Teoria das Categorias

Maria Manuel Clementino, 2011/12

1 Categorias

1.1 Definição.

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em:

- uma classe de objectos A, B, C, ...
- para cada par (A,B) de objectos de $\mathcal{C}$, um conjunto $\mathcal{C}(A,B)$ de morfismos de A em B, que se denotam por f, g, ..., escrevendo ainda $f : A \to B$ quando f pertence a $\mathcal{C}(A,B)$;
- para cada terno de objectos (A,B,C) de $\mathcal{C}$, uma lei de composição

$$\circ : \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \longrightarrow \mathcal{C}(A,C)$$

tais que:

Axioma 1: para $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

Axioma 2: para cada objecto A, existe um morfismo $1_A : A \to A \in \mathcal{C}(A,A)$, a que se chama identidade de A, tal que, para quaisquer $f : A \to B$ e $g : C \to A$,

$$1_A \circ g = g \;\&\; f \circ 1_A = f.$$

1.2 Exemplos.

1. A categoria $\mathcal{C}onj$ dos conjuntos e aplicações, com a lei de composição usual de aplicações.
2. A categoria $\mathcal{G}rp$ dos grupos e homomorfismos de grupos, com a lei composição usual.

   De forma análoga se definem as categorias $\mathcal{M}on$ dos monóides e $\mathcal{SG}rp$ dos semigrupos.
3. A categoria $\mathcal{V}ec_K$ dos espaços vectoriais sobre o corpo K e aplicações lineares, com a lei de composição usual.
4. A categoria $\mathcal{G}rf$ dos grafos (dirigidos) e homomorfismos de grafos (dirigidos), com a lei de composição usual.
5. A categoria $\mathcal{M}etr$ dos espaços métricos e aplicações contínuas, com a lei de composição usual.
6. A categoria $\mathcal{POC}onj$ dos conjuntos parcialmente ordenados e aplicações monótonas, com a lei de composição usual.
7. A categoria $\mathcal{PC}onj$ dos conjuntos pontuados e aplicações que preservam o ponto base; isto é, $\mathcal{PC}onj$ tem como objectos pares (X, x_0), onde X é um conjunto e $x_0 \in X$, e como morfismos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ aplicações $f : X \to Y$ tais que $f(x_0) = y_0$.
8. A categoria $\mathcal{P}fn$ dos conjuntos e funções parciais (isto é, $f \in \mathcal{P}fn(X,Y)$ se f é uma aplicação cujo domínio de definição, DD_f, é um subconjunto de X, e que tem codomínio Y. A composição $g \circ f \in \mathcal{P}fn(X,Z)$ de $f \in \mathcal{P}fn(X,Y)$ e $g \in \mathcal{P}fn(Y,Z)$ tem domínio de definição $\{x \in X \,;\, x \in DD_f \;\&\; f(x) \in DD_g\}$, sendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
9. Se X é um conjunto qualquer, podemos considerar X como uma categoria discreta $\mathcal{C}$: os objectos de $\mathcal{C}$ são os elementos de X, $\mathcal{C}(x,y) = \emptyset$ se $x \neq y$ e $\mathcal{C}(x,x) = \{1_x\}$.

10. Se $(X, \leq)$ é um conjunto pré-ordenado, podemos considerar a categoria $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ que tem como objectos os elementos de X, sendo

$$\mathcal{C}_{(X,\leq)}(x,y) = \begin{cases} \{x \to y\} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com a lei de composição óbvia.

11. Se $(M, \times, e)$ é um monóide, então podemos considerar a categoria $\mathcal{C}_M$ que tem como único objecto M, sendo $\mathcal{C}_M(M,M) = M$, e com a lei de composição $\times : M \times M \to M$.

12. A categoria $\mathcal{M}at_{\mathbb{R}}$ que tem como objectos os números naturais e como morfismos de n em m as matrizes reais com n linhas e m colunas. A lei de composição é o produto de matrizes.

1.3 Definição.

Uma categoria diz-se pequena se a sua classe de objectos (e consequentemente, a sua classe de morfismos) for um conjunto; diz-se finita se Mor$\mathcal{C}$ for um conjunto finito.

