

84 Seja $\mathcal{T}$ a topologia em $\mathbb{R}$ que tem como base $\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

(a) Determine o interior, o fecho e o conjunto dos pontos isolados de $[0, 1[$.

(b) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ com $f(x) = -x$ é contínua.

(c) Verifique se $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

85 Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ o corpo dos números reais munido da topologia euclidiana $\mathcal{T}$. Considere

$$\mathcal{T}' := \{K \subseteq \mathbb{R} \,;\, K = \emptyset \text{ ou } \mathbb{R} \setminus K \text{ é compacto em } (\mathbb{R}, \mathcal{T})\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{T}'$ é uma topologia em $\mathbb{R}$ estritamente menos fina do que $\mathcal{T}$.

(b) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}')$, com $f(x) = x + 1$, é contínua.

(c) Verifique se $\{[-\delta, \delta] \,|\, \delta > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$.

(d) Mostre que o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ não é separado.

(e) Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ é um espaço conexo.

(f) O espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ é compacto?

86 Em $\mathbb{R}^2$, considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r \,;\, r > 0\}$, onde $U_r = \{(x, y) \,;\, \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$.

(a) Determine o interior e o fecho dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

i. $A = \{(1, 0)\}$;

ii. $B = \{(x, y) \,;\, |x| \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$;

iii. $C = \{(x, y) \,;\, x \geq 1\}$.

(b) Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ não é compacto.

87 Para cada par de números reais a, b, considere $X_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > a \text{ e } y > b\}$, e sejam $\mathcal{A} = \{X_{a,b}; a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathcal{A}$.

(a) Mostre que $\mathcal{A}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}$.

(b) Determine o fecho e o interior em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ de $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

(c) Verifique se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$

i. é separado;

ii. é conexo;

iii. é compacto.

88 Seja (X,d) um espaço métrico. Mostre que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x em (X,d) se e só se a sucessão $(d(x_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $\mathbb{R}$.

89 (*) Considere o espaço métrico $\mathcal{L}([0,1],\mathbb{R})$ (munido da métrica do supremo).

(a) Mostre que, se $h\in\mathcal{L}([0,1],\mathbb{R})$, a sucessão (h_n), definida por $h_n(x)=h(x)\times\dfrac{n}{n+1}$ para todo o $x\in[0,1]$ e todo o $n\in\mathbb{N}$, converge para h.

(b) Conclua que, se g é a função nula, então $\overline{B_1(g)}=B_1[g]$.

(c) Prove agora que, para todo o $g\in\mathcal{L}([0,1],\mathbb{R})$ e para todo o $r>0$, $\overline{B_r(g)}=B_r[g]$.

90 Considere agora, no conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ munido da métrica do integral, a sucessão $(f_n:[0,1]\to\mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]\\ 1 & \text{se } x\in[\frac{1}{2},1]\\ n(x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}) & \text{se } x\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}]\end{cases}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$.

(a) Mostre que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

(b) (*) Mostre que esta sucessão não é convergente.

91 Diga se o espaço métrico X é completo, quando:

(a) $X=\{1/n;n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$;

(b) $X=\mathbb{Q}\cap[0,1]$;

(c) $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x>0 \text{ e } y\geq 1/x\}$;

(d) X é discreto.

92 Mostre que o espaço métrico do Exercício 82 (pág.9) é completo.

93 Mostre que, num espaço métrico:

(a) a união finita de subespaços completos é um subespaço completo;

(b) a união infinita de subespaços completos nem sempre é um subespaço completo;

(c) a intersecção de qualquer família de subespaços completos é ainda um subespaço completo.

94 (a) A imagem de uma sucessão de Cauchy em X por uma função contínua $f:(X,d)\to(Y,d')$ pode não ser uma sucessão de Cauchy em Y. Dê um exemplo.

(b) O que acontece se supusermos X completo?

95 Dê exemplos de dois espaços métricos homeomorfos, sendo um deles completo e o outro não.

96 Diga se é ou não verdade que toda a função (entre espaços métricos) cujo domínio está munido da métrica discreta é uniformemente contínua.

97 Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, é contínua mas não é uniformemente contínua.

