1 Espaços Métricos

ESPAÇO MÉTRICO
Um par (X, d) diz-se um espaço métrico se X for um conjunto e $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ for uma aplicação que verifica as seguintes condições, quaisquer que sejam $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

`[À função` d `chama-se métrica e aos elementos de` X `pontos do espaço métrico; a condição (3) designa-se por desigualdade triangular.]`

Note que, ao verificar (3), basta-nos considerar três pontos distintos $x, y, z \in X$, uma vez que, se dois deles coincidirem, o resultado é trivial ou segue imediatamente de (1).

BOLA ABERTA e BOLA FECHADA
Dados um (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$, os conjuntos

$$B_r(a) := \{x \in X \,;\, d(x, a) < r\} \quad \text{e} \quad B_r[a] := \{x \in X \,;\, d(x, a) \leq r\}$$

designam-se, respectivamente, por bola aberta e bola fechada de centro a e raio r.

EXEMPLOS.

(1) Se X é um conjunto, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, definida por $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases}$
é uma métrica. `[métrica discreta]`

(2) Em $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ podemos definir diversas métricas:

(a) $d_1(a, b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$,

(b) $d_2(a, b) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$, `[métrica euclidiana]`

(c) $d_\infty(a, b) = \max\{|a_i - b_i| \,;\, i = 1, \cdots, n\}$,

onde $a = (a_i)_{i=1,\cdots,n}$, $b = (b_i)_{i=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^n$.

(3) Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos, podemos definir em $X \times Y$ as métricas

(a) $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + d'(y_1,y_2)$,

(b) $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \left(d(x_1,x_2)^2 + d'(y_1,y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(c) $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}$,

onde (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in X \times Y$.

(4) Se A é um subconjunto de X e d é uma métrica em X, a restrição d_A de d a $A \times A$ é uma métrica em A.

`[Diz-se então que` (A, d_A) `é um subespaço métrico de` (X, d)`.]`

(5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. No conjunto das funções limitadas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ podemos considerar a métrica ρ definida por

$$\rho(f,g) := \sup\,\{|f(x) - g(x)|\,;\, x \in [a,b]\},$$

onde $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções limitadas.

`[Esta métrica chama-se habitualmente métrica do supremo, e o espaço métrico designa-se por` $\mathcal{L}([a,b],\mathbb{R})$`.]`

(6) Como toda a função contínua de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada, podemos considerar ainda o subespaço métrico de $\mathcal{L}([a,b],\mathbb{R})$ das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, que se costuma denotar por $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, ou simplesmente por $\mathcal{C}[a,b]$.

(7) No conjunto das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ podemos ainda considerar a métrica

$$\sigma(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

`[métrica do integral]`

CONJUNTO LIMITADO/FUNÇÃO LIMITADA
Um subconjunto A de um espaço métrico (Y,d) é limitado se existirem $a \in Y$ e $r > 0$ tais que $d(y,a) < r$ qualquer que seja $y \in A$. Uma função $f : X \to (Y,d)$ é limitada se $f(X)$ for um subconjunto limitado de (Y,d).

EXEMPLO.

(8) Se X é um conjunto e (Y,d) um espaço métrico, podemos considerar o espaço métrico $\mathcal{L}(X,(Y,d))$ das funções limitadas de X em (Y,d) munido da métrica do supremo

$$\rho(f,g) := \sup\,\{d(f(x),g(x))\,;\, x \in X\}.$$

FUNÇÃO CONTÍNUA
Sejam (X,d) e (Y,d') espaços métricos e $f:X\to Y$ uma função. Diz-se que $f:(X,d)\to(Y,d')$ é uma função contínua em $a\in X$ se

$$(\forall\varepsilon>0)\ \ (\exists\delta>0)\ \ :\ \ (\forall x\in X)\ \ d(x,a)<\delta\ \Rightarrow\ d'(f(x),f(a))<\varepsilon.$$

$f:(X,d)\to(Y,d')$ diz-se uma função contínua se for contínua em todo o ponto x de X.

Na definição de função contínua em $a\in X$ as bolas abertas são essenciais. De facto:

`[Uma função` $f:(X,d)\to(Y,d')$ `é contínua em` $a\in X$ `se e só se`

$$(\forall\varepsilon>0)\ \ (\exists\delta>0)\ \ :\ \ f(B_\delta(a))\subseteq B_\varepsilon(f(a)).]$$

As bolas abertas têm uma propriedade interessante:

Se $x\in B_r(a)$ então existe $s>0$ tal que $B_s(x)\subseteq B_r(a)$.

ABERTO
Se (X,d) é um espaço métrico e $A\subseteq X$, A diz-se um subconjunto aberto de (X,d) se

$$(\forall x\in A)\ \ (\exists s>0)\ \ :\ \ B_s(x)\subseteq A.$$

Já sabemos que toda a bola aberta é um aberto. Há no entanto abertos que não são bolas abertas. Por exemplo, $]0,+\infty[$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ (com a métrica euclidiana) embora não seja uma bola aberta.
É fácil verificar que os abertos de um espaço métrico (X,d) têm as seguintes propriedades:

(1) $\emptyset$ e X são subconjuntos abertos de (X,d);

(2) se A e B são subconjuntos abertos de (X,d), então também $A\cap B$ o é;

(3) se I é um conjunto e $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de (X,d), então $\displaystyle\bigcup_{i\in I}A_i$ é ainda um aberto de (X,d).

Note-se que, uma vez que a intersecção de dois abertos é um aberto (Propriedade 2), também qualquer intersecção *finita* de abertos é um aberto. Não podemos no entanto generalizar esta propriedade ao caso de uma família qualquer de abertos: há famílias (infinitas) de abertos cuja intersecção não é aberta. Por exemplo, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}$ não é um aberto em $\mathbb{R}$.

Proposição. *Um subconjunto de um espaço métrico é aberto se e só se é reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Como cada bola aberta é um aberto e estes são estáveis para a reunião, conclui-se imediatamente que a reunião de bolas abertas é aberta.

Reciprocamente, se $A \subseteq X$ é aberto, então, para cada $a \in A$, existe $\delta_a > 0$ tal que $B_{\delta_a}(a) \subseteq A$. Logo $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_{\delta_a}(a) \subseteq A$, e obtemos a igualdade pretendida. ∎

O estudo dos subconjuntos abertos de um espaço métrico é justificado pelo seguinte resultado.

Proposição. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.*

(1) $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se, para cada subconjunto aberto V de (Y, d') ao qual $f(a)$ pertença, existir um aberto U de (X, d) tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq V$.

(2) A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua se e só se todo o subconjunto aberto de (Y, d') tiver como imagem inversa por f um subconjunto aberto de (X, d).

Demonstração. (1) ($\Rightarrow$) Seja V um aberto de Y ao qual $f(a)$ pertence. Por definição de aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Da continuidade de f em a conclui-se então que existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, considerando $U = B_\delta(a)$, obtemos $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$, como pretendido.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. A bola aberta $B_\varepsilon(f(a))$ é em particular um aberto ao qual $f(a)$ pertence. Logo, por hipótese, existe um aberto U de X tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Por definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq U$. Finalmente temos $f(B_\delta(a)) \subseteq f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$.
(2) ($\Rightarrow$) Sejam V um subconjunto aberto de Y e $a \in f^{-1}(V)$. Como V é aberto e $f(a) \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$ e podemos então concluir que $f^{-1}(V)$ é um aberto de X.

($\Leftarrow$) Sejam $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $B_\varepsilon(f(a))$ é um aberto de Y, da hipótese segue que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ é um aberto de X. Como $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, pela definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, o que é equivalente a $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, f é contínua em a. ∎

2 Espaços Topológicos

TOPOLOGIA

Dado um conjunto X, um subconjunto $\mathcal{T}$ de partes de X diz-se uma topologia em X se

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;

(2) se $A, B \in \mathcal{T}$ então $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(3) se $(A_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$, então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

[`Ao par` $(X, \mathcal{T})$ `chama-se espaço topológico. Os elementos de` $\mathcal{T}$ `dizem-se os abertos do espaço topológico` $(X, \mathcal{T})$.]

FUNÇÃO CONTÍNUA

Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $f : X \to Y$ é uma função, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$

(1) diz-se contínua em $a \in X$ se: $(\forall V \in \mathcal{T}')\ \ f(a) \in V \ \Rightarrow\ (\exists U \in \mathcal{T}) \ :\ a \in U$ e $f(U) \subseteq V$;

(2) diz-se contínua se: $(\forall V \in \mathcal{T}')\ \ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ e $(Z, \mathcal{T}'')$ são espaços topológicos e $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ e $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ são funções contínuas, então a sua composição $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ é ainda uma função contínua.*

EXEMPLOS.

(1) Se (X, d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é o conjunto dos abertos definidos pela métrica d, então $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico. Por exemplo, a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$ define uma topologia em $\mathbb{R}^n$, a que se chama `topologia euclidiana`.

(2) Em qualquer conjunto X podemos definir:

   (a) a `topologia discreta` $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, em que todo o subconjunto de X é aberto (induzida pela métrica discreta);

   (b) a `topologia indiscreta` (ou `topologia grosseira`) $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$.

(3) Se X é um conjunto qualquer, $\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid X \backslash A$ é um conjunto finito$\}$ é uma topologia em X, a que se dá o nome de `topologia cofinita`.

(4) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dado um subconjunto Y de X, $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \,;\, U \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em Y. A esta topologia chama-se `topologia relativa` – ou `topologia de subespaço` – em Y induzida por $\mathcal{T}$.

ESPAÇO TOPOLÓGICO METRIZÁVEL

Um espaço topológico cuja topologia seja exactamente o conjunto dos abertos definidos por uma métrica diz-se um espaço topológico metrizável.

`[ Note-se que: Duas métricas diferentes num conjunto` X `podem definir a mesma topologia: métricas topologicamente equivalentes. ]`

Proposição. *Se d e d' são métricas num conjunto X, d e d' são topologicamente equivalentes se e só se as funções* $\begin{array}{ccc} (X,d) & \longrightarrow & (X,d') \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ *e* $\begin{array}{ccc} (X,d') & \longrightarrow & (X,d) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ *são contínuas.*

Lema. *Se $(X,\mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ é a topologia de subespaço em $Y \subseteq X$, então a função inclusão* $\begin{array}{ccc} (Y,\mathcal{T}_Y) & \longrightarrow & (X,\mathcal{T}) \\ y & \longmapsto & y \end{array}$ *é contínua.*

Proposição. *Sejam $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.*

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua.

(2) Se $\mathcal{T}'$ é a topologia indiscreta, $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua.

TOPOLOGIAS COMPARÁVEIS
No conjunto das topologias de um conjunto X podemos definir uma relação de ordem do seguinte modo: se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Nesse caso diz-se que $\mathcal{T}$ é uma `topologia menos fina do que` $\mathcal{T}'$ e que $\mathcal{T}'$ é uma `topologia mais fina do que` $\mathcal{T}$.

OBSERVAÇÕES.

(1) Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, dizer que $\mathcal{T}$ é mais fina do que $\mathcal{T}'$ é equivalente a dizer que a função identidade $(X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ é contínua.

(2) A topologia discreta é mais fina do que qualquer outra topologia que se possa definir no conjunto X, enquanto que a topologia indiscreta é menos fina do que qualquer outra.

HOMEOMORFISMO/ESPAÇOS HOMEOMORFOS
Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos.

(1) Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se um `homeomorfismo` se for uma função contínua, bijectiva, com função inversa $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ contínua.

(2) Se existir um homeomorfismo $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se que os espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são `homeomorfos`.

EXEMPLOS. Como subespaços de $\mathbb{R}$, são homeomorfos: $[0, 1]$ e $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$); $]0, 1]$ e $[1, +\infty[$; $\mathbb{R}$ e $]0, +\infty[$.

3 Bases e sub-bases

BASE
Um subconjunto $\mathcal{B}$ de uma topologia $\mathcal{T}$ num conjunto X diz-se uma base da topologia $\mathcal{T}$ se todo o elemento de $\mathcal{T}$ for uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$; isto é

$$\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i \,|\, (B_i)_{i \in I} \text{ é uma família de elementos de } \mathcal{B}\}.$$

Lema. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, então $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$ se e só se, para todo o aberto A, se verificar* $(\forall x \in A)\ (\exists B \in \mathcal{B})\ :\ x \in B \subseteq A.$

EXEMPLOS.

(1) Se (X, d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é a topologia definida pela métrica d, então o conjunto $\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid r > 0,\ x \in X\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$.

`[Em particular, os intervalos abertos limitados formam uma base para a topologia euclidiana em` $\mathbb{R}$`.]`

(2) Um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de X é uma base para a topologia discreta em X se e só se, para todo o ponto x de X, $\{x\} \in \mathcal{B}$.

Proposição. *Dados um conjunto X e um subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(X)$, o conjunto $\mathcal{T}$ constituído pelas reuniões quaisquer de intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma topologia em X.*

SUB-BASE
Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ estão nas condições da proposição anterior, diz-se que $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}$, e que $\mathcal{T}$ é a topologia gerada por $\mathcal{S}$.

`[A topologia gerada por` $\mathcal{S}$ `é portanto a topologia menos fina que contém` $\mathcal{S}$`.]`

EXEMPLOS.

(1) Toda a base de uma topologia é em particular uma sub-base.

(2) $\{]a, a+1[\mid a \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$ `[mas não é uma base]`.

(3) A topologia euclidiana em $\mathbb{R}$ é gerada por $\mathcal{S} = \{]a, +\infty[\,;\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, b[\,;\ b \in \mathbb{R}\}$.

(4) Qualquer que seja X, $\{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ é uma sub-base da topologia cofinita em X.

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}'$, então uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se toda a imagem inversa, por f, de um elemento de $\mathcal{S}$ for um aberto em $(X, \mathcal{T})$.*

Proposição. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\mathcal{S}$ *é uma base para uma topologia em* X.

(ii) (B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$;

(B2) $(\forall B_1,\ B_2 \in \mathcal{S})\ (\forall x \in B_1 \cap B_2)\ (\exists B_3 \in \mathcal{S})\ :\ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposição. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ a topologia relativa em $Y \subseteq X$.*

(1) Se $\mathcal{B}$ é base da topologia $\mathcal{T}$, então $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y\,;\ B \in \mathcal{B}\}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}_Y$.

(2) Se $\mathcal{S}$ é sub-base de $\mathcal{T}$, então $\mathcal{S}_Y := \{S \cap Y\,;\ S \in \mathcal{S}\}$ é uma sub-base da topologia $\mathcal{T}_Y$.

4 Vizinhanças

VIZINHANÇA
Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e a um ponto de X. Diz-se que um subconjunto V de X é uma vizinhança de a se existir um aberto A tal que $a \in A \subseteq V$.

Designaremos o conjunto das vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$ por $\mathcal{V}_x$.

EXEMPLOS. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

(1) Qualquer que seja $x \in X$, $X \in \mathcal{V}_x$.

(2) Se A é aberto e $x \in A$, então $A \in \mathcal{V}_x$.

(3) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, então, quaisquer que sejam $Y \subseteq X$ e $x \in Y$, $Y \in \mathcal{V}_y$.