1.4 Exemplos.

São exemplos de categorias pequenas (finitas):

1. a categoria 0, que tem como classe de objectos o conjunto vazio.
2. a categoria 1, que tem um único objecto e um único morfismo (a identidade).
3. a categoria 2, que tem dois objectos, as respectivas identidades, e um morfismo não trivial.
4. a categoria 1+1, que tem dois objectos e as respectivas identidades.

São também exemplos de categorias pequenas as definidas por conjuntos pré-ordenados ou por monóides (como indicado anteriormente).

1.5 Exercícios.

1. Verifique que as seguintes construções definem categorias:

   (a) Para uma categoria $\mathcal{C}$, a categoria $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C}$ (também denotada por Mor$\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}^2$) dos morfismos de $\mathcal{C}$ que tem por objectos os morfismos de $\mathcal{C}$, e por morfismos de $f : A \to B$ em $g : C \to D$ os pares (h,k) de morfismos de $\mathcal{C}$ para os quais os diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

   são comutativos, i.e. $g \circ h = k \circ f$.

   (b) Se A é um objecto de $\mathcal{C}$, a categoria $\mathcal{C} \downarrow A$ (também denotada por $\mathcal{C}/A$) cujos objectos são os morfismos em $\mathcal{C}$ de codomínio A. Um morfismo de $f : B \to A$ em $g : C \to A$ é um $\mathcal{C}$-morfismo $h : B \to C$ tal que $g \circ h = f$, ou seja, para o qual o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

   comuta.

(c) Se $(X, \leq)$ é um conjunto pré-ordenado considerado como uma categoria $C_{(X,\leq)}$ e $x \in X$, interprete $C_{(X,\leq)} \downarrow x$.

2. Um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ diz-se ω-completo se toda a sucessão monótona (ou cadeia) em X tiver supremo.

   Uma aplicação $f : X \to Y$ entre conjuntos parcialmente ordenados ω-completos diz-se contínua se, sempre que s for o supremo de uma cadeia $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, $f(s)$ é o supremo da imagem de C por f.

   (a) Mostre que toda a aplicação contínua entre conjuntos parcialmente ordenados ω-completos é monótona.

   (b) Seja X um conjunto. Mostre que:

      i. o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes de X, ordenado pela inclusão, é um conjunto parcialmente ordenado ω-completo.

      ii. O conjunto $\mathcal{P}$ das funções parciais de X em X, munido da relação de ordem parcial

      $$f \leq g \;:\Leftrightarrow\; DD_f \subseteq DD_g \text{ e } (\forall x \in DD_f)\ f(x) = g(x),$$

      é um conjunto parcialmente ordenado ω-completo.

   (c) Mostre que os conjuntos parcialmente ordenados ω-completos e as aplicações contínuas, com a lei de composição de aplicações, formam uma categoria.

1.6 Definição.

Uma subcategoria $\mathcal{D}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é constituída por uma subclasse Ob$\mathcal{D}$ da classe de objectos de $\mathcal{C}$ e por uma subclasse Mor$\mathcal{D}$ da classe de morfismos de C tais que:

- se $f \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}$, então o domínio e o codomínio de f pertencem a Ob$\mathcal{D}$;
- se $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$, então $1_X \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}$;
- se $f, g \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}$, então $g \circ f \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}$ (caso f e g sejam componíveis).

Note-se que $\mathcal{D}$ é, por si só, uma categoria, que mantém as identidades e a lei de composição de $\mathcal{C}$.

1.7 Exemplos.

1. A categoria $\mathcal{F}in$ dos conjuntos finitos e aplicações é uma subcategoria de $\mathcal{C}onj$.
2. A categoria dos conjuntos e aplicações injectivas é uma subcategoria de $\mathcal{C}onj$.
3. $\mathcal{C}onj$ é uma subcategoria de $\mathcal{P}fn$.
4. A categoria $\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$ dos grupos abelianos e respectivos homomorfismos é uma subcategoria de $\mathcal{G}rp$, que é uma subcategoria de $\mathcal{M}on$, que por sua vez é uma subcategoria de $\mathcal{SG}rp$.
5. A categoria dos grafos não dirigidos é uma subcategoria de $\mathcal{G}rf$.