98 Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos não vazios. Considere em $X \times Y$ a métrica

$$\begin{array}{rcl} d : (X \times Y) \times (X \times Y) & \longmapsto & \mathbb{R}. \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & \max\{d_1(x, x'), d_2(y, y')\} \end{array}$$

(a) Prove que $p_X : (X \times Y, d) \to (X, d_1)$ é uma aplicação uniformemente contínua.

(b) Mostre que uma sucessão $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em $X \times Y$ converge para (x, y) se e só se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x em (X, d_1) e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para y em (Y, d_2).

(c) Prove que o espaço métrico $(X \times Y, d)$ é completo se e só se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços completos.

99 (a) Mostre que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uniformemente contínua e (x_n) é uma sucessão de Cauchy, então $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy.

(b) Mostre que a função $g : [1, +\infty[\to]0, 1]$, com $g(x) = \frac{1}{x}$, é uniformemente contínua.

(c) Conclua que a imagem por uma função uniformemente contínua de um espaço completo pode não ser um espaço completo. (Note que g é uma bijecção uniformemente contínua com inversa contínua.)

(d) Mostre, no entanto, que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma aplicação bijectiva, uniformemente contínua, com inversa uniformemente contínua, então (X, d) é completo se e só se (Y, d') for completo.

100 (a) Mostre que, se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ é contínua e tem imagem não limitada, então f não é uniformemente contínua.

(b) Indique uma tal função f e uma sucessão de Cauchy em $]a, b[$ cuja imagem por f não seja uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$.

101 Mostre que, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a métrica discreta é topologicamente equivalente, mas não uniformemente equivalente, à métrica do Exercício 82 (pág.9).

102 (a) Considere a seguinte métrica em $]0, 1[$:

$$\begin{array}{rcl} d' :]0, 1[\times]0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right| \end{array}$$

Mostre que a métrica euclidiana d é topologicamente equivalente, mas não uniformemente equivalente, a d'.

(b) Considere agora a métrica

$$\begin{array}{rcl} d' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|} \end{array}$$

em $\mathbb{R}$. Mostre que a métrica euclidiana d é uniformemente equivalente a d'.

103 Seja X um espaço vectorial normado.

(a) i. Prove que todo o espaço vectorial normado é um espaço métrico com a métrica definida por $d(x,y) = \|x-y\|$.

ii. Mostre que o recíproco do resultado anterior não se verifica em geral, exibindo um espaço métrico cuja métrica não seja induzida por nenhuma norma.

(b) Seja X um espaço vectorial normado e d uma métrica em X. Prove que d é induzida por uma norma se e só se

$$(\forall x, y \in X)\ (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \ d(x+a, y+a) = d(x,y) \text{ e } \ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y).$$

(c) i. Verifique que, se X é um espaço vectorial normado, $a \in X$ e $r > 0$, então

$$(\forall x \in X)\ \ x \in B_r[a] \ \Leftrightarrow\ \inf\{d(x,y)\,;\, y \in B_r(a)\} = 0.$$

ii. Dê um exemplo de um espaço métrico que não tenha esta propriedade.

(d) i. Prove que, se X é um espaço normado, $a \in A$ e $r > 0$, então $B_r(a) = a + rD$, onde D é a bola unitária.

ii. Conclua que num espaço vectorial normado X duas bolas abertas (respectivamente fechadas) com o mesmo raio são isométricas, isto é, quaisquer que sejam $a, b \in X$, existe uma bijecção $B_r(a) \to B_r(b)$ que preserva a métrica.

iii. Mostre que para espaços métricos em geral este resultado é falso.

(e) Mostre que, se X é um espaço normado e $a \in X$, então $\{a + tD\,;\, t > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de a.

(f) i. Sejam X um espaço normado, $a \in X$ e $r > 0$. Mostre que:

A. $\operatorname{int}(B_r[a]) = B_r(a)$;

B. $\overline{B_r(a)} = B_r[a]$;

C. $\operatorname{fr}(B_r(a)) = \operatorname{fr}(B_r[a]) = \{x \in X\,;\, d(x,a) = r\}$.

ii. Dê exemplos de espaço métricos onde as igualdades anteriores não se verifiquem.