Proposição. *Um conjunto $A \subseteq X$ é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos.*

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $x \in X$, então:*

(1) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ *e* $V \in \mathcal{V}_x \;\Rightarrow\; x \in V$*;*

(2) $V \in \mathcal{V}_x$ *e* $W \supseteq V \;\Rightarrow\; W \in \mathcal{V}_x$*;*

(3) $V, W \in \mathcal{V}_x \;\Rightarrow\; V \cap W \in \mathcal{V}_x$*;*

Proposição. *Seja $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função.*

(1) f é contínua em $a \in X$ se e só se a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(a)$ é uma vizinhança de a.

(2) f é contínua se e só se, para todo o $x \in X$, a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(x)$ é uma vizinhança de x.

SISTEMA FUNDAMENTAL DE VIZINHANÇAS
Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $x \in X$. Um subconjunto $\mathcal{U}_x$ de $\mathcal{V}_x$ diz-se uma base de vizinhanças de x ou sistema fundamental de vizinhanças de x se, para cada $V \in \mathcal{V}_x$, existir $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subseteq V$.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ for uma topologia em X definida por uma métrica d, então o conjunto das bolas abertas centradas em $x \in X$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

(2) Se $\mathcal{T}$ for a topologia discreta em X, então o conjunto singular $\mathcal{U}_x = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $x \in X$.

Proposição. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ a topologia relativa em $Y \subseteq X$.*

(1) Se $x \in Y$ e $\mathcal{V}_x$ é o conjunto das vizinhanças de x no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então $\mathcal{V}'_x := \{V \cap Y \,;\, V \in \mathcal{V}_x\}$ é o conjunto das vizinhanças de x em $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(2) Se $x \in Y$ e $\mathcal{U}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então $\mathcal{U}'_x := \{U \cap Y \,;\, U \in \mathcal{U}_x\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x em $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

5 Subconjuntos fechados de um espaço topológico

FECHADO

Um subconjunto A de um espaço $(X, \mathcal{T})$ chama-se fechado se o seu complementar for aberto.

Proposição. *Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ se e só se verifica as seguintes condições:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$;

(2) se $U, V \in \mathcal{F}$ então $U \cup V \in \mathcal{F}$;

(3) se $(U_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{F}$, então $\displaystyle\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{F}$.

Proposição. *Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se, qualquer que seja o subconjunto fechado F de $(Y, \mathcal{T}')$, $f^{-1}(F)$ é fechado em $(X, \mathcal{T})$.*

Lema. *Se $\mathcal{F}$ é o conjunto dos subconjuntos fechados de $(X, \mathcal{T})$ e Y é um subconjunto de X, então $\mathcal{F}_Y = \{F \cap Y \mid F \in \mathcal{F}\}$ é o conjunto dos fechados do subespaço $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

FUNÇÃO ABERTA/FUNÇÃO FECHADA

Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se aberta (resp. fechada) se, sempre que A for um subconjunto aberto (fechado) de X, $f(A)$ for um subconjunto aberto (fechado) de Y.

Proposição. *Se $\mathcal{T}_Y$ é a topologia de subespaço em Y definida por $(X, \mathcal{T})$, então a inclusão $(Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ é aberta (fechada) se e só se Y é um subconjunto aberto (fechado) de $(X, \mathcal{T})$.*

Lema. *Toda a função bijectiva, contínua e aberta é um homeomorfismo.*

6 Operações de interior e de aderência

PONTO INTERIOR
Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e Y é um subconjunto de X, um ponto x de X diz-se um ponto interior de Y se Y for uma vizinhança de x.

[O conjunto dos pontos interiores de Y chama-se interior de Y e denota-se por $\overset{\circ}{Y}$, $\mathrm{int}(Y)$ ou simplesmente $\mathrm{int}Y$.]

Lema. *Se Y é um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então:*

(1) $int(Y) \subseteq Y$; $int(Y) = Y \Leftrightarrow Y \in \mathcal{T}$;

(2) $int(Y)$ é um aberto: é o maior aberto contido em Y; logo, $int(Y) = \bigcup\{A \in \mathcal{T}\,;\, A \subseteq Y\}$.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\mathrm{int}(Y) = Y$.

(2) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então $\mathrm{int}(X) = X$ e $\mathrm{int}(Y) = \emptyset$ desde que $Y \neq X$.

(3) Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana, $\mathrm{int}([a, b]) =]a, b[$, $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$, $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

(4) Em $\mathbb{R}$, com a topologia cofinita, se $Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\mathrm{int}(Y) = \begin{cases} Y & \text{se } \mathbb{R} \setminus Y \text{ finito} \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$

PONTO ADERENTE
Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $Y \subseteq X$, um ponto x de X diz-se um ponto aderente de Y se toda a vizinhança de x intersecta Y; isto é, se $(\forall V \in \mathcal{V}_x)\ \ V \cap Y \neq \emptyset$.

[O conjunto dos pontos aderentes de Y chama-se aderência de Y ou fecho de Y, e representa-se por $\overline{Y}$.]

Lema. *Se Y é um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então:*

(1) $Y \subseteq \overline{Y}$; $Y = \overline{Y} \Leftrightarrow Y$ é fechado;

(2) $\overline{Y}$ é fechado: é o menor fechado que contém Y; logo $\overline{Y} = \bigcap\{F\,;\, F$ é fechado e $Y \subseteq F\}$.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\overline{Y} = Y$.

(2) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{Y} = X$ desde que $Y \neq \emptyset$.

(3) Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana, $\overline{]a,b[} = [a,b]$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(4) Em $\mathbb{R}$, com a topologia cofinita, se $Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\overline{Y} = \begin{cases} Y & \text{se } Y \text{ finito} \\ \mathbb{R} & \text{caso contrário.} \end{cases}$

SUBCONJUNTO DENSO/FRONTEIRA/EXTERIOR/DERIVADO

Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e Y um subconjunto de X.

(1) Y diz-se denso se $\overline{Y} = X$.

(2) Um ponto x de X diz-se `ponto fronteira de` Y se

$$(\forall U \in \mathcal{V}_x) \;\; U \cap Y \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus Y).$$

O conjunto dos pontos fronteira de Y chama-se `fronteira de` Y e designa-se por $\text{fr}Y$.

(3) Um ponto x de X diz-se `ponto exterior de` Y se tiver uma vizinhança que não intersecta Y; isto é, se for um ponto interior do complementar de Y.

O conjunto dos pontos exteriores de Y chama-se `exterior de` Y e denota-se por $\text{ext}Y$.

(4) Um ponto x de X diz-se ponto de acumulação de Y se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x) \quad V \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset;$$

isto é, se $x \in \overline{Y \setminus \{x\}}$.

O conjunto dos pontos de acumulação de Y chama-se `derivado de` Y e denota-se Y'.

Um ponto $x \in Y$ diz-se ponto isolado de Y se não for ponto de acumulação.

EXEMPLOS.

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\text{fr}Y = \emptyset$, $\text{ext}Y = X \setminus Y$ e $Y' = \emptyset$; logo, todos os pontos de Y são isolados.

(2) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então, se Y é um subconjunto não vazio de X, Y é denso e $\text{fr}Y = X$. Quanto ao conjunto derivado, se Y for um conjunto singular, então $Y' = X \setminus Y$, enquanto que $Y' = X$ desde que Y tenha pelo menos dois pontos.

(3) Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana,

(a) $\text{fr}(]a,b[) = \text{fr}([a,b]) = \{a,b\}$, $\text{fr}(\{x\}) = \{x\}$, $\text{fr}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$;

(b) $\text{ext}(]a,b[) =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$, $\text{ext}(\{x\}) = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, $\text{ext}\mathbb{Q} = \emptyset$;

(c) $([a,b])' = [a,b]$, $\{x\}' = \emptyset$, $\mathbb{N}' = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

7 Topologia produto

TOPOLOGIA PRODUTO
Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. A topologia $\mathcal{T}$ em $X \times Y$ gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{U \times V\,;\, U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$$

chama-se topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$.

`[Ao espaço topológico` $(X \times Y, \mathcal{T})$ `chama-se espaço produto.]`

Proposição. *Se $\mathcal{T}$ é a topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$, então:*

(1) As projecções $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y : (X \times Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas (e abertas).

(2) Uma função $f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X \times Y, \mathcal{T})$ é contínua se e só se as funções compostas $p_X \circ f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y \circ f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas.

Demonstração. 1. Para verificar que $p_X : X \times Y \to X$ é contínua, basta notar que, se $U \in \mathcal{T}_X$, então $p_X^{-1}(U) = \{(x,y) \in X \times Y\,;\, x \in U\} = U \times Y$, que é aberto em $X \times Y$.
Para provar que p_X é aberta, consideremos $A \in \mathcal{T}$; isto é, $A = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$, com cada $U_i \in \mathcal{T}_X$ e cada $V_i \in \mathcal{T}_Y$. Se $A = \emptyset$, entãp $p_X(A) = \emptyset$ é aberto. Se $A \neq \emptyset$, podemos supor que, para todo o $i \in I$, $V_i \neq \emptyset$. Nesse caso $p_X(A) = p_X(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.
A demonstração de que a função p_Y é contínua e aberta é análoga.
2. Se f é contínua, então $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas, porque são composições de funções contínuas.
Para provar o recíproco, suponhamos que $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas. Seja $U \times V$ um elemento da base $\mathcal{B}$ da topologia produto. Então

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z\,;\, f(z) \in U \times V\} \\ &= \{z \in Z\,;\, p_X(f(z)) \in U \ \wedge\ p_Y(f(z)) \in V\} \\ &= (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V), \end{aligned}$$

que é aberto porque $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas. ∎

Corolário. *Se $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$ são funções entre espaços topológicos, e se considerarmos o conjunto $X \times Y$ munido da topologia produto, a função*
$$\begin{aligned} < f, g >: Z &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$
é contínua se e só se f e g o são.

Demonstração. Pela proposição anterior sabemos que $< f, g >: Z \to X \times Y$ é contínua se e só se $p_X\circ < f, g >$ e $p_Y\circ < f, g >$ o são. Para concluir o resultado basta notar que $p_X(< f, g > (z)) = p_X(f(z), g(z)) = f(z)$ e que $p_Y(< f, g > (z)) = g(z)$, isto é $p_X\circ < f, g >= f$ e $p_Y\circ < f, g >= g$. ∎

`[A definição e os resultados anteriores são facilmente generalizáveis ao produto finito de espaços topológicos.]`

EXEMPLOS.

(1) A topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é a topologia produto das topologias euclidianas em cada um dos factores $\mathbb{R}$.

(2) Sejam $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ espaços topológicos.

   (a) Se, para todo o i, $\mathcal{T}_i$ é a topologia indiscreta em X_i, então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ é a topologia indiscreta em $\prod_{1\leq i\leq n} X_i$.

   (b) Se, para todo o i, $\mathcal{T}_i$ é a topologia discreta em X_i, então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ é a topologia discreta em $\prod_{1\leq i\leq n} X_i$.

8 Sucessões convergentes

SUCESSÃO CONVERGENTE

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X converge para $x \in X$ se $(\forall V \in \mathcal{V}_x)$ $(\exists p \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $n \geq p \;\; \Rightarrow \;\; x_n \in V$.

Diz-se então que x é um limite da sucessão (x_n).

Uma sucessão em $(X, \mathcal{T})$ que convirja para algum $x \in X$ diz-se uma sucessão convergente.

Um ponto $y \in X$ é ponto aderente de (x_n) se $(\forall V \in \mathcal{V}_x)$ $(\forall p \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}) :$ $n \geq p$ e $x_n \in V$.

Lema. *Um ponto y de $(X, \mathcal{T})$ é um ponto aderente de uma sucessão (x_n) em X se e só se*

$$y \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n \, ; \, n \geq p\}}.$$

OBSERVAÇÕES.

(1) Uma sucessão pode convergir para mais do que um ponto.

(2) Se x é um limite de (x_n), então é ponto aderente de (x_n). O recíproco não se verifica.

(3) Toda a sucessão constante – ou constante a partir de alguma ordem – igual a x é convergente, e converge para x.

EXEMPLOS.

(1) Num espaço discreto uma sucessão é convergente se e só se é constante a partir de alguma ordem.

(2) Num espaço indiscreto toda a sucessão é convergente, e converge para todo o ponto do espaço.

Proposição. *Se $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ é uma função contínua e (x_n) é uma sucessão que converge para x em X, então $f(x_n)$ converge para $f(x)$ em Y.*

Demonstração. Seja $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Por definição de função contínua, existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $f(U) \subseteq V$. Como $x_n \to x$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $x_n \in U$. Logo, se $n \geq p$, $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$. ∎

Proposição. *Se A é um subconjunto de $(X, \mathcal{T})$ e (x_n) é uma sucessão em A que converge para x em X, então $x \in \overline{A}$.*

Demonstração. Se $V \in \mathcal{V}_x$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, $x_n \in V$. Como todos os termos da sucessão pertencem a A, concluímos que, para $n \geq p$, $x_n \in V \cap A$, logo $V \cap A \neq \emptyset$ e então $x \in \overline{A}$. ∎

9 Espaços topológicos separados

ESPAÇO SEPARADO
Um espaço topológico diz-se um espaço de Hausdorff, ou espaço separado, ou espaço T_2, se

$$(\forall x, y \in X) \;\; x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; (\exists U \in \mathcal{V}_x) \;\; (\exists V \in \mathcal{V}_y) \;\; : \;\; U \cap V = \emptyset.$$

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço separado e se x e y são limites de uma sucessão (x_n) em X, então $x = y$.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) converge para x e para y. Se $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \in \mathcal{V}_y$, então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que, se $n \geq p$, $x_n \in U$ e, se $n \geq q$, $x_n \in V$. Logo, se $n \geq p$ e $n \geq q$, temos que $x_n \in U \cap V$, e então $U \cap V \neq \emptyset$. Num espaço separado isto significa que $x = y$. ∎

EXEMPLOS.

(1) Todo o espaço topológico metrizável é separado; em particular, $\mathbb{R}^n$, assim como todo o espaço discreto, é separado.

(2) Se $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$, então $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é separado.

(3) Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta num conjunto X com mais do que um ponto, então $(X, \mathcal{T})$ não é separado.