1.8 Definição.

Uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ diz-se uma subcategoria plena se Mor$\mathcal{D}$ tiver todos os morfismos de $\mathcal{C}$ com domínio e codomínio em $\mathcal{D}$.

1.9 Exercícios.

1. Quais das subcategorias referidas no exemplo anterior são plenas?

2. Prove que $\mathcal{C} \downarrow A$ é uma subcategoria não plena de $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C}$ sempre que $\mathcal{C}(A, A)$ tem cardinal maior ou igual a 2.

3. Verifique se a categoria $\mathcal{A}$ dos conjuntos parcialmente ordenados ω-completos (e aplicações contínuas) é uma subcategoria plena da categoria $\mathcal{POC}onj$.

1.10 Definição.

Dadas duas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ chama-se categoria produto à categoria que tem como objectos pares ordenados (A, B), com $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ e $B \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$, e como morfismos pares ordenados $(f, g) : (A, B) \to (C, D)$, onde $f \in \mathcal{A}(A, C)$ e $g \in \mathcal{B}(B, D)$. A lei de composição é definida componente a componente.

1.11 Definição.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, chama-se categoria oposta ou categoria dual de $\mathcal{C}$ à categoria $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ cuja classe de objectos é exactamente $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e com $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$, sendo a lei de composição definida à custa da lei de composição de $\mathcal{C}$.

1.12 Exercício.

Descreva a categoria dual das seguintes estruturas algébricas (consideradas como categorias):

1. um grupo,

2. um monóide,

3. um conjunto pré-ordenado,

e mostre que em cada um dos casos a categoria obtida é também definida pelo mesmo tipo de estrutura. Verifique se em algum dos casos se obtém uma estrutura isomorfa à inicial.

2 Functores.

2.1 Definição.

Um functor F de uma categoria $\mathcal{A}$ numa categoria $\mathcal{B}$ consiste em:

- uma função $\mathrm{Ob}\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\mathcal{B}$ entre as classes de objectos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (a imagem de $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ designa-se por $F(A)$ ou simplesmente por FA),
- para cada par de objectos A, A' de $\mathcal{A}$, uma função $\mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$, que se costuma designar por $F_{A,A'}$, sendo então a imagem de $f : A \to A'$ designada por $F_{A,A'}(f)$ (ou $F(f)$, ou simplesmente Ff),

tais que:

F1. se $f \in \mathcal{A}(A, A')$ e $g \in \mathcal{A}(A', A'')$, então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

F2. para cada $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$, $F(1_A) = 1_{FA}$.

2.2 Exemplos.

São exemplos de functores:

1. Para cada categoria $\mathcal{C}$ o functor identidade $1_\mathcal{C} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, com $1_\mathcal{C}(C) = C$ e $1_\mathcal{C}(f) = f$ para cada objecto C e cada morfismo f de $\mathcal{C}$.

2. Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$, o functor de inclusão $I_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ com $I_\mathcal{A}(A) = A$ e $I_\mathcal{A}(f) = f$, para cada objecto A e cada morfismo f de $\mathcal{A}$.

3. Os functores de esquecimento

   $U : \mathcal{G}rp \to \mathcal{C}onj$ com $U(G, \times) = G$ e $Uf = f$;

   $U : \mathcal{V}ec_K \to \mathcal{C}onj$ que a cada espaço vectorial faz corresponder o seu conjunto subjacente e a cada aplicação linear a aplicação subjacente;

   $U : \mathcal{G}rf \to \mathcal{C}onj$ com $U(X, K_X) = X$ e $Uf = f$; etc.

4. $\mathcal{P} : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj$ que a cada conjunto faz corresponder o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das suas partes e cada função $f : X \to Y$ faz corresponder a função $\mathcal{P}f = f(-) : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$ tal que $\mathcal{P}f(S) = f(S)$ para todo o subconjunto S de X.