(g) Se (X,d) é um espaço métrico e $A \subseteq X$, chama-se diâmetro de A a

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y)\,;\, x, y \in A\} \quad \text{(que pertence a } [0,+\infty]).$$

i. Mostre que em todo o espaço vectorial normado não nulo o diâmetro de qualquer bola aberta é igual ao dobro do respectivo raio.

ii. Dê um exemplo de um espaço métrico onde esta propriedade não seja válida.

104 Prove que, se X é um espaço normado, então:

(a) A aplicação $\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ é uniformemente contínua;

(b) a aplicação $\begin{array}{ccc} K \times X & \to & X \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$ é contínua;

(c) a norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ é contínua.

105 Sejam X e Y espaços normados e seja $\mathsf{L}(X, Y)$ o espaço vectorial dos operadores lineares limitados (=contínuos) de X em Y.

(a) Mostre que um operador linear $T : X \to Y$ é limitado se e só se $\{\|T(x)\| \,;\, \|x\| \leq 1\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^+$.

(b) Para cada $T \in \mathsf{L}(X, Y)$, definimos

$$\|T\| := \inf\{N > 0 \,;\, \forall x \in X \;\; \|T(x)\| \leq N\|x\|\}.$$

i. Verifique que a função assim definida é uma norma em $\mathsf{L}(X, Y)$.

ii. Prove que $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \,;\, \|x\| \leq 1\}$.

106 Nos exemplos seguintes verifique se T é um operador linear limitado. Em caso afirmativo calcule a sua norma.

(a) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $T : l_2^n \to l_2^m$ definido por $T(x) = (x_1, \cdots, x_l, 0, \cdots, 0)$, onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $l = \min(m, n)$.

(b) Para $p \in \mathbb{N}$, define-se $T : l_p \to l_p$ por $T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$.

(c) Para $p \in \mathbb{N}$, define-se $T : l_p \to l_p$ por $T(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$.

(d) No espaço $\mathcal{C}[0, 1]$ das funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$ munido da métrica do supremo escolhe-se $t_0 \in [0, 1]$ e define-se $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ por $T(f) = f(t_0)$.

(e) No subespaço de $\mathcal{C}[0, 1]$ das funções diferenciáveis com derivada contínua, define-se $T : X \to \mathcal{C}[0, 1]$ por $T(f) = f'$.

107 Sejam Y e Z subespaços vectoriais de X tais que $Y \cap Z = 0$ e $Y + Z = X$. Mostre que:

(a) $X = Y \oplus Z$ se e só se X tem a topologia produto, quando identificado com $Y \times Z$.

(b) Se $X = Y \oplus Z$, então a projecção $X \to Y$ induz um isomorfismo $X/Z \to Y$.

108 Se X e Y são espaços normados, prove que

$$\|(x, y)\|_1 = \|(\|x\|, \|y\|)\|_1 \quad \text{e} \quad \|(x, y)\|_\infty = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\infty$$

são normas no espaço soma directa $X \oplus Y$. Mostre que estas normas são equivalentes.

109 Seja $(\|\cdot\|_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de normas no espaço vectorial V. Prove que $\|\cdot\| = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} \|\cdot\|_\gamma$ é uma norma em V, mas, em geral, $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \|\cdot\|_\gamma$ não é uma norma.

110 Seja Y um subespaço do espaço normado X. Prove que Y é um subespaço fechado se e só se a sua bola fechada unitária é fechada em X.

111 (a) Seja Z um subespaço fechado do espaço normado X. Verifique que a projecção $X \to X/Z$ no espaço normado quociente é um operador linear limitado. Calcule a sua norma.

(b) Sejam $T : X \to Y$ um operador linear limitado, $Z = \mathrm{Ker} T$ e $T_0 : X/Z \to Y$ o operador linear limitado definido por T. Prove que $\|T_0\| = \|T\|$.

112 Seja Y um subespaço fechado do espaço normado X. Prove que, se dois dos espaços X, Y e X/Y são completos, o terceiro também o é.