Teorema. *As seguintes condições são equivalentes, para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$:*

(i) o espaço X é separado;

(ii) $(\forall x, y \in X) \;\; x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; (\exists A, B \in \mathcal{T}) \;\; : \;\; x \in A, \;\; y \in B, \;\; e \;\; A \cap B = \emptyset$;

(iii) o conjunto $\Delta = \{(x, x)\,;\, x \in X\}$ é um subconjunto fechado no espaço produto $X \times X$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Por (i) existem $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \in \mathcal{V}_y$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Por definição de vizinhança, existem $A \in \mathcal{T}$ e $B \in \mathcal{T}$ tais que $x \in A \subseteq U$ e $y \in B \subseteq V$. De $U \cap V = \emptyset$ conclui-se que $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Provar que Δ é fechado é provar que, qualquer que seja $(x, y) \in X \times X$ com $x \neq y$, $(x, y) \notin \overline{\Delta}$. Isto segue imediatamente de (ii), pois se $A, B \in \mathcal{T}$ são tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$ então $(A \times B) \cap \Delta = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Então $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$, que é aberto por (iii). Logo, por definição de topologia produto, existem abertos U, V de X tais que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$. Daqui se conclui que $U \in \mathcal{V}_x$, $V \in \mathcal{V}_y$ e $U \cap V = \emptyset$, como queríamos provar. ∎

Proposição. *Sejam Y um espaço de Hausdorff e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Então:*

(1) O conjunto $\{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}$ *é fechado em* X*.*

(2) Se f *coincide com* g *num subconjunto denso de* X*, então* $f = g$*.*

Demonstração. (1) Se $f, g : X \to Y$ são contínuas, então $< f, g >: X \to Y \times Y$ é contínua. Logo, $< f, g >^{-1} (\Delta)$ é um subconjunto fechado de X, porque Δ é fechado em $Y \times Y$. De

$$< f, g >^{-1} (\Delta) = \{x \in X \,;\, ((f(x), g(x)) \in \Delta\} = \{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\},$$

segue agora o resultado.
(2) é agora óbvio, uma vez que, por (1), se tem $\{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\} = \overline{\{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}}$, que por sua vez é denso, ou seja

$$\{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\} = \overline{\{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}} = X. \qquad \blacksquare$$

Proposição. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos, com* Y *separado. Se* $f : X \to Y$ *é uma função contínua, então o gráfico de* f*,* $\Gamma_f := \{(x, f(x))\,;\, x \in X\}$*, é fechado em* $X \times Y$*.*

Demonstração. A função $F : X \times Y \to Y \times Y$, definida por $F(x, y) = (f(x), y)$ é contínua, pois ao compô-la com as projecções $p_1 : Y \times Y \to Y$ e $p_2 : Y \times Y \to Y$ obtemos funções contínuas. Agora é fácil observar que $F^{-1}(\Delta) = \Gamma_f$, logo Γ_f é fechado porque é a imagem inversa de un fechado por uma função contínua. $\blacksquare$

10 Espaços topológicos conexos

ESPAÇO CONEXO
Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ diz-se conexo se não for reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos não vazios.

`[Um espaço diz-se desconexo se não for conexo.]`

Proposição. *Seja* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ *é um espaço conexo.*

(iii) X *não é reunião de dois subconjuntos fechados disjuntos não vazios.*

(iii) Se U *é um subconjunto aberto e fechado de* $(X, \mathcal{T})$*, então* $U = X$ *ou* $U = \emptyset$*.*

(iv) Qualquer aplicação contínua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_d)$*, onde* $\mathcal{T}_d$ *é a topologia discreta, é constante.*

SUBCONJUNTO CONEXO
Um subconjunto A de $(X, \mathcal{T})$ diz-se conexo se o subespaço $(A, \mathcal{T}_A)$ for conexo.

EXEMPLOS.

(1) Se card$X \leq 1$, X é um espaço conexo.

(2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são subconjuntos desconexos de $\mathbb{R}$.

(3) Se X é um espaço discreto, então X é conexo se e só se tem quando muito um ponto.

(4) Se X é um espaço indiscreto, então X é conexo.

(5) Se X é um conjunto infinito munido da topologia cofinita, então X é conexo.

Proposição. *Se A é um subconjunto de $(X, \mathcal{T})$ denso e conexo, então $(X, \mathcal{T})$ é conexo.*

Demonstração. Se B for um subconjunto aberto e fechado de X, $B \cap A$ é um subconjunto aberto e fechado de A. Como A é conexo, $B \cap A = \emptyset$ ou $B \cap A = A$. Se se verificar a primeira igualdade, A é um subconjunto de $X \setminus B$, que é fechado em X. Logo $X = \overline{A} \subseteq X \setminus B$ e então $B = \emptyset$. Se $B \cap A = A$, então $A \subseteq B$, logo, porque B é fechado, $X = \overline{A} \subseteq B$ e então $B = X$. ■

Corolário. *Se A é um subconjunto conexo de $(X, \mathcal{T})$ e B é um subconjunto de X tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é conexo.*

Demonstração. Se considerarmos B com a topologia de subespaço, A é um subconjunto denso de B. Como A é conexo, concluímos que B é conexo, pela proposição anterior. ■

Proposição. *Sejam A e B subconjuntos de $(X, \mathcal{T})$, com A conexo. Se*

$$A \cap int(B) \neq \emptyset \neq A \cap int(X \setminus B),$$

então $A \cap \mathrm{fr}B \neq \emptyset$.

Demonstração. Como $X = \mathrm{int}(B) \cup \mathrm{fr}B \cup \mathrm{int}(X \setminus B)$, e então

$$A = (A \cap \mathrm{int}(B)) \cup (A \cap \mathrm{fr}B) \cup (A \cap \mathrm{int}(X \setminus B)),$$

se $A \cap \mathrm{fr}B = \emptyset$, concluímos que A se pode escrever como reunião de dois abertos disjuntos: $A = (A \cap \mathrm{int}(B)) \cup (A \cap \mathrm{int}(X \setminus B))$. Logo um destes tem que ser vazio, o que contraria a hipótese. ■

Proposição. *Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos conexos de $(X,\mathcal{T})$. Se $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, então $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ é um subconjunto conexo de $(X,\mathcal{T})$.*

Demonstração. Seja B um subconjunto aberto e fechado de $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Se B for não vazio, existe $j \in I$ tal que $B \cap A_j \neq \emptyset$. Logo, como A_j é, por hipótese, conexo e $B \cap A_j$ é aberto e fechado em A_j, conclui-se que $B \cap A_j = A_j$. Como, para todo o $i \in I$, $A_j \cap A_i \neq \emptyset$, $B \cap A_i \neq \emptyset$ e então concluímos que $B = A_i$. Portanto $B = A$ e então A é conexo. ∎

Corolário.

(1) Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos conexos de $(X,\mathcal{T})$ que se intersectam dois a dois (isto é, para todo o par i,j em I, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$), então $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ é um subconjunto conexo de $(X,\mathcal{T})$.

(2) Se $(X,\mathcal{T})$ é um espaço topológico tal que, para cada par de pontos x e y de X, existe um subconjunto conexo que os contém, então $(X,\mathcal{T})$ é conexo.

Teorema. *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se é um intervalo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ não for um intervalo, existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y < z$, $x, z \in A$ e $y \notin A$. Então A é reunião de dois subconjuntos abertos, não vazios, disjuntos:

$$A = (A \cap]-\infty, y[) \cup (A \cap]y, +\infty[).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que I é um intervalo. Suponhamos, por redução ao absurdo, que existem subconjuntos A e B abertos e fechados em I, disjuntos, não vazios, cuja reunião é I. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Suponhamos que $a < b$. O intervalo $[a,b]$ está contido em I, porque I é um intervalo e $a, b \in I$. Sejam $A' = A \cap [a,b]$ e $B' = B \cap [a,b]$, e seja $b' = \inf B'$. Como A' e B' são fechados em $[a,b]$, também são fechados em $\mathbb{R}$. Logo $b' \in B'$ e então $a < b'$. Sejam $A'' = A' \cap [a,b']$ e $a'' = \sup A''$. Então $a'' \in A''$, porque A'' é fechado, logo $a'' < b'$. Podemos então concluir que o intervalo aberto $]a'', b'[$ não intersecta A' nem B', donde não intersecta I, o que é absurdo. ∎

Proposição. *Se $f : X \to Y$ é contínua e sobrejectiva e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Se $B \subseteq Y$ é aberto e fechado em Y, também $f^{-1}(B)$ é aberto e fechado em X. Logo, porque X é conexo, $f^{-1}(B) = \emptyset$, caso em que necessariamente $B = \emptyset$, ou $f^{-1}(B) = X$, caso em que $B = f(f^{-1}(B)) = f(X) = Y$. ∎

Corolário.

(1) Se $f : X \to Y$ é contínua e A é um subconjunto conexo de X, então $f(A)$ é um subconjunto conexo de Y.

(2) Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então X é conexo se e só se Y o é.

(3) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é conexo, então $f(X)$ é um intervalo.

(4) Em $\mathbb{R}^2$, com a métrica euclidiana, qualquer bola aberta é conexa.

Teorema. *Se $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ são espaços não vazios e $\mathcal{T}$ é a topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$, então $(X \times Y, \mathcal{T})$ é conexo se e só se $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ o são.*

Demonstração. Se $X \times Y$ for conexo, então, porque as projecções são funções contínuas e sobrejectivas, X e Y são conexos.

Suponhamos agora que X e Y são conexos. Seja $(a, b) \in X \times Y$. Os subconjuntos $\{a\} \times Y$ e $X \times \{b\}$ de $X \times Y$ são conexos, porque são imagens, por funções contínuas, de Y e X, respectivamente. Além disso, a sua intersecção é não vazia (é igual a $\{(a, b)\}$), logo o subconjunto $S_{(a,b)} = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$ é conexo, porque é a reunião de dois conexos que se intersectam. Para concluir que $X \times Y$ é conexo, basta agora reparar que $X \times Y = \bigcup_{(a,b)\in X\times Y} S_{(a,b)}$ e que, para cada par de pontos $(a, b), (a', b') \in X \times Y$, $S_{(a,b)} \cap S_{(a',b')} \neq \emptyset$. ∎

EXEMPLOS. $\mathbb{R}^2$ é conexo; o complementar de um ponto em $\mathbb{R}^2$ é ainda conexo, mas o complementar de uma recta é desconexo.

COMPONENTE CONEXA
Se X é um espaço topológico e $x \in X$, chama-se componente conexa de x ao maior conexo que contém x (e será designada por C_x).

`[Nota: Como a família de todos os subconjuntos conexos de` X `que contêm` x `é uma família de conexos com intersecção não vazia, a sua reunião é necessariamente o maior conexo que contém` x`.]`

Proposição.

(1) Se $x, y \in X$, então $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$.

(2) Toda a componente conexa é fechada (mas pode não ser aberta).

EXEMPLOS.

(1) Se X é um espaço discreto, então $C_x = \{x\}$.

(2) Se X é um espaço indiscreto, então $C_x = X$, qualquer que seja $x \in X$.

(3) Se considerarmos $\mathbb{Q}$ com a topologia euclidiana e $x \in \mathbb{Q}$, então $C_x = \{x\}$.

Corolário.

(1) Se $f : X \to Y$ é uma função contínua, então a imagem por f de uma componente conexa está contida numa componente conexa (mas pode não coincidir com ela).

(2) Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e C_x é a componente conexa de x em X, então $f(C_x)$ é a componente conexa de $f(x)$ em Y.

(3) Dois espaços homeomorfos têm o mesmo número de componentes conexas.

(4) Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços homeomorfos. Se $x \in X$ e $X \backslash \{x\}$ tem n componentes conexas, então existe $y \in Y$ tal que $Y \backslash \{y\}$ tem n componentes conexas.

ESPAÇO CONEXO POR ARCOS

(1) Dado um espaço topológico X, um caminho em X é uma aplicação contínua $f : [0, 1] \to X$. Diz-se que um caminho f vai de a a b se $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

(2) Um espaço topológico X diz-se conexo por arcos se dados quaisquer pontos a e b de X existir um caminho em X de a a b.

[Todo o espaço conexo por arcos é conexo, mas nem todo o espaço conexo é conexo por arcos. Por exemplo, o subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$X := \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \,;\, x > 0\} \cup \{(0, y) \,;\, y \in [-1, 1]\}$$

é conexo mas não é conexo por arcos.]

EXEMPLOS. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se é um intervalo e se e só se é conexo por arcos.

Toda a bola aberta em $\mathbb{R}^2$ é conexa por arcos.

Proposição. *Todo o subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$ é conexo por arcos.*

Demonstração. Sejam A um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$ e $a \in A$. Consideremos o conjunto $U = \{x \in A \,;\,$ existe um caminho de a a x em $A\}$. Então U e $A \setminus U$ são abertos, logo $U = A$. ∎

11 Espaços topológicos compactos

COBERTURA ABERTA

Seja X um conjunto.

(1) Uma família $(U_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X diz-se uma cobertura de X se $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

(2) Se $(U_i)_{i\in I}$ é uma cobertura de X e J é um subconjunto de I tal que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$, então $(U_j)_{j\in J}$ diz-se uma subcobertura de $(U_i)_{i\in I}$; diz-se finita se J for um conjunto finito.

(3) Uma cobertura $(U_i)_{i\in I}$ de um espaço topológico X diz-se uma cobertura aberta de X se todo o conjunto U_i for aberto em X.

ESPAÇO COMPACTO

Um espaço topológico diz-se compacto se toda a sua cobertura aberta tiver uma subcobertura finita.

Proposição. *Um espaço X é compacto se e só se, sempre que $(F_i)_{i\in I}$ for uma família de subconjuntos fechados de X tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, existe $J \subseteq I$, finito, tal que $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.* ∎

Proposição. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, Y um subconjunto de X e $\mathcal{T}_Y$ a topologia de subespaço em Y. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) O espaço $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é compacto.

(ii) Sempre que $(U_i)_{i\in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$ tal que $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, existe um subconjunto finito J de I tal que $Y \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$. ∎

Teorema de Heine-Borel. *Dado um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, de toda a cobertura aberta de $[a, b]$ é possível extrair uma subcobertura finita.*

Demonstração. Seja $(U_i)_{i\in I}$ uma família de abertos de $\mathbb{R}$ tais que $[a, b] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Sejam

$$Y = \{x \in [a, b]\,;\, [a, x] \text{ está contido numa reunião finita de elementos de } (U_i)_{i\in I}\}$$

e $y = \sup Y$. Existe $j \in I$ tal que $y \in U_j$. Como $y \in \overline{Y}$, existe $x \in Y \cap U_j$. Como $x \in Y$, $[a, x] \subseteq \bigcup_{k=1,\cdots,n} U_{i_k}$, logo $[a, y] \subseteq \bigcup_{k=1,\cdots,n} U_{i_k} \cup U_j$ e então $y \in Y$. Se $y = b$, temos o resultado provado. Se $y < b$, chegamos a uma contradição, pois qualquer ponto de U_j entre y e b ainda pertence a Y, o que contraria o facto de y ser o supremo do conjunto. ∎

EXEMPLOS.

(1) Todo o espaço finito é compacto.

(2) Se X é um espaço discreto, então X é compacto se e só se é finito.

(3) Todo o espaço indiscreto é compacto.

(4) $\mathbb{R}$ não é compacto. O espaço $]0, 1]$, com a topologia euclidiana, não é compacto.

Proposição.

(1) Todo o subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.

(2) Todo o subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.

Demonstração. (1) Sejam X um espaço de Hausdorff, K um subespaço compacto de X e $x \in X \setminus K$. Queremos provar que $x \notin \overline{K}$. Para cada $y \in K$ existem abertos U_y e V_y tais que $x \in U_y$, $y \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$. A família $(V_y)_{y \in K}$ constitui uma cobertura aberta de K, que, por K ser compacto, tem uma subcobertura finita $(V_y)_{y \in F}$. Obtemos então considerar o conjunto aberto $\bigcap_{y \in F} U_y$, ao qual x pertence e que não intersecta $\bigcup_{y \in F} V_y \supseteq K$. Logo $x \notin \overline{K}$, como queríamos demonstrar.