5. Para cada objecto C de uma categoria $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(C, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}onj$ que leva cada objecto A de $\mathcal{C}$ no conjunto $\mathcal{C}(C, A)$ e cada morfismo $f : A \to B$ na aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) & \longrightarrow & \mathcal{C}(C, B) \\ (g : C \to A) & \longmapsto & f \circ g : C \to B \end{array}$$

2.3

Dados dois functores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, define-se de forma óbvia o functor $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. Por outro lado, para cada categoria $\mathcal{A}$, o functor identidade $1_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma identidade para a lei de composição. Logo, embora não se possa considerar, por problemas de "tamanho", a categoria de todas as categorias, podemos formar a categoria $\mathcal{C}at$ de todas as categorias pequenas e respectivos functores, com a lei de composição natural.

2.4 Definições.

Cada functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ define, para cada par de objectos A, A' de $\mathcal{A}$, uma aplicação $F_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$.

Um functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$:

1. diz-se fiel se a aplicação $F_{A,A'}$ for injectiva, para todo o par de objectos A, A' de $\mathcal{A}$;
2. diz-se pleno se a aplicação $F_{A,A'}$ for sobrejectiva, para todo o par de objectos A, A' de $\mathcal{A}$;
3. diz-se injectivo em objectos se a respectiva aplicação $\mathrm{Ob}\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\mathcal{B}$ for injectiva;
4. diz-se uma imersão se for fiel, pleno e injectivo em objectos;
5. diz-se um isomorfismo se existir um functor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $G \circ F = 1_{\mathcal{A}}$ e $F \circ G = 1_{\mathcal{B}}$.

2.5 Exercícios.

1. Mostre que definem functores:

   (a) Para cada categoria $\mathcal{C}$ e cada objecto A de uma categoria $\mathcal{A}$,

   $$\begin{array}{rcl} C_A : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A}. \\ C & \longmapsto & A \\ (f : C \to C') & \longmapsto & (1_A : A \to A) \end{array}$$

   (A C_A chama-se functor constante.)

   (b) A projecção de um produto de categorias $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ num dos seus factores.

   (c) Para cada categoria $\mathcal{C}$ e cada objecto A de $\mathcal{C}$,

   $$\begin{array}{rcl} U_A : \mathcal{C} \downarrow A & \longrightarrow & \mathcal{C}. \\ (C \xrightarrow{f} A) & \longmapsto & C \\ ((C, f) \xrightarrow{h} (C', f')) & \longmapsto & h \end{array}$$

   (d) Se Y é um conjunto, $Y \times - : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj$, sendo $(Y \times -)X = Y \times X$ e $(Y \times -)f = 1_Y \times f$.

   (e) $Q : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj$ com $Q(X) = X \times X$ e $Q(f) = f \times f$.

   (f)

   $$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{P}} : \mathcal{C}onj^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ X & \longmapsto & \mathcal{P}X \\ (f^{\mathrm{op}} : Y \to X) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} f^{-1}(-) : \mathcal{P}Y & \to & \mathcal{P}X \\ S & \mapsto & f^{-1}(S). \end{array} \end{array}$$

   (g)

   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q} : \mathcal{C}onj & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ X & \longmapsto & \mathcal{Q}(X) := \mathcal{P}(X) \\ (f : X \to Y) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \mathcal{Q}(f) : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}. \end{array} \end{array}$$

   (h)

   $$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{G}rf & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ (X, K_X) & \longmapsto & \{x \in X \mid (x, x) \in K_X\} \\ (f : (X, K_X) \to (Y, K_Y)) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} Ff : FX & \to & FY \\ x & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

(i) Se C é um objecto de uma categoria $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(-,C) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{C}onj. \\ A & \longmapsto & \mathcal{C}(A,C) \\ f^{\mathrm{op}} : A \to B & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(f^{\mathrm{op}},C) : \mathcal{C}(A,C) & \to & \mathcal{C}(B,C) \\ (g : A \to C) & \mapsto & g \circ f \end{array} \end{array}$$

2. Interprete functor nos seguintes casos

   (a) $1 \to \mathcal{C}$, $2 \to \mathcal{C}$,

   (b) $F : \mathcal{C}_{(X,\leq)} \to \mathcal{C}_{(Y,\preceq)}$, sendo $(X,\leq)$ e $(Y,\preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados,

   (c) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ onde $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias definidas por monóides,

   e em cada caso estude o significado de fiel e pleno.

3. Indique quais dos functores estudados no primeiro exercício são fiéis e/ou plenos.

3 Isomorfismos

3.1 Definição.

Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ diz-se um isomorfismo se existir um morfismo $g : B \to A$ em $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$.

3.2 Proposição.

Numa categoria:

1. Todo o morfismo identidade é um isomorfismo;

2. A composição de dois isomorfismos é um isomorfismo.

3.3 Exemplos.

1. Os isomorfismos em $\mathcal{C}onj$ são as bijecções.

2. Os isomorfismos em $\mathcal{G}rf$ são as bijecções $f : (X, K_X) \to (Y, K_Y)$ tais que $(x, x') \in K_X$ se e só se $(f(x), f(x')) \in K_Y$.

3. Os isomorfismos em $\mathcal{G}rp$ ($\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$, $\mathcal{M}on$, $\mathcal{SG}rp$) são os homomorfismos bijectivos.

3.4 Exercícios.

Descreva os isomorfismos das categorias:

1. $\mathcal{POC}onj$;

2. $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ quando $(X,\leq)$ é um conjunto pré-ordenado;

3. $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ quando $(X,\leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado;

4. $\mathcal{C}_M$ onde M é um monóide;

5. $\mathcal{M}at_{\mathbb{R}}$;

6. $\mathcal{P}fn$.

4 Objectos inicial e terminal

4.1 Definições.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.

1. Um objecto A de $\mathcal{C}$ diz-se um objecto inicial se, para todo o objecto C de $\mathcal{C}$, o conjunto $\mathcal{C}(A, C)$ é singular.

2. Um objecto A de $\mathcal{C}$ diz-se um objecto terminal se, para todo o objecto C de $\mathcal{C}$, o conjunto $\mathcal{C}(C, A)$ é singular.

4.2 Proposição.

Se C e C' são objectos iniciais (terminais) da categoria $\mathcal{C}$, então existe um isomorfismo $h : C \to C'$.

(Diz-se então que o objecto inicial (terminal) é único a menos de isomorfismo.)

4.3

Os objectos inicial e terminal de uma categoria $\mathcal{C}$ (quando existem) costumam designar-se por 0 e 1, respectivamente. Para cada $C \in \mathcal{C}$, o único morfismo de 0 em C designa-se por $0_C : 0 \to C$ e o único morfismo de C em 1 por $!_C : C \to 1$.

4.4 Exemplos.

1. A categoria $\mathcal{C}onj$ tem objecto inicial – o conjunto vazio – e objecto terminal – um (qualquer) conjunto singular.

2. A categoria $\mathcal{G}rp$ ($\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$, $\mathcal{M}on$) tem objecto inicial e terminal: $\{e\}$.

3. A categoria $\mathcal{G}rf$ tem objecto inicial – $(\emptyset, \emptyset)$ – e objecto terminal – $(\{0\}, \{(0, 0)\})$.

4.5 Exercícios.

1. Identifique, caso existam, os objectos inicial e terminal da categoria:
   (a) $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$, onde $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado;
   (b) i. $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C}$,
       ii. $\mathcal{C} \downarrow A$,
       onde $\mathcal{C}$ é uma categoria com objecto inicial 0 e objecto terminal 1, e A um objecto de $\mathcal{C}$;
   (c) $\mathcal{PC}onj$;
   (d) $\mathcal{POC}onj$;
   (e) $\mathcal{P}fn$;
   (f) $\mathcal{M}on$.

2. Um objecto zero é um objecto que é simultaneamente inicial e terminal.
   (a) Prove que as seguintes condições são equivalentes:
       i. $\mathcal{C}$ tem objecto zero;
       ii. $\mathcal{C}$ tem objecto inicial 0 e terminal 1, e 0 e 1 são isomorfos;
       iii. $\mathcal{C}$ tem objecto inicial 0 e terminal 1, e $\mathcal{C}(1, 0) \neq \emptyset$.
   (b) Indique quais das categorias descritas em 1.2 têm objecto zero.