(2) Suponhamos que X é compacto e que F é um subespaço fechado de X. Qualquer que seja a família $(U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abertos de X que cubra F, a família $(U_i)_{i \in I \cup \{0\}}$ obtida juntando à primeira o conjunto aberto $U_0 = X \setminus F$ é uma cobertura aberta de X. Logo, porque X é compacto, tem uma subcobertura finita, o que prova em particular que F é coberto por uma parte finita da família (U_i). ∎

Corolário. *Se o espaço X é compacto e de Hausdorff e Y é um subespaço de X, então Y é compacto se e só se é fechado em X.* ∎

Proposição. *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e A é um subespaço compacto de X, então $f(A)$ é um subespaço compacto de Y.*

Demonstração. Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de Y que cobre $f(A)$, então $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ é uma família de abertos de X que cobre A. Como A é compacto, existe um subconjunto finito J de I tal que $A \subseteq \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$. Logo, $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, o que prova que $f(A)$ é compacto. ∎

Corolário.

(1) Se X é um espaço compacto e Y um espaço separado, então toda a aplicação contínua $f : X \to Y$ é fechada.

(2) Se X é compacto e Y é separado, então toda a aplicação bijectiva e contínua $f : X \to Y$ é um homeomorfismo. ∎

Teorema de Tychonoff. *Sejam X e Y espaços topológicos não vazios. O espaço produto $X \times Y$ é compacto se e só se X e Y são compactos.*

Demonstração. Se X e Y são não vazios, as projecções p_X e p_Y são aplicações sobrejectivas. Logo, se $X \times Y$ é compacto, $p_X(X \times Y) = X$ e $p_Y(X \times Y) = Y$ são compactos.

Reciprocamente, sejam X e Y compactos e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$. Seja $x \in X$. Para cada $y \in Y$ existe $U_{(x,y)} \in \mathcal{U}$ tal que $(x,y) \in U_{(x,y)}$. Por construção da topologia produto, existem abertos $A_{(x,y)}$ e $B_{(x,y)}$ de X e Y respectivamente tais que $(x,y) \in A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} \subseteq U_{(x,y)}$. Obtemos assim uma cobertura aberta $(B_{(x,y)})_{y \in Y}$ de Y, a qual, como Y é compacto, tem uma subcobertura finita $(B_{(x,y)})_{y \in Y_x}$. O conjunto $A_x = \bigcap\limits_{y \in Y_x} A_{(x,y)}$ é um aberto de X (porque intersecção finita de abertos) ao qual x pertence. Façamos agora esta construção para todo o $x \in X$. Obtemos uma cobertura aberta $(A_x)_{x \in X}$, que, por X ser compacto, tem uma subcobertura finita $(A_x)_{x \in X_0}$. É fácil ver agora que a família finita $(U_{(x,y)})_{x \in X_0,\, y \in Y_x}$ é uma cobertura aberta de $X \times Y$, pois, para cada $(a,b) \in X \times Y$, existem $x \in X_0$ e $y \in Y_x$ tais que $a \in A_x$ e $b \in B_{(x,y)}$; logo, $(a,b) \in A_x \times B_{(x,y)} \subseteq A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} \subseteq U_{(x,y)}$. ■

Teorema de Kuratowski-Mrowka. *Um espaço topológico X é compacto se e só se, para cada espaço Y, a projecção $p_Y : X \times Y \to Y$ é fechada.* ■

Proposição. *Todo o espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico compacto e $a \in X$. A cobertura aberta $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n(a)$ tem uma subcobertura finita, isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X = B_m(a)$. Logo, X é limitado. ■

Teorema. *Um subespaço de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Demonstração. Se $X \subseteq \mathbb{R}$ for fechado e limitado, então é subconjunto fechado de um intervalo $[a,b]$, que é compacto. Logo, é compacto.

Suponhamos agora que $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Então é fechado em $\mathbb{R}$, porque $\mathbb{R}$ é separado e é limitado, como já vimos. ■

12 Sucessões convergentes e de Cauchy em espaços métricos

Lema. *Num espaço métrico uma sucessão não pode convergir para dois pontos distintos.* ∎

Teorema. *Se X é um espaço métrico e A é um subconjunto de X, então um ponto x de X pertence a $\overline{A}$ se e só se existe uma sucessão em A que converge para x em X.*

Demonstração. Já vimos que, em qualquer espaço topológico, se x é limite de uma sucessão que toma valores em $A \subseteq X$, então $x \in \overline{A}$. Falta-nos então ver que, se X é um espaço métrico, o recíproco também se verifica. Sejam X um espaço métrico, $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a bola aberta $B_{\frac{1}{n}}(x)$ intersecta A. Seja $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$. Verifica-se agora facilmente que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que toma valores em A, converge para x. ∎

Corolário. *Um subconjunto A de um espaço métrico X é fechado se e só se toda a sucessão convergente com valores em A tem o seu limite em A.* ∎

Teorema. *Se X e Y são espaços métricos e $f : X \to Y$ é uma função, então f é contínua se e só se, sempre que (x_n) é uma sucessão em X que converge para x, a sucessão $(f(x_n))$ converge para $f(x)$.*

Demonstração. Para toda a função contínua f entre espaços topológicos, se (x_n) converge para x, então $(f(x_n))$ converge para $f(x)$, como provámos atrás. Resta-nos provar que esta condição caracteriza as funções contínuas entre espaços métricos. Suponhamos que X e Y são espaços métricos e que $f : X \to Y$ é tal que, se (x_n) converge para x em X, então $(f(x_n))$ converge para $f(x)$ em Y. Seja B um fechado de Y. Queremos porvar que a imagem inversa por f, $f^{-1}(B)$ é fechada em X. Seja $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. Pelo teorema anterior, existe uma sucessão (x_n) em $f^{-1}(B)$ que converge para x. Logo, por hipótese, $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Como $(f(x_n))$ é uma sucessão que toma valores em B e B é por hipótese fechado, podemos concluir que o seu limite, $f(x)$, ainda pertence a B. Logo $x \in f^{-1}(B)$ e então este conjunto é fechado, como queríamos provar. ∎

Proposição. *Num espaço métrico todo o ponto aderente a uma sucessão é limite de uma subsucessão da sucessão dada.*

Demonstração. Seja a um ponto aderente da sucessão (x_n) no espaço métrico X. Vamos usar recorrência para construir uma subsucessão de (x_n) que convirja para a. Para $n = 1$, existe $p(1) \in \mathbb{N}$ tal que $x_{p(1)} \in B_1(a)$, por definição de ponto aderente e uma vez que $B_1(a)$ é uma vizinhança de a. Para $n = 2$, existe $p(2) \in \mathbb{N}$ tal que $p(2) > p(1)$ e $x_{p(2)} \in B_{\frac{1}{2}}(a)$, por definição de ponto aderente. Definido $p(k)$ para $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $p(k+1) \in \mathbb{N}$ de forma que $p(k+1) > p(k)$ e $x_{p(k+1)} \in B_{\frac{1}{k+1}}(a)$. A sucessão assim definida é, por construção, uma subsucessão de (x_n) que converge para a. ∎

SUCESSÃO DE CAUCHY
Uma sucessão (x_n) num espaço métrico (X, d) diz-se uma sucessão de Cauchy se verificar a seguinte condição: $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists p \in \mathbb{N})\ :\ (\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq p,\ m \geq p \ \Rightarrow\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposição.

(1) Toda a sucessão convergente num espaço métrico é de Cauchy.

(2) Toda a sucessão de Cauchy é limitada.

Demonstração. (1) Seja (x_n) uma sucessão que converge para x no espaço métrico (X, d), e seja $\varepsilon > 0$. Por definição de sucessão convergente, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, se $n \geq p$ e $m \geq p$, obtemos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy no espaço métrico (X, d).
Para $\varepsilon = 1$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq p$, então $d(x_n, x_m) < 1$. Então a bola aberta $B_1(x_p)$ contém todos os termos da sucessão de ordem igual ou superior a p. Resta-nos agora limitar os restantes termos $x_1, \cdots, x_{p-1}$, que são em número finito. Podemos então considerar $r = \max\{d(x_i, x_p)\,;\, i \leq p\} + 1$. É óbvio que todos os termos da sucessão se encontram na bola aberta $B_r(x_p)$ e então a sucessão é limitada. ∎

Proposição. *Toda a sucessão de Cauchy com uma subsucessão convergente é convergente.*

Demonstração. Seja x o limite de uma subsucessão $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ da sucessão de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Queremos provar que (x_n) também converge para x. Seja $\varepsilon > 0$. Porque $(x_{\varphi(n)})$ converge para x, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, porque (x_n) é de Cauchy, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq q$, então $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se considerarmos agora $r = \max\{\varphi(p), q\}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq r$, obtemos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(p)}) + d(x_{\varphi(p)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

logo (x_n) converge para x. ∎

Corolário. *Se (x_n) é uma sucessão num espaço métrico, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (x_n) *é convergente;*

(ii) (x_n) *é de Cauchy e tem um ponto aderente;*

(iii) (x_n) *é de Cauchy e tem uma subsucessão convergente.* ∎

13 Espaços métricos completos

ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO

Um espaço métrico (X, d) diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em X for convergente.

EXEMPLOS.

(1) $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

(2) $\mathbb{Q}$ e $]0, 1]$, com a métrica euclidiana, não são espaços completos.

Proposição.

(1) Se Y é um subespaço completo de um espaço métrico X, então Y é fechado em X.

(2) Se X é um espaço métrico completo e Y é um subconjunto de X, então Y é um subespaço métrico completo se e só se é fechado em X.

Demonstração. (1) Se $x \in \overline{Y}$, existe uma sucessão (y_n) em Y que converge para x. A sucessão (y_n) é então de Cauchy, logo converge em Y para um ponto $y \in Y$. Nesse caso também converge em X para y e então podemos concluir que $x = y \in Y$, pela unicidade do limite.

(2) Temos apenas que provar que um subconjunto fechado Y de um espaço completo X é um espaço completo. Seja (y_n) uma sucessão de Cauchy em Y. Então (y_n) é uma sucessão de Cauchy em X, logo converge para $x \in X$, visto que X é completo. Como Y é fechado, concluímos que $x \in Y$ e então (y_n) é convergente em Y. ∎

Proposição. *Todo o espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico compacto e (x_n) uma sucessão de Cauchy em X. Se (x_n) não for convergente, então não tem nenhum ponto aderente. Logo, para cada $a \in X$, existe $U_a \in \mathcal{T}$ tal que $a \in U_a$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n$, então $x_m \notin U_a$. A cobertura aberta assim obtida $(U_a)_{a \in X}$ tem uma subcobertura finita: $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}$. Para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, por construção da cobertura existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n_i$, então $x_m \notin U_{a_i}$. Logo podemos concluir que, se $m \geq \max\{n_i\,;\, i = 1, \cdots, k\}$, $x_m \notin \bigcup U_{a_i} = X$, o que é absurdo. ∎

Teorema. *Se X é um conjunto não vazio e (Y, d) um espaço métrico, então o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ das funções limitadas de X em Y, munido da métrica do supremo*

$$\rho(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x))\,;\, x \in X\},$$

é um espaço completo se e só se (Y, d) é completo.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Seja (y_n) uma sucessão de Cauchy em Y. Consideremos as funções constantes $f_n : X \to Y$ com $f_n(x) = y_n$. A sucessão de funções (f_n) é de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$, pois $\rho(f_n, f_m) = d(y_n, y_m)$. Logo a sucessão (f_n) converge para uma função $f : X \to Y$ em $\mathcal{L}(X, Y)$. Sejam $x \in X$ e $y = f(x)$. Então, como $d(y_n, y) \leq \rho(f_n, f)$, é agora fácil concluir que (y_n) converge para y em (Y, d).

($\Leftarrow$): Seja $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$. Para cada $x \in X$, $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m)$; logo $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em Y. Como Y é completo, $(f_n(x))$ é uma sucessão convergente. Designando por $f(x)$ o seu limite, construímos uma função $f : X \to Y$. Falta-nos provar que a sucessão (f_n) converge para f e que f é uma função limitada.

Seja $\varepsilon > 0$. Porque a sucessão (f_n) é de Cauchy, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$ e $m \geq p$, então $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Para cada $x \in X$, como $f_n(x) \to f(x)$ em Y, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq q$, então $d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, se $n \geq p$, temos que

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Considerando $m = \max\{p, q\}$, obtemos

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

o que prova que

$$\rho(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x))\,;\, x \in X\} \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

É agora imediato que f é limitada. ∎

Proposição. *Se (X, d') e (Y, d) são espaços métricos, então o espaço métrico $\mathcal{C}^*(X, Y)$ das funções limitadas e contínuas de (X, d) em (Y, d'), munido da métrica do supremo, é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $(f_n : (X, d) \to (Y, d'))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções contínuas e seja $f : (X, d) \to (Y, d')$ o seu limite em $\mathcal{L}(X, Y)$. Queremos provar que $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $\rho(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. A continuidade da função f_p em x garante-nos que existe $\delta > 0$ tal que, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta$, então $d'(f_p(x), f_p(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta$, temos que

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f_p(x)) + d'(f_p(x), f_p(x')) + d'(f_p(x'), f(x')) \leq \rho(f, f_p) + \frac{\varepsilon}{3} + \rho(f, f_p) = \varepsilon.$$

∎

Corolário. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. O espaço $\mathcal{C}^*(X, Y)$ é um espaço métrico completo se e só se (Y, d') é completo.*

Demonstração. Para provar ($\Rightarrow$) usa-se exactamente a argumentação usada no Teorema anterior, pois as funções constantes são também contínuas.

($\Leftarrow$): Se (Y, d') for completo, então $\mathcal{C}(X, Y)$ é um subespaço fechado do espaço completo $\mathcal{L}(X, Y)$. ∎

OBSERVAÇÃO. Se considerarmos o seguinte subespaço de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})\,;\, \rho(f, g) \leq 1\}$$

onde g é a função nula, então A é completo e limitado, mas não é compacto.

Teorema. *Todo o espaço métrico é subespaço denso de um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico. Consideremos no conjunto

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (x_n) \text{ é uma sucessão de Cauchy em } X\}$$

a relação de equivalência: $(x_n) \sim (y_n)$ se a sucessão $(d(x_n, y_n))$ convergir para 0 em $\mathbb{R}^+$. Seja Y o conjunto das classes de equivalência desta relação; isto é,

$$Y = \{[(x_n)]\ ;\ (x_n) \text{ é uma sucessão de Cauchy em } X\}.$$

Para cada par de elementos de Y, $[(x_n)], [(y_n)]$, definimos

$$\gamma([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

(Note-se que, se (x_n) e (y_n) são sucessões de Cauchy, então $(d(x_n, y_n))$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}^+$, logo converge.)