5 Monomorfismos, epimorfismos e o Princípio da Dualidade Categorial.

5.1 Definição.

Um morfismo $f : A \to B$ de uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se um monomorfismo se, qualquer que seja o par $u, v : C \to A$, se $f \circ u = f \circ v$, então $u = v$.

5.2 Proposição.

Numa categoria $\mathcal{C}$,

1. todo o isomorfismo é um monomorfismo; em particular, todo o morfismo identidade é um monomorfismo;
2. a composição de dois monomorfismos é um monomorfismos.

5.3 Exemplos.

1. Um morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}onj$ é um monomorfismo se e só se é uma aplicação injectiva.
2. Um morfismo $f : (X, K_X) \to (Y, K_Y)$ de $\mathcal{G}rf$ é um monomorfismo se e só se $f : X \to Y$ é uma aplicação injectiva.
3. Um homomorfismo de grupos é um monomorfismo em $\mathcal{G}rp$ ($\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$) se e só se é injectivo.

5.4 Definição.

Um morfismo $f : A \to B$ de uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se um epimorfismo se, qualquer que seja o par $u, v : B \to C$ de morfismos de $\mathcal{C}$, se $u \circ f = v \circ f$, então $u = v$.

5.5 Exemplos.

1. Uma aplicação $f : X \to Y$ é um epimorfismo em $\mathcal{C}onj$ se e só se é sobrejectiva.
2. Um homorfismos de grafos $f : (X, K_X) \to (Y, K_Y)$ é um epimorfismo em $\mathcal{G}rf$ se e só se a aplicação f é sobrejectiva.
3. Um homomorfismo de grupos é um epimorfismo em $\mathcal{G}rp$ se e só se é uma aplicação sobrejectiva.
4. Consideremos a categoria $\mathcal{C}$ dos anéis comutativos com identidade e homomorfismos de anéis. Em $\mathcal{C}$ os epimorfismos não são necessariamente sobrejectivos:

   consideremos a inclusão i de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, que não é obviamente sobrejectiva; no entanto, dado qualquer par de homomorfismos de anéis $u, v : \mathbb{Q} \to A$ tal que $u \circ i = v \circ i$ (isto é, u e v coincidem nos inteiros), então, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,
   $$u(\tfrac{p}{q}) = u(p \cdot \tfrac{1}{q}) = u(p) \cdot u(\tfrac{1}{q}) = u(p) \cdot u(q^{-1}) = u(p) \cdot u(q)^{-1} = v(p) \cdot v(q)^{-1} = v(\tfrac{p}{q}).$$

5.6 Observação.

Um morfismo f de uma categoria $\mathcal{C}$ é um epimorfismo se e só se, como morfismo de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, é um monomorfismo. Então podemos concluir imediatamente que os epimorfismos têm as propriedades "duais" das enunciadas para monomorfismos.

Esta conclusão é um caso particular do:

5.7 Princípio da Dualidade Categorial.

Se um resultado for válido em qualquer categoria, também será válido o seu "resultado dual", isto é, aquele que se obtém do primeiro invertendo o sentido dos morfismos.

5.8 Exercícios.

1. Prove que, se $g \circ f$ é um monomorfismo, então f é um monomorfismo.
2. Mostre que, se 1 é um objecto terminal de $\mathcal{C}$, então qualquer morfismo em $\mathcal{C}$ com domínio 1 é um monomorfismo.
3. (a) Mostre que, se m é um monomorfismo numa categoria $\mathcal{C}$, ele é um monomorfismo em qualquer subcategoria de $\mathcal{C}$.
   (b) Um monomorfismo numa subcategoria pode não o ser na categoria. Dê um exemplo.
4. Um morfismo $f : A \to B$ de uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se um monomorfismo cindido (ou secção) se existir um morfismo $g : B \to A$ em $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = 1_A$.

   Mostre que:

   (a) Todo o isomorfismo é um monomorfismo cindido e todo o monomorfismo cindido é um monomorfismo.
   (b) Se f é simultaneamente um monomorfismo cindido e um epimorfismo, então f é um isomorfismo.
5. Dualize os resultados dos exercícios anteriores.

   (Nota: A noção dual de monomorfismo cindido será a de epimorfismo cindido ou retracção.)
6. Descreva os monomorfismos, os monomorfismos cindidos, os epimorfismos e os epimorfismos cindidos na categoria:

   (a) $\mathcal{C}onj$;
   (b) se X é um conjunto, $\mathcal{C}onj \downarrow X$;
   (c) $\mathcal{C}onj \downarrow \mathcal{C}onj$;
   (d) $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$, onde $(X, \leq)$ é um conjunto pré-ordenado;
   (e) $\mathcal{P}fn$.
7. Um functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserva uma propriedade (P) de morfismos (de objectos) se Ff tiver essa propriedade sempre que f a tenha (respectivamente FA tiver essa propriedade se o mesmo ocorrer em A).

   Prove que:

   (a) Todo o functor preserva isomorfismos.
   (b) Um functor não preserva, em geral, monomorfismos (epimorfismos). (E monomorfismos cindidos?)
8. Um functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ reflecte uma propriedade se f goza dessa propriedade caso Ff a satisfaça (e analogamente para objectos).

   Prove (dando contra-exemplos) que as seguintes afirmações são, em geral, falsas:

   (a) Todo o functor reflecte isomorfismos.
   (b) Todo o functor reflecte o objecto terminal.

6 Produtos

6.1 Definição.

Se A e B são objectos de uma categoria $\mathcal{C}$, chama-se produto de A e B a um par $(P,(p_A,p_B))$ onde P é um objecto de $\mathcal{C}$ e $p_A : P \to A$ e $p_B : P \to B$ são morfismos de $\mathcal{C}$ tais que, para cada par $(Q,(q_A,q_B))$ onde $Q \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $q_A \in \mathcal{C}(Q,A)$ e $q_B \in \mathcal{C}(Q,B)$, existe um único morfismo $t : Q \to P$ satisfazendo as igualdades $q_A = p_A \circ t$ e $q_B = p_B \circ t$ (isto é, t é o único morfismo que torna os dois triângulos seguintes comutativos).

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[d, dashed, "t"] \arrow[dr, "q_B"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \end{tikzcd}$$

6.2 Proposição.

Numa categoria, o produto de dois objectos – quando existe – é único a menos de isomorfismo.

6.3 Definição.

Se $(C_i)_{i\in I}$ é uma família de objectos de uma categoria $\mathcal{C}$, chama-se produto da família $(C_i)_{i\in I}$ a um par $(P,(p_i : P \to C_i)_{i\in I})$, onde $P \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $p_i \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ para cada $i \in I$, tal que, dado qualquer outro par $(Q,(q_i : Q \to C_i)_{i\in I})$ com $Q \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $q_i \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$, existe um único morfismo $t : Q \to P$ satisfazendo a igualdade $q_i = p_i \circ t$ para todo o $i \in I$.

Se $(P,(p_i)_{i\in I})$ é o produto de $(C_i)_{i\in I}$, é habitual designar o objecto P por $\prod\limits_{i\in I} C_i$; os morfismos $p_i : P \to C_i$ chamam-se projecções.

6.4 Exercício.

Mostre que o produto de uma família de objectos de uma categoria, quando existe, é único a menos de isomorfismo.

6.5 Exemplos.

Seja I um conjunto.

1. Em $\mathcal{C}onj$ o produto de uma família de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ é exactamente o produto cartesiano

   $$\prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \,|\, x_i \in X_i\},$$

   com projecções $p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$.

2. Na categoria das categorias pequenas $\mathcal{C}at$ o produto de duas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ como definido em 1.10.

   O produto de uma família $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ de categorias é definido de forma análoga.

3. Na categoria $\mathcal{G}rp$ dos grupos (assim como em $\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$) o produto de uma família $(G_i,+_i)_{i\in I}$ é $