(a) Vejamos em primeiro lugar que a função γ está bem definida, isto é, que a expressão acima não depende dos representantes das classes escolhidos: se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então

$$\begin{array}{rrcl} & d(x_n, y_n) & \leq & d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ \text{e} & d(x'_n, y'_n) & \leq & d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n). \end{array}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0$, concluímos pelo Teorema das Sucessões Enquadradas que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

(b) γ é uma métrica em Y:

(b1) $\gamma([(x_n)], [(y_n)]) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow [(x_n)] = [(y_n)]$.

(b2) $\gamma([(x_n)], [(y_n)]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \gamma([(x_n)], [(y_n)])$.

(b3)
$$\begin{array}{rl} \gamma([(x_n)], [(z_n)]) & = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) = \\ & = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = \gamma([(x_n)], [(y_n)]) + \gamma([(y_n)], [(z_n)]). \end{array}$$

(c) Podemos identificar X com um subespaço de Y através da função (injectiva)

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & [(x)] \end{array}$$

(onde $[(x)]$ representa a classe de equivalência da sucessão constante igual a x). Como $\gamma([(x)], [(y)]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$, X tem a métrica de subespaço. Para verificar que X

é denso em Y, consideremos um elemento $[(x_n)]$ de Y. A sucessão de classes de equivalência das sucessões constantes

$$y^1 = [(x_1)], \cdots, y^k = [(x_k)], \cdots$$

converge para $[(x_n)]$ pois $\gamma([y^k], [(x_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_k, x_n)$, que sabemos tender para 0 quando k tende para $+\infty$, por definição de sucessão de Cauchy.

(d) Falta verificar que Y é um espaço completo. Para isso consideremos uma sucessão $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de Y, onde, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$y^k = [(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Isto é,

$$\begin{array}{cccccccc}
y_1: & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots & x_n^1 & \cdots \\
y_2: & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & \cdots \\
y_3: & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
y_n: & x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Porque cada $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_k$ e $m \geq n_k$, então

$$d(x_n^k, x_m^k) < \frac{1}{k}.$$

Consideremos a sucessão $(x_{n_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em X e verifiquemos que é de Cauchy. Sejam $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{k} < \varepsilon$. Porque $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em Y, existe $p \in \mathbb{N}$, que podemos considerar maior ou igual a k, tal que, se $l \geq p$ e $m \geq p$, então

$$\gamma(y^l, y^m) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^l, x_n^m) < \frac{1}{k}.$$

Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq q$, então $d(x_n^l, x_n^m) \leq \frac{1}{k}$. Donde

$$d(x_{n_l}^l, x_{n_m}^m) \leq d(x_{n_l}^l, x_n^l) + d(x_n^l, x_n^m) + d(x_n^m, x_{n_m}^m) < \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \frac{1}{m} < \frac{3}{k} < \varepsilon.$$

Falta agora verificar que $y^n \to y = [(x_{n_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}]$; isto é, que $\lim_{n\to\infty} \gamma(y^n, y) = 0$. Mas

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(y^n, y) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} d(x_k^n, x_{n_k}^k) \leq \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (d(x_k^n, x_{n_n}^n) + d(x_{n_n}^n, x_{n_k}^k)) = 0,$$

por construção de $(x_{n_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$. ■

14 Espaços métricos compactos e funções uniformemente contínuas

Sejam (X,d) e (Y,d') espaços métricos.

FUNÇÃO UNIFORMEMENTE CONTÍNUA
Uma função $f:(X,d)\to(Y,d')$ diz-se uniformemente contínua se

$$(\forall\varepsilon>0)\ \ (\exists\delta>0)\ \ :\ \ (\forall x,x'\in X)\ \ d(x,x')<\delta\ \ \Rightarrow\ \ d'(f(x),f(x'))<\varepsilon.$$

Proposição. *A composição de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.* ■

Teorema. *Se (X,d) é um espaço métrico compacto e $f:(X,d)\to(Y,d')$ é uma função contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon>0$. Para cada $x\in X$ existe $\delta(x)>0$ tal que, se $x'\in X$ e $d(x,x')<\delta(x)$, então $d'(f(x),f(x'))<\frac{\varepsilon}{2}$.
Considerando, para cada $x\in X$, $r(x):=\frac{\delta(x)}{2}$, as bolas abertas $B_{r(x)}(x)$ formam uma cobertura aberta de X, que é compacto. Logo, existem $a_1,\cdots,a_n\in X$ tais que $X=\bigcup_{i=1}^{n}B_{r(a_i)}(a_i)$.
Sejam $\delta=\min\{r(a_i)\,;\,i=1,\cdots,n\}$ e $x,x'\in X$ tais que $d(x,x')<\delta$. Existe $j\in\{1,\cdots,n\}$ tal que $x\in B_{r(a_j)}(a_j)$. Então

$$d(x',a)\le d(x',x)+d(x,a)<\delta+r(a_j)\le r(a_j)+r(a_j)=\delta(a_j).$$

Logo $d(x,a_j)<\delta(a_j)$ e $d(x',a_j)<\delta(a_j)$, e então

$$d'(f(x),f(x'))\le d'(f(x),f(a))+d'(f(a),f(x'))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

■

MÉTRICAS UNIFORMEMENTE EQUIVALENTES
Duas métricas d e d' em X dizem-se uniformemente equivalentes se as funções identidade $(X,d)\to(X,d')$ e $(X,d')\to(X,d)$ forem funções uniformemente contínuas.

`[E os espaços` (X,d) `e` (X,d') `dizem-se uniformemente equivalentes.]`

EXEMPLO. Sejam d_1, d_2 e d_∞ as métricas em $\mathbb{R}^2$ definidas no Exemplo 1.3.2. Os espaços métricos $(\mathbb{R}^2,d_1)$, $(\mathbb{R}^2,d_2)$ e $(\mathbb{R}^2,d_\infty)$ são uniformemente equivalentes.

15 Espaços normados

ESPAÇO NORMADO
Chama-se espaço normado a um par $(V, \|\cdot\|)$, onde V é um espaço vectorial sobre um corpo K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ é uma função que verifica as seguintes condições, para $x, y \in V$ e λ um escalar (i.e. $\lambda \in K$):

(1) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

OBSERVAÇÕES.

(1) Sempre que se considerar um espaço normado sobre $\mathbb{C}$ dir-se-á `espaço normado complexo`.

(2) À função $\|\cdot\|$ chama-se `norma`.

(3) Todo o espaço normado é em particular um espaço métrico, com a métrica $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Nesse caso a norma é recuperada de d através de $\|x\| = d(x, 0)$. Em particular, todo o espaço normado é um espaço topológico. Sempre que nos referirmos a propriedades de um espaço normado que dependam de uma métrica ou de uma topologia estamos a considerar a métrica e a topologia induzidas pela norma.

(4) Nem toda a métrica num espaço vectorial é definida por uma norma. De facto, dada uma métrica d num espaço vectorial, $\|x\| = d(x, 0)$ define uma norma se e só se, para $x, y, z \in V$ e λ escalar,

$$d(x, y) = d(x + z, y + z) \text{ e } d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

ESPAÇO DE BANACH
Um espaço de Banach é um espaço normado completo.

EXEMPLOS.

(1) $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, como espaços vectoriais, com a norma

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$; a estes espaços chamamos, respectivamente, `espaço real euclidiano` e `espaço complexo euclidiano`.

(2) Se X é um conjunto, o espaço vectorial $\mathcal{L}(X,\mathbb{R}) = \mathcal{L}(X)$, munido da `norma` (`do supremo` ou `uniforme`)

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \rho(f, 0)$$

é um espaço normado (completo).

(3) Se X é um espaço topológico, o espaço vectorial $\mathcal{C}^*(X,\mathbb{R}) = \mathcal{C}^*(X)$ das funções contínuas e limitadas de X em $\mathbb{R}$ é um espaço normado (completo) quando munido da norma do supremo. Em particular, se X é um espaço compacto, o espaço vectorial das funções contínuas $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ é um espaço normado para a norma do supremo. Note-se que, como $f(X)$ é um compacto, $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$.

(4) Se $X = \mathbb{R}^n$ ou $X = \mathbb{C}^n$, a norma $\|\cdot\|_1$ definida por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

(Note-se que em $\mathbb{R}^n$ $\|\cdot\|_1$ é a norma definida pela métrica d_1.) A este espaço chama-se `espaço (real` ou `complexo)` l_1^n e à norma chama-se `norma` l_1.

De igual modo, podemos considerar o `espaço` l_∞^n com a `norma` l_∞ definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

(que corresponde à métrica d_∞ já estudada).

(5) Se $1 \le p < \infty$, definimos o espaço (real ou complexo) l_p^n como o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ munido da norma l_p:

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Note-se que l_2^n é o espaço euclidiano (de dimensão n).

(6) Em

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\; f \text{ contínua e existem } a, b \in \mathbb{R} \text{ tais que } \{x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) \neq 0\} \subseteq [a,b]\}$$

definimos a norma

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

(7) Para $1 \leq p < \infty$, o `espaço` l_p consiste no conjunto das sucessões $x = (x_1, x_2, \cdots)$ tais que

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

A norma de um elemento $x \in l_p$ é

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

O `espaço` l_∞ é o espaço das sucessões limitadas munido da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|,$$

e c_0 é o espaço de todas as sucessões (de escalares) que convergem para 0, munido da norma $\|\cdot\|_\infty$.

(8) O espaço $\mathcal{C}^{(n)}(0,1)$ tem como pontos as funções $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ deriváveis até à ordem n e com derivadas (até à ordem n) contínuas e limitadas, e como norma

$$\|f\| = \sup\{\sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(t)| \ ; \ 0 < t < 1\}.$$

(9) O conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n, $f(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$, pode ser munido da norma

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} (k+1)|c_k|.$$

SUBESPAÇO NORMADO

(1) Se X é um espaço normado, um seu subespaço normado é um subespaço vectorial equipado com a norma induzida pela norma de X.

(2) Dado $Z \subseteq X$, chama-se subespaço linear gerado por Z a

$$\mathrm{lin}Z = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \ : \ z_k \in Z,\, \lambda_k \in K,\, n = 1, 2, \cdots\}$$

(que é o menor subespaço que contém Z).

Se X é um espaço normado, chamamos `bola unitária` à bola aberta de raio 1 e centro 0, que denotamos por D (ou por $D(X)$ se estivermos a trabalhar com mais do que um espaço).

Proposição. *Seja V um espaço vectorial.*

(1) Dada uma norma $\|\cdot\|$ em V, a sua bola unitária $D = \{x \in X \,;\, \|x\| < 1\}$ tem as seguintes propriedades:

(a) $\forall x, y \in D\ \forall \lambda, \mu \in K\ |\lambda| + |\mu| \leq 1 \ \Rightarrow\ \lambda x + \mu y \in D$;

(b) $\forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0\ x + \varepsilon D \subseteq D$;

(c) $\forall x \in V\ x \neq 0\ \exists \lambda, \mu \in K \ : \ \lambda x \in D\ \wedge\ \mu x \notin D$.

(2) Se $D \subseteq V$ satisfizer as condições (a)-(c), então

$$\|x\| := \inf\{t \,;\, t > 0 \text{ e } x \in tD\}$$

define uma norma em X tal que D é a sua bola unitária.

OBSERVAÇÃO. Num espaço normado X as bolas abertas são completamente determinadas por D; de facto

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \forall a \in X\ \ B_\varepsilon(a) = a + \varepsilon D.$$

OPERADOR LINEAR/OPERADOR LINEAR LIMITADO

(1) Se X e Y são espaços normados sobre o mesmo corpo, chama-se operador linear de X em Y a uma função linear $T : X \to Y$; isto é

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2),$$

para todo o par de pontos x_1, x_2 de X e todo o par de escalares λ_1, λ_2.
Se $Y = K$, T diz-se uma funcional linear.

(2) Um operador linear $T : X \to Y$ diz-se limitado se

$$\exists N > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \|T(x)\| \leq N\|x\|.$$

Dados espaços normados X e Y, designamos o espaço vectorial dos operadores lineares de X em Y por $\mathsf{F}(X, Y)$, e o seu subespaço vectorial dos operadores lineares limitados por $\mathsf{L}(X, Y)$. Dado um espaço normado X, denotamos o espaço vectorial das suas funcionais lineares por X' e o seu subespaço das funcionais lineares limitadas por X^*.

Teorema. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *T é contínuo;*

(ii) *T é contínuo nalgum ponto de X;*

(iii) *T é limitado.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) é óbvio.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se T é contínuo em $x_0 \in X$, então, tomando $\varepsilon = 1$,

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \|x - x_0\| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \|T(x) - T(x_0)\| < 1.$$

Logo, se $y \in X$ for tal que $\|y\| < \delta$, então, considerando $x = x_0 + y$, temos que $\|x - x_0\| = \|y\| < \delta$, logo $\|T(y)\| = \|T(x - x_0)\| = \|T(x) - T(x_0)\| < 1$. Portanto, se $z \in X$ e $z \neq 0$,

$$\text{como } z = \frac{2\|z\|}{\delta} \frac{\delta z}{2\|z\|} \text{ e } \Big\|\frac{\delta z}{2\|z\|}\Big\| = \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ temos que } \|T(z)\| = \frac{2\|z\|}{\delta} \Big\|T\big(\frac{\delta z}{2\|z\|}\big)\Big\| < \frac{2}{\delta}\|z\|.$$

Temos então que T verifica a condição requerida tomando $N = \frac{2}{\delta}$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Vamos em seguida provar que todo o operador linear limitado é uma função uniformemente contínua. Sabemos, por hipótese, que existe $N > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq N\|x\|$, para todo o $x \in X$. Então, se $\varepsilon > 0$, o valor $\delta = \frac{\varepsilon}{N} > 0$ é tal que, para $x, y \in X$,

$$\|x - y\| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq N\|x - y\| < N\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

∎

Corolário. *Se X e Y são espaços normados e $T : X \to Y$ é um operador linear, então T é um homeomorfismo se e só se T é uma bijecção tal que T e a sua função inversa são operadores lineares limitados.*

Demonstração. Para concluir o resultado basta-nos provar que, se T é um operador linear e bijectivo, com função inversa $T_1 : Y \to X$, então T_1 é um operador linear. Para provar isso, sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ e $y_1, y_2 \in Y$. Sejam x_1, x_2 (os únicos) elementos de X tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Então $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Logo, por definição de inversa, $T_1(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 T_1(y_1) + \lambda_2 T_1(y_2)$. ∎

Duas `normas` $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num mesmo espaço vectorial V dizem-se `equivalentes` se forem topologicamente equivalentes, isto é, se definirem a mesma topologia em V.

Corolário. *Duas normas* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_2$ *em* V *são equivalentes se e só se*

$$\exists c > 0 \;\; \exists d > 0 \;:\; \forall x \in V \;\; \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \leq d\|x\|_1.$$

Demonstração. As duas normas são equivalentes se e só se, por definição, as funções identidade $(V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ e $(V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1)$ são isomorfismos, o que é equivalente – uma vez que são operadores lineares – a serem operadores lineares limitados. Isto é,

$$\exists N > 0 \;:\; \|x\|_2 \leq N\|x\|_1 \text{ e } \exists M > 0 \;:\; \|x\|_1 \leq M\|x\|_2.$$

É agora trivial tirar a conclusão pretendida. ∎

Corolário. *Se* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_2$ *são normas equivalentes em* V*, então* $(V, \|\cdot\|_1)$ *é um espaço completo se e só se* $(V, \|\cdot\|_2)$ *o for.*

Demonstração. Basta notar que as funções identidade $(V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ e $(V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1)$ são – como provámos no teorema acima – uniformemente contínuas e usar o resultado do Exercício 100 (d). ∎

Se X e Y são espaços normados, podemos munir o espaço vectorial $\mathsf{L}(X, Y)$ dos operadores lineares limitados de X em Y de uma norma, do seguinte modo:

$$\|T\| := \inf\{N > 0 \;;\; \forall x \in X \;\; \|T(x)\| \leq N\|x\|\}.$$

OBSERVAÇÃO. Veremos na aula teórico-prática que a função assim definida é uma norma e que se tem ainda

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \;;\; \|x\| \leq 1\}.$$

Aqui vamos apenas observar uma outra propriedade importante de $\|T\|$: o número real $\|T\|$ é o mínimo do conjunto $\{N > 0 \;;\; \forall x \in X \;\; \|T(x)\| \leq N\|x\|\}$, isto é, tem-se que

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|.$$

Suponhamos, por redução ao absurdo, que esta desigualdade não é válida, isto é, que existe $x \in X$ tal que $\|T(x)\| > \|T\| \, \|x\|$. Então fazendo $M = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ temos que $M > \|T\|$ e que qualquer valor inferior a M, nomeadamente qualquer valor entre M e $\|T\|$ não pertence ao conjunto em causa. Logo $\|T\|$ não será o ínfimo do conjunto, o que é absurdo.

Teorema. *Se Y for um espaço de Banach, então $\mathsf{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $\mathsf{L}(X,Y)$. Então, para todo o $x\in X$, uma vez que

$$\|T_n(x)-T_m(x)\| = \|(T_n-T_m)(x)\| \leq \|T_n-T_m\|\,\|x\|,$$

concluímos que $(T_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em Y, logo convergente. Designemos por $T(x)$ o seu limite. Definimos assim uma função $T: X\to Y$. Temos agora que verificar que T é um operador linear limitado e que $T_n\to T$. Dados $x_1,x_2\in X$ e $\lambda_1,\lambda_2\in K$,

$$\begin{aligned} T(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) &&= \lim_{n\to\infty}(\lambda_1T_n(x_1)+\lambda_2T_n(x_2)) \\ &= \lambda_1\lim_{n\to\infty}T_n(x_1)+\lambda_2\lim_{n\to\infty}T_n(x_2) &&= \lambda_1T(x_1)+\lambda_2T(x_2), \end{aligned}$$

logo T é um operador linear. Para verificar que é limitado, consideremos $\varepsilon>0$. Porque (T_n) é de Cauchy, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que, se $n\geq p$ e $m\geq p$, então $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$. Então, quaisquer que sejam $x\in X$ e $m\geq p$,

$$\|T(x)-T_m(x)\| = \|(\lim_{n\to\infty}T_n(x))-T_m(x)\| = \|\lim_{n\to\infty}(T_n-T_m)(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|(T_n-T_m)(x)\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

Logo

$$\|T(x)\| \leq \varepsilon\|x\| + \|T_m(x)\| \leq (\varepsilon+\|T_m\|)\|x\|,$$

e então $T\in\mathsf{L}(X,Y)$; mas também se conclui da desigualdade anterior que $\|T-T_m\|\leq\varepsilon$. Logo $T_m\to T$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema. *Se X, Y e Z são espaços normados e $T: X\to Y$ e $S: Y\to Z$ são operadores lineares limitados, então $S\circ T: X\to Z$ é um operador linear limitado e $\|S\circ T\|\leq\|S\|\|T\|$.* ∎

SÉRIE CONVERGENTE/SÉRIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

Dado um espaço normado X, uma série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ em X (isto é, com $x_k\in X$ para todo o $k\in\mathbb{N}$) diz-se:

(1) convergente para $x\in X$ se a sucessão das somas parciais $(s_n)_n = \big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big)_n$ convergir para x, isto é

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}x_k\Big\| = 0;$$

(2) absolutamente convergente se a série $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_n\|$ convergir em $\mathbb{R}^+$.

Lema. *Num espaço de Banach toda a série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Basta-nos provar que a sucessão das somas parciais (s_n) de uma série absolutamente convergente $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ é uma sucessão de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=p+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$. Então, se $m \geq n \geq p$, $\|s_n - s_m\| = \big\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \big\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$. ∎

OBSERVAÇÃO. Quando, num espaço métrico, queremos provar que uma sucessão de Cauchy (x_n) converge, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^n}$ para todo o $m \geq n$, pois dada qualquer sucessão de Cauchy é fácil construir uma sua subsucessão com esta propriedade, a qual convergirá se e só se a sucessão dada convergir, como indicamos em seguida.

De facto, se (x_n) for de Cauchy, podemos construir uma sua subsucessão $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

(1) existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_1$ e $m \geq p_1$, então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$; em particular, $d(x_{p_1}, x_m) < \frac{1}{2}$ se $m \geq p_1$; definimos $\varphi(1) = p_1$;

(2) de igual modo, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_2$ e $m \geq p_2$, então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^2}$; tomando $\varphi(2) = \max\{p_2, p_1 + 1\}$, temos que $d(x_{\varphi(2)}, m) < \frac{1}{2^2}$, se $m \geq \varphi(2)$, e $\varphi(2) > \varphi(1)$;

(3) dado $n \in \mathbb{N}$ e supondo já definidos $\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(n-1)$ tais que, se $m \geq \varphi(k)$, então $d(x_{\varphi(k)}, x_m) < \frac{1}{2^k}$, escolhemos $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ e tal que, se $m \geq \varphi(n)$, então $d(x_{\varphi(n)}, x_m) < \frac{1}{2^n}$.

A sucessão $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ assim definida verifica a propriedade pretendida.

Teorema. *Um espaço normado é completo se e só se toda a sua série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$: foi provado no lema anterior.

$(\Leftarrow)$: Suponhamos que X é um espaço normado onde toda a série absolutamente convergente é convergente, e seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em X tal que $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq n$. Sejam $x_0 = 0$ e $y_k = x_k - x_{k-1}$ para $k \in \mathbb{N}$. Então (x_n) é a sucessão das somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. É fácil verificar que a série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ é absolutamente convergente, logo converge para algum $x \in X$, ou seja $x_n \to x$. ∎

OBSERVAÇÃO. O uso de séries permite-nos falar de bases de um espaço de Banach: uma sucessão $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base de um espaço de Banach X se todo o $x \in X$ se escrever, de forma única, como soma de uma série $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$. Por exemplo, o espaço das sucessões l_p tem uma base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, onde $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) = (\delta_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ni} = 0$ se $n \neq i$.

Vejamos agora como definir novos espaços à custa de espaços dados.

(1) Se X é um espaço normado e $S \subseteq X$, já mencionámos o subespaço linear $\mathrm{lin}S$ gerado por S, que é o menor subespaço que contém S. Podemos também considerar o menor subespaço fechado que contém S, e que denotamos por $\overline{\mathrm{lin}}S$. Note que $\overline{\mathrm{lin}}S$ é exactamente o fecho de $\mathrm{lin}S$.

(2) Se $T : X \to Y$ é um operador linear entre os espaços normados X e Y, o seu núcleo $\mathrm{Ker}T = \{x \in X\,;\, T(x) = 0\}$ é um subespaço de X enquanto que a sua imagem $\mathrm{Im}T = T(X)$ é um subespaço de Y.

(3) Se X é um espaço vectorial e Z é um seu subespaço, consideramos em X a relação de equivalência $\sim$ definida por $x \sim y$ se $x - y \in Z$. Note que a classe de equivalência de $x \in X$ é $[x] = x + Z$; em particular $[x] = 0$ se e só se $x \in Z$. A estrutura de espaço vectorial em X induz naturalmente uma estrutura de espaço vectorial em $X/_\sim = \{[x]\,;\, x \in X\}$: $\lambda[x] + \mu[y] := [\lambda x + \mu y]$. Denotamos este espaço por X/Z.

   Se Z for um subespaço fechado de X podemos definir em X/Z uma norma:

$$\|[x]\|_0 := \inf\{\|y\|\,;\, y \sim x\} = \inf\{\|x + z\|\,;\, z \in Z\}.$$

   Chamamos ao espaço normado X/Z o `espaço normado quociente` e à norma $\|\cdot\|_0$ `norma quociente`.

   Em particular, se $T : X \to Y$ é um operador linear limitado, então o seu núcleo $Z = \mathrm{Ker}T$ é um subespaço fechado de X e induz um operador linear $T_0 : X/Z \to Y$.

Proposição. *Sejam $T : X \to Y$ um operador linear limitado entre espaços normados, $Z = \mathrm{Ker}T$ e $T_0 : X/Z \to Y$ o operador linear induzido por T. Então T_0 é um operador linear limitado e a sua norma é exactamente $\|T\|$.* ∎

SOMA DIRECTA DE ESPAÇOS NORMADOS

Suponhamos que Y e Z são subespaços fechados dum espaço normado X tais que $Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z = X$. Note que nesse caso X pode identificar-se com $Y \times Z$. Nesse sentido, se as projecções $p_Y : X \to Y$ e $p_Z : X \to Z$ são contínuas (i.e. operadores lineares limitados), diz-se que X é a soma directa de Y e Z e escreve-se $X = Y \bigoplus Z = \{(y, z)\,;\, y \in Y, z \in Z\}$.

---

16 O Teorema de Hahn-Banach

Sejam X um espaço normado, X' o seu dual algébrico (isto é, o espaço vectorial das suas funcionais lineares) e X^* o seu espaço dual.

Lema. *Se $f \in X'$, então f é limitada se e só se $f(B) \neq K$.* ■

HIPERPLANO
Um hiperplano afim (ou simplesmente um hiperplano) é um conjunto da forma

$$H = \{x_0\} + Y = \{x_0 + y\,;\, y \in Y\},$$

onde $x_0 \in X$ e $Y \subseteq X$ é um subespaço de codimensão 1 (isto é, tal que $\dim X/Y = 1$). Diz-se então que H é uma translação de Y.

Se $f \in X'$ e $f \neq 0$, então definimos

$$K(f) := f^{-1}(0) = \{x \in X\,;\, f(x) = 0\} \quad \text{e} \quad I(f) = f^{-1}(1).$$

Note que, se $f \neq 0$, então existe $x_0 \in X$ tal que $I(f) = \{x_0\} + K(f)$, logo $I(f)$ é uma translação de $K(f)$. (Basta considerar $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \neq 0$ e $x_0 := \frac{1}{f(x_1)}\, x_1$.)

Teorema. *Seja X um espaço vectorial.*

(1) *Se $f \in X' \setminus \{0\}$, então $K(f)$ é um subespaço de codimensão 1, logo $I(f)$ é um hiperplano (que não contém 0). Além disso, todo o $x \in X$ se escreve de forma única como $x = y + \lambda x_0$, onde $y \in K(f)$ e $\lambda \in K$.*

(2) *Se $f, g \in X' \setminus \{0\}$ então $f = \lambda g$ se e só se $K(f) = K(g)$.*

(3) *A correspondência $f \mapsto I(f)$ define uma função bijectiva entre as funcionais lineares não nulas e os hiperplanos que não contêm 0.* ■

Lema. *Para $f \in X^*$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\|f\| \leq 1$;

(ii) $\forall x \in D \ \ |f(x)| < 1$;

(iii) $I(f) \cap D = \emptyset$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Se $\|f\| \leq 1$, então, para $x \in D$, $|f(x)| \leq \|x\| < 1$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) é óbvio.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Se $\|f\| > 1$, então existe $x \in X$ tal que $|f(x)| > \|x\|$. Logo $x' := \frac{1}{f(x)}x \in D$ e $f(x') = f(\frac{1}{f(x)}x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$. ∎

Teorema. *Seja X um espaço normado.*

(1) *Seja $f : X \to K$ uma funcional linear não nula.*

Se f é limitada, então $K(f)$ e $I(f)$ são fechados e têm interior vazio.

Se f não é limitada, então $K(f)$ e $I(f)$ são densos em X.

(2) *A correspondência $f \mapsto I(f)$ define uma bijecção entre os operadores lineares limitados não nulos e os hiperplanos fechados que não contêm 0.*

Demonstração. (1) Sejam $f \in X^* \setminus \{0\}$ e $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Como f é contínua, $K(f) = f^{-1}(0)$ e $I(f) = f^{-1}(1)$ são fechados. Para verificar que têm interior vazio basta notar que, quaisquer que sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$,

$$f(x + \varepsilon x_0) = f(x) + \varepsilon f(x_0) \neq f(x).$$

Para provar que, se f não é limitada, $K(f)$ é denso, suponhamos que $K(f)$ não é denso, isto é, que existem $x_0 \in X$ e $r > 0$ tais que $B_r(x_0) \cap K(f) = \emptyset$. Então podemos concluir que $\|f\| \leq \frac{|f(x_0)|}{r}$: de facto, se $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{r}\|x\|$ para algum $x \in X$, então $y := x_0 - \frac{xf(x_0)}{f(x)} \in B_r(x_0) \cap K(f)$.
(2) Segue imediatamente de (1) e do teorema anterior. ∎

Definição. Se X é um espaço vectorial, uma função $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ diz-se uma `funcional convexa` se verificar as seguintes condições

(1) $\forall t \geq 0 \ \ p(tx) = tp(x)$ `[positiva homogénea]`;

(2) $\forall x, y \in X \ \ \forall t \in [0, 1] \ \ p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y)$ `[convexa]`.

Observações: (a) Na presença de (1), a condição de ser convexa é equivalente a ser `sub-aditiva`, isto é:

(2') $\forall x, y \in X \;\; p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

(b) As operações em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ são as naturais: $\forall r \in \mathbb{R}\; \infty + r = \infty + \infty = \infty$; $0 \cdot \infty = 0$ e $t \cdot \infty = \infty$ para $t > 0$. Além disso, ∞ é o elemento máximo de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) Toda a norma é uma funcional convexa; toda a funcional linear é uma funcional convexa.

(d) Dado um conjunto X e duas funções $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$), diz-se que φ `domina` ψ (ou ψ `é dominada por` φ) se, para todo o $x \in X$, $\psi(x) \leq \varphi(x)$.

(e) Uma funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ é dominada pela funcional convexa $p : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto N\|x\|$, se e só se f é limitada e $\|f\| \leq N$.

(f) Quando $f : X \to Z$ for uma `extensão` de $g : Y \to Z$, isto é, quando $Y \subseteq X$ e, para todo o $y \in Y$, $f(y) = g(y)$, escrevemos $g \subseteq f$.

Lema. *Sejam Y um subespaço vectorial de codimensão 1 do espaço vectorial real X, $p : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma funcional convexa e $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ uma funcional linear dominada por p. Existe uma extensão $f : X \to \mathbb{R}$ de f_0 que ainda é uma funcional linear dominada por p.*

Demonstração. Como Y tem codimensão 1, existe $z \in X$ tal que todo o elemento de X se escreve na forma $x = y + tz$ para algum $y \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$. Se existir a funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que estende f_0, então f é completamente determinada por $f(z) = c$:

$$f(x) = f(y + tz) = f_0(y) + tf(z) = f_0(y) + tc.$$

Provar a existência de f é então provar a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $y \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$f(y + tz) \leq p(y + tz) \quad \Leftrightarrow \quad f_0(y) + tc \leq p(y + tz).$$

- Se $t = 0$, a desigualdade é trivialmente satisfeita.

- Se $t > 0$, para todo o $y \in Y$,

$$f_0(y) + tc \leq p(y + tz) \quad \Leftrightarrow \quad c \leq \frac{p(y + tz) - f_0(y)}{t} = p\big(\frac{y}{t}\big) - f_0\big(\frac{y}{t}\big);$$

- Se $t < 0$, isto é $t = -s$, com $s > 0$, para todo o $y \in Y$,

$$f_0(y) - sc \leq p(y - sz) \quad \Leftrightarrow \quad c \geq \frac{-p(y - sz) + f_0(y)}{s} = -p\big(\frac{y}{s} - z\big) + f_0\big(\frac{y}{s}\big).$$

Logo, f é dominada por p se e só se, quaisquer que sejam $y', y'' \in Y$,

$$-p(y'' - z) + f_0(y'') \leq c \leq p(y' + z) - f_0(y).$$

Existirá um $c \in \mathbb{R}$ nestas condições se e só se, quaisquer que sejam $y', y'' \in Y$,

$$-p(y'' - z) + f_0(y'') \leq p(y' + z) - f_0(y') \quad \Leftrightarrow \quad f_0(y') + f_0(y'') \leq p(y' + z) - p(y'' - z).$$

Como f é uma funcional linear dominada por p, temos que

$$f_0(y') + f_0(y'') = f_0(y' + y'') \leq p(y' + y'') = p(y' + z + y'' - z) \leq p(y' + z) + p(y'' - z). \quad \blacksquare$$

O resultado do Lema pode estender-se ao caso de Y não ter codimensão 1. A técnica subjacente é a iteração do processo de construção de f. Podemos então afirmar:

Teorema. *Se Y for um subespaço vectorial do espaço vectorial real X tal que $X = \mathrm{lin}(Y \cup \{z_i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ e $f_0 \in Y'$ é dominada por uma funcional convexa $p : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então f_0 pode ser estendida a uma funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ ainda dominada por p.*

Além disso, se X for um espaço normado e f_0 for uma funcional linear limitada, então f_0 tem uma extensão $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|f_0\|$.

Demonstração. A primeira afirmação segue do lema anterior, iterando o processo de construção de f. A segunda afirmação sai da primeira, atendendo à observação já feita de que f_0 é dominada pela funcional convexa $p : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f_0\|\|x\|$. $\blacksquare$

Na demonstração do Teorema de Hahn-Banach vamos usar a seguinte condição, que é equivalente ao Axioma da Escolha:

Lema de Zorn. *Todo o conjunto ordenado em que todo o seu subconjunto totalmente ordenado tem majorante tem elemento maximal.*

Teorema da Extensão de Hahn-Banach. *Seja Y um subespaço do espaço vectorial real X. Se $f_0 : X \to \mathbb{R}$ é uma funcional linear dominada pela funcional convexa $p : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então existe uma funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que estende f_0 e que é dominada por p.*

Se X é um espaço normado e $f_0 \in Y^*$, então existe $f \in X^*$ tal que $f_0 \subseteq f$ e $\|f\| = \|f_0\|$.

Demonstração. Consideremos o conjunto $\mathcal{F} = \{f_\gamma : Y_\gamma \to \mathbb{R}\,;\, f_\gamma \in Y'_\gamma \text{ e } f_0 \subseteq f_\gamma \leq p\}$, ordenado pela inclusão $\subseteq$. Se $\mathcal{F}_0 = \{f_\gamma\,;\, \gamma \in \Gamma_0\} \subseteq \mathcal{F}$ for um conjunto totalmente ordenado, então $\tilde{f} : \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} Y_\gamma \to \mathbb{R}$, onde $\tilde{f}(x) = f_\gamma(x)$ para $\gamma \in \Gamma_0$ tal que $x \in Y_\gamma$, é um supremo de $\mathcal{F}_0$. Logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tem um elemento maximal, f. Se o domínio de f não for X, pelo lema anterior f pode ser estendida a um subespaço maior, o que contraria o facto de f ser maximal. Logo f tem domínio X e é uma extensão de f_0 nas condições pretendidas.
A segunda afirmação sai agora da primeira, tal como no teorema anterior. $\blacksquare$

O Teorema de Hahn-Banach pode ser estendido ao caso dos espaços vectoriais complexos. Para isso é fundamental a relação entre as funcionais lineares de um espaço vectorial complexo e as funcionais lineares do espaço vectorial real subjacente, que explicamos em seguida.

Um espaço vectorial complexo pode ser considerado como espaço vectorial real. Para X espaço vectorial complexo, denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$ o espaço vectorial real que lhe corresponde. Podemos então definir as funções

$$\begin{array}{ccc} r : X^* & \longrightarrow & X_{\mathbb{R}}^* = (X_{\mathbb{R}})^* \\ X \xrightarrow{f} \mathbb{C} & \longmapsto & \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r(f)} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} c : X_{\mathbb{R}}^* & \longrightarrow & X^* \\ X \xrightarrow{g} \mathbb{R} & \longmapsto & \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c(g)} & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & g(x) - ig(ix). \end{array} \end{array}$$

Estas funções são inversas uma da outra e preservam a norma. São em particular homeomorfismos entre estes espaços.

Teorema. *Sejam Y um subespaço de um espaço normado complexo X e $f_0 \in Y^*$. Existe uma extensão $f \in X^*$ de f_0 a todo o X que tem exactamente a norma de f_0.*

Demonstração. Pelo teorema anterior podemos estender $r(f_0)$ a uma funcional linear $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, limitada, com $\|g\| = \|r(f_0)\| = \|f_0\|$. A funcional complexa $f = c(g) \in X^*$ estende f_0 e verifica $\|f\| = \|f_0\|$. ∎

Vejamos agora algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach.

Corolário. *Se X é um espaço normado e $x_0 \in X$, existe uma funcional linear limitada $f : X \to K$, de norma 1, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Para $x_0 = 0$ o resultado é trivial. Se $x_0 \neq 0$, consideramos o subespaço $Y = \mathrm{lin}\{x_0\}$ e definimos $f_0 \in Y^*$ por $f(\lambda x_0) := \lambda \|x_0\|$. Então $\|f_0\| = 1$ e a sua extensão, obtida à custa do Teorema de Hahn-Banach, também tem norma 1. ∎

Corolário. *Se X é um espaço normado e $x_0 \in X$, então*

$$x_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in X^* \;\; f(x_0) = 0.$$ ∎

Se X e Y são espaços normados, existe uma função (natural) do espaço dos operadores lineares de X em Y no espaço dos operadores lineares de Y^* em X^*:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{F}(X,Y) & \longrightarrow & \mathsf{F}(Y^*, X^*) \\ X \xrightarrow{T} Y & \longmapsto & \begin{array}{ccc} T^* : Y^* & \to & X^* \\ f & \mapsto & f \circ T. \end{array} \end{array}$$

É fácil ver que, se T é um operador linear, então T^* é também um operador linear.

Teorema. *Se X e Y são espaços normados e $T : X \to Y$ é um operador linear limitado, então $T^* : Y^* \to X^*$ é um operador linear limitado e $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demonstração. Como, para todo o $g \in Y^*$, $\|T^*(g)\| = \|g \circ T\| \leq \|g\|\|T\|$, concluímos imediatamente que T é um operador linear limitado e que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Para ver que $\|T^*\| \geq \|T\|$, procedemos do seguinte modo: para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$ e $\|T(x_0)\| \geq \|T\| - \varepsilon$. Seja $g \in S(Y^*)$ tal que $g(T(x_0)) = \|T(x_0)\|$. Então

$$T^*(g)(x_0) = g(T(x_0)) = \|T(x_0)\| \geq \|T\| - \varepsilon.$$

Logo $\|T^*\| \geq \|T\| - \varepsilon$. ∎

Dado um espaço vectorial X, com dual X' e bidual X'', existe uma aplicação linear injectiva

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X'' = \mathsf{F}(\mathsf{F}(X,K),K) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} x'' : \mathsf{F}(X,K) & \to & K \\ f & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

(Esta função é um isomorfismo se X tiver dimensão finita.)

Se X for um espaço normado, esta aplicação pode ser considerada entre os espaços normados X e X^{**}:

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \hat{x} : \mathsf{F}(X,K) & \to & K \\ f & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

De facto, como $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, $\hat{x}$ é uma funcional linear limitada, e, além disso, $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.

Teorema. *A correspondência $x \mapsto \hat{x}$ define uma imersão $X \to X^{**}$ que preserva a norma.*

Demonstração. Para $x \in X$ com $x \neq 0$, seja $f \in X^*$ tal que $f(x) = \|x\|$ e $\|f\| = 1$. Então $|\hat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\|$ e $|\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|\|f\| = \|\hat{x}\|$, logo $\|x\| \leq \|\hat{x}\|$. ∎

`[Esta é uma forma natural de ver` X `como subespaço de um espaço normado completo,` X^{**}`.]`

Falta-nos ainda ver uma extensão natural do Teorema de Hahn-Banach.

Dado um espaço vectorial real X, uam função $q : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ diz-se uma `funcional côncava` se $-q : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ for uma funcional convexa; isto é,

- $\forall t \geq 0 \;\; q(tx) = tq(x)$;
- $\forall x, y \in X \;\; q(x+y) \geq q(x) + q(y)$.

Suponhamos agora dada uma funcional linear $f_0 : Y \to K$ entre uma funcional côncava q e uma funcional convexa p, isto é tal que

$$\forall y \in Y \;\; q(y) \leq f_0(y) \leq p(y).$$

Que condições precisamos de assegurar para que exista uma extensão de f_0 a todo o X que mantenha estas propriedades?

Se existir uma tal funcional linear $f : X \to K$, temos que

$$\forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; f(y) = f(x+y) - f(x) \quad \text{e} \quad -f(x) \leq -q(x) \;\; \Rightarrow \;\; f(y) \leq p(x+y) - q(x).$$

[Note que esta desigualdade inclui a anterior: basta considerá-la para $x = 0$ e $x = -y$.]

Teorema. *Sejam p uma funcional convexa e q uma funcional côncava no espaço vectorial real X. Se Y é um subespaço de X e $f_0 \in Y'$ é tal que*

$$\forall y \in Y \;\; \forall x \in X \;\; f_0(y) \leq p(x+y) - q(x),$$

então f_0 tem uma extensão $f \in X'$ tal que

$$\forall x \in X \;\; q(x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Demonstração. Vamos apenas construir uma extensão f_1 de f_0 ao subespaço $Z = \mathrm{lin}(Y \cup \{z\})$, onde $z \in X \setminus Y$. Queremos então $f_1 : Z \to K$ tal que

$$\forall u \in Z \;\; \forall x \in X \;\; f_1(u) \leq p(x+u) - q(x).$$

Vamos novamente estudar a escolha de $c = f_1(z)$. Então teremos necessariamente, para $y, y' \in Y$,

$$f_1(y+z) = f_0(y) + c \leq p(x+y+z) - q(x) \text{ e } f_1(y'-z) = f_0(y') - c \leq p(x'+y'-z) - q(x').$$

Logo,

$$-p(x'+y'-z) + q(x') + f_0(y') \leq c \leq p(x+y+z) - q(x) - f_0(y).$$

Portanto, c existe se e só se

$$\forall x, x' \in X \;\; \forall y, y' \in Y \;\; -p(x'+y'-z) + q(x') + f_0(y') \leq p(x+y+z) - q(x) - f_0(y);$$

a desigualdade verifica-se porque

$$f_0(y') + f_0(y) = f_0(y+y') \leq p(x+x'+y+y') - q(x+x') \leq p(x+y+z) + p(x'+y'-z) - q(x) - q(x') \blacksquare$$

Corolário. *Se p é uma funcional convexa e q uma funcional côncava em X tais que, para todo o $x \in X$, $q(x) \leq p(x)$, então existe uma funcional linear f em X tal que*

$$\forall x \in X \;\; q(x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Demonstração. Faça-se $Y = \{0\}$ e $f_0 = 0$ no resultado anterior. ∎

Teorema. *Sejam A e B subconjuntos convexos disjuntos, não vazios, de um espaço vectorial real X. Se existir $\alpha \in A$ tal que, para todo o $x \in X$, existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que $\alpha + tx \in A$ para todo o $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| \leq \varepsilon(x)$, então A e B podem ser separados por um hiperplano; isto é, existem uma funcional linear não nula $f : X \to \mathbb{R}$ e um número real c tais que*

$$\forall x \in A \;\; \forall y \in B \;\; f(x) \leq c \leq f(y).$$

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = 0$; logo

$$\forall x \in X \;\; \exists \varepsilon(x) > 0 \;\; : \;\; [-\varepsilon x, \varepsilon x] \subseteq A.$$

Definimos funções p e q em X do seguinte modo

$$p(x) := \inf\{t \geq 0 \; ; \; x \in tA\} \quad \text{e} \quad q(x) := \sup\{t \geq 0 \; ; \; x \in tB\}.$$

Então p é uma funcional convexa e q é uma funcional côncava. Além disso, como $tA \cap tB = \emptyset$ para $t > 0$, temos $q(x) \leq p(x)$. Logo, pelo corolário anterior, existe uma funcional linear f em X tal que, para todo o $x \in X$, $q(x) \leq f(x) \leq p(x)$. Além disso, se $x \in A$ e $y \in B$,

$$f(x) \leq p(x) \leq 1 \leq q(y) \leq f(y).$$

Logo podemos considerar $c = 1$ (e então A e B estão separados pelo hiperplano $I(f)$). ∎

17 Espaços normados de dimensão finita

Teorema. *Num espaço vectorial de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes.*

Demonstração. Dado um espaço vectorial V de dimensão n, com base $(e_i)_{i=1}^n$, vamos provar que qualquer norma $\|\cdot\|$ em V é equivalente à norma $\|\cdot\|_1$, definida por $\big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\big\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$. Sejam $S_1 = \{x \in V\,;\, \|x\|_1 = 1\}$ e $f : (S_1, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \|x\|$. Como S_1 é um subconjunto fechado da bola fechada unitária, S_1 é compacto. Além disso, se $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \quad &\leq \quad \|x-y\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i e_i - \sum_{i=1}^n y_i e_i\Big\| \quad \leq \quad \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\|e_i\| \\
&\leq \quad \big(\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|\big) \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \qquad = \quad \big(\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|\big)\|x-y\|_1,
\end{aligned}$$

e então f é uma função contínua. Logo, tem máximo M e mínimo m. Note-se que $m > 0$ uma vez que $|f(x)| = \big|\|x\|\big| > 0$ para todo o $x \in S_1$. Logo, atendendo a que, para todo o $x \in V \setminus \{0\}$ $\|x\| = \|x\|_1 f\big(\frac{x}{\|x\|_1}\big)$ e $m \leq f\big(\frac{x}{\|x\|_1}\big) \leq M$, obtemos, para todo o $x \in V$,

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1.$$

∎

Corolário. *Se X e Y são espaços normados e X tem dimensão finita, então qualquer operador linear $T : X \to Y$ é limitado.*

Demonstração. A função $\|\cdot\|' : X \to K$ definida por $\|x\|' = \|x\| + \|T(x)\|$ é uma norma em X. Como $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ são equivalentes, existe $N > 0$ tal que $\|x\|' \leq N\|x\|$, para todo o $x \in X$. Logo $\|T(x)\| \leq \|x\|' \leq N\|x\|$ e então $\|T\| \leq N$. ∎

Corolário. *Dois espaços normados de dimensão finita são homeomorfos se e só se têm a mesma dimensão.*

Demonstração. Já sabemos que dois espaços vectoriais de dimensão finita isomorfos têm a mesma dimensão. Por outro lado, se os dois espaços X e Y têm a mesma dimensão, finita, então existe um operador linear $T_1 : X \to Y$ com inversa $T_2 : Y \to X$, também operador linear. Pelo corolário anterior, as aplicações T_1 e T_2 são contínuas. ∎

Corolário. *Todo o espaço normado de dimensão finita é espaço de Banach.*

Demonstração. Sai do corolário anterior e do facto de l_2^n ser completo. ∎

Corolário. *Num espaço de dimensão finita X um subconjunto é compacto se e só se é fechado e limitado. Em particular a bola unitária fechada e a esfera unitária fechada*

$$B(X) = \{x \in X\,;\, \|x\| \leq 1\} \text{ e } S(X) = \{x \in X\,;\, \|x\| = 1\}$$

são compactas.

Demonstração. Segue do facto do resultado ser válido em l_2^n. ∎

Corolário. *Todo o subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado.*

Demonstração. Como espaço de dimensão finita, o subespaço é completo, logo necessariamente fechado como subespaço. ∎

Num espaço métrico X, para cada $Y \subseteq X$ e $x \in X$, definimos
$\text{dist}(x, Y) := \inf\{d(x, y)\,;\, y \in Y\}$. (Note que $\text{dist}(x, Y) = 0$ se e só se $x \in \overline{Y}$.)

Teorema. *Seja Y um subespaço próprio do espaço normado X.*

(1) Se Y é fechado, então $\qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in S(X) \ : \ \text{dist}(x, Y) \geq 1 - \varepsilon.$

(2) Se Y tiver dimensão finita, então existe $x \in S(X)$ tal que $\text{dist}(x, Y) = 1$.

Demonstração. Sejam $z \in X \setminus Y$ e $Z := \text{lin}(Y \cup \{z\})$. Consideremos a funcional linear $f_0 : Z \to \mathbb{R}$ definida por $f_0(y + \lambda z) = \lambda$.
(a) Como Y é fechado e $\text{Ker}(f_0) = Y$, f_0 é uma funcional linear limitada e então, pelo Teorema de Hahn-Banach, tem uma extensão $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|f_0\| > 0$. Tem-se ainda $Y \subseteq \text{Ker} f$. Como $\|f\| = \sup\limits_{x \in S(X)} |f(x)|$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in S(X)$ tal que $|f(x)| \geq (1 - \varepsilon)\|f\|$. Então, se $y \in Y$,

$$\|x - y\| \geq \frac{|f(x - y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

(b) Se Y for de dimensão finita, podemos também considerar X de dimensão finita. Então a restrição de f a $S(X)$ tem máximo, porque $S(X)$ é compacto. Logo, existe $x \in S(X)$ tal que $|f(x)| = \|f\|$. Então, para todo o $y \in Y$, temos

$$\|x - y\| \geq \frac{|f(x - y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = 1.$$ ∎

Corolário. *Se* $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ *é uma sucessão de subespaços de dimensão finita de um espaço normado (com todas as inclusões próprias), então existem vectores unitários* $x_1, x_2, \cdots$ *tais que* $x_n \in X_n$ *e* $d(x_n, X_{n-1}) = 1$*, para todo o* $n \geq 2$*.*

Em particular, todo o espaço normado de dimensão infinita contém uma sucessão (x_n) *de vectores unitários tais que* $\|x_n - x_m\| \geq 1$*, para todo* $n, m \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Construímos a sucessão (x_n) aplicando o teorema anterior ao caso de $X = X_n$ e $Y = X_{n-1}$, para $n \geq 2$. (Sendo x_1 qualquer vector de X_1.) ∎

Teorema. *Um espaço normado tem dimensão finita se e só se a sua bola fechada unitária é compacta.*

Demonstração. Se X é um espaço normado com dimensão infinita, consideramos uma sucessão (x_n) em X tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, cuja existência é garantida pelo teorema anterior. Então a cobertura aberta $\left(B_{\frac{1}{2}}(x)\right)_{x \in X}$ não tem subcobertura finita, pois cada uma das bolas abertas contém no máximo um dos termos da sucessão. ∎

18 O Teorema da Categoria de Baire

Lema. *Seja X um espaço métrico completo. Se $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ é uma sucessão de subconjuntos fechados não vazios de X, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in F_n$. Então, porque $\mathrm{diam} F_n \to 0$, a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo $x_n \to x \in X$, porque X é completo. Além disso, porque, para cada $k \in \mathbb{N}$, a sucessão $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão da primeira que está contida no fechado F_k, $x_{n+k} \to x \in F_k$. Logo $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. ■

Teorema de Baire. *Seja X um espaço completo. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de subconjuntos abertos e densos de X, então $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é denso em X.*

`[Um espaço topológico com esta propriedade diz-se um espaço de Baire.]`

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $r > 0$. Queremos provar que $A \cap B_r(x) \neq \emptyset$. Como $A_1 \cap B_r(x)$ é um aberto não vazio, existem $x_1 \in X$ e $s > 0$ tais que $B_s(x_1) \subseteq A_1 \cap B_r(x)$. Podemos ainda afirmar que existe $r_1 \in]0,1[$ tal que

$$B_{r_1}[x_1] \subseteq A_1 \cap B_r(x).$$

De igual modo, atendendo a que $A_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ é um aberto não vazio, existem $x_2 \in X$ e $r_2 \in]0, \frac{1}{2}[$ tais que

$$B_{r_2}[x_2] \subseteq A_2 \cap B_{r_1}(x_1).$$

Supondo já escolhidos x_k e $r_k \in]0, \frac{1}{k}[$ tais que $B_{r_k}[x_k] \subseteq A_k \cap B_{r_{k-1}}(x_{k-1})$, e atendendo a que $A_{k+1} \cap B_{r_k}(x_k)$ é um aberto não vazio, podemos escolher $x_{k+1} \in X$ e $r_{k+1} \in]0, \frac{1}{k+1}[$ tais que

$$B_{r_{k+1}}[x_{k+1}] \subseteq A_{k+1} \cap B_{r_k}(x_k).$$

Construímos assim uma sucessão encaixada $(B_{r_n}[x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos fechados não vazios de X. Pelo lema anterior, existe $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}[x_n] \subseteq \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B_r(x)$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário. *Se um espaço métrico completo é reunião numerável de subconjuntos fechados, então pelo menos um deles tem interior não vazio.*

Demonstração. Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família numerável de subconjuntos fechados tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Então cada $X \setminus F_n$ é aberto e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_n) = \emptyset$. Pelo teorema anterior concluímos que algum dos conjuntos $X \setminus F_k$ não é denso, isto é F_k tem interior não vazio. ■

Definição. Um subconjunto Y de um espaço topológico X diz-se:

(1) `raro` se o interior do seu fecho for vazio;

(2) `de primeira categoria` se for reunião numerável de subconjuntos raros;

(3) `de segunda categoria` se não for de primeira categoria, isto é, se $Y \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ com cada F_n fechado, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_k) \neq \emptyset$.

`[Nota: O complementar de um subconjunto raro é denso.]`

Corolário. *Um espaço métrico completo é de segunda categoria. Além disso, num espaço métrico completo o complementar de um subconjunto de primeira categoria é de segunda categoria.* ∎

Teorema. (Princípio da limitação uniforme) *Seja U um subconjunto de segunda categoria de um espaço métrico X e seja*

$$\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\ f \textit{ contínua e } \forall u \in U\ \{f(u)\,;\ f \in \mathcal{F}\} \textit{ é limitada}\}.$$

Então os elementos de $\mathcal{F}$ são uniformemente limitados numa bola fechada $B_r[x_0]$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$F_n = \{x \in X\,;\ |f(x)| \leq n \text{ para todo o } f \in \mathcal{F}\} = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}([-n,n]).$$

Cada F_n é fechado e $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, por hipótese. Logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_k) \neq \emptyset$, como queríamos demonstrar. ∎

Teorema de Banach-Steinhaus. *Sejam X e Y espaços normados, U um subconjunto de X de segunda categoria e $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{L}(X,Y)$ uma família de operadores lineares limitados tal que*

$$\forall u \in U \quad \sup\{\|T(u)\|\,;\ T \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Então existe $N > 0$ tal que, para todo o $T \in \mathcal{F}$, $\|T\| \leq N$. Em particular, o resultado é válido quando $U = X$ é um espaço de Banach.

Demonstração. A função $\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|T(x)\| \end{array}$ é contínua, porque composição de funções contínuas. Logo, pelo teorema anterior, existe $B_r[x_0]$ tal que

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in B_r[x_0]\ \ \forall T \in \mathcal{F}\ \ \|T(x)\| \leq n.$$

Isto implica que $\|T\| \leq N = \frac{n}{r}$, para todo o $T \in \mathcal{F}$, como verificamos em seguida. Se $T \in \mathcal{F}$ e $x \in B(X)$, então $x_0 + rx, x_0 - rx \in B_r[x_0]$, portanto

$$\|T(x)\| = \frac{1}{2r}\big\|T(x_0 + rx - (x_0 - rx))\big\| \leq \frac{2n}{2r} = N,$$

e então $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\,;\ x \in B(X)\} \leq N$. ∎

19 Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado

Teorema da Aplicação Aberta. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ um operador linear limitado sobrejectivo. Então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Na prova deste teorema vamos usar os dois lemas que enunciamos em seguida. Omitimos a demonstração do primeiro por ser bastante técnica.

Lema. *Suponhamos que X e Y são espaços normados, X é completo e $T \in \mathsf{L}(X, Y)$ é tal que $\overline{T(B_r(0))} \supseteq B_s(y_0)$. Então $T(B_r(0)) \supseteq B_s(y_0)$.*

Lema. *Se T é um operador linear limitado, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *T é uma aplicação aberta;*

(ii) *$T(B_1(0))$ é aberto;*

(iii) *$0 \in int(T(B_1(0)))$;*

(iv) *$int(T(B_1(0))) \neq \emptyset$;*

(v) *$int(\overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Para provar o lema basta verificar que (iv) $\Rightarrow$ (iii) e que (iii) $\Rightarrow$ (i), uma vez que as implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) são imediatas e que (v) $\Rightarrow$ (iv) segue do lema anterior.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Sejam $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tais que $B_r(y_0) \subseteq T(B_1(0))$. Então também se tem $B_r(-y_0) \subseteq T(B_1(0))$ e podemos ainda concluir que $B_r(0) \subseteq T(B_1(0))$. De facto, se $y \in B_r(0)$, então $y_0 + y \in B_r(y_0) \subseteq T(B_1(0))$ e $-y_0 + y \in B_r(-y_0) \subseteq T(B_1(0))$, logo $y_0 + y = T(x_0)$ e $-y_0 + y = T(x_1)$, com $x_0, x_1 \in B_1(0)$. Portanto

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) = T\big(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\big),$$

com $\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 \in B_1(0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Para provar que T é aberta, basta verificar que, quaisquer que sejam $x_0 \in X$ e $s > 0$, $T(x_0) \in \mathrm{int}(T(B_s(x_0)))$. Da condição $0 \in \mathrm{int}(T(B_1(0)))$ concluímos que existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq T(B_1(0))$. Logo $B_{rs}(0) \subseteq T(B_s(0))$ e então $B_{rs}(T(x_0)) \subseteq T(B_s(x_0))$. ∎

Resta-nos agora provar o teorema. De

$$Y = T(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_n(0))} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{n\, T(B_1(0))},$$

e do facto de Y ser de segunda categoria podemos concluir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(n\, \overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$. Logo $\operatorname{int}(\overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$ e então, pelo segundo lema, T é uma aplicação aberta. ∎

Teorema da função inversa. *Se $T : X \to Y$ for um operador linear limitado bijectivo e X e Y forem espaços de Banach, então a sua função inversa é também um operador linear limitado.* ∎

Teorema do gráfico fechado. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Então T é limitado se e só se o seu gráfico*

$$\Gamma(T) = \{(x, T(x))\,;\, x \in X\} \subseteq X \times Y$$

é fechado na topologia produto.

Demonstração. Já vimos que o gráfico de uma função contínua cujo conjunto de chegada seja separado é fechado. Falta-nos provar o recíproco.

Em $Z = X \oplus Y = X \times Y$ consideramos a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Por hipótese $\Gamma(T)$ é um subconjunto fechado de Z. Como Z é um espaço de Banach, $\Gamma(T)$ é um subespaço completo. O operador linear $\begin{array}{rcl} U : \Gamma(T) & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}$ é uma bijecção contínua, logo, pelo teorema anterior, é um homeomorfismo; isto é, $\begin{array}{rcl} X & \to & \Gamma(T) \\ x & \mapsto & (x, T(x)) \end{array}$ é um operador linear limitado. Portanto, escrevendo

$$(X \xrightarrow{T} Y) = (X \to \Gamma(T) \to X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y),$$

onde $X \to \Gamma(T)$ é a função inversa de U e $\Gamma(T) \to X \times Y$ é a inclusão, concluímos que T é composição de funções contínuas, logo é contínua. ∎

20 Espaços de Hilbert

PRODUTO INTERNO

Se V é um espaço vectorial, um produto interno (ou produto escalar) em V é uma função $(\cdot,\cdot) : V \times V \to K$ é tal que, para $x, y, z \in V$ e $\lambda, \mu \in K$:

(a) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$;

(b) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;

(c) $(x, x) \geq 0$, com igualdade só quando $x = 0$.]

OBSERVAÇÃO. Se $(\cdot,\cdot)$ é um produto interno em V, então

$$\|x\| := (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em V.

ESPAÇO EUCLIDIANO/ESPAÇO DE HILBERT

Um espaço normado diz-se um espaço euclidiano se a sua norma for definida por um produto interno. Se, além disso, o espaço for completo, diz-se um espaço de Hilbert.

OBSERVAÇÃO. O produto interno pode recuperar-se facilmente da norma, pois

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2, \quad \text{no caso complexo, e}$$

$$2(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = \frac{1}{2}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big), \quad \text{no caso real.}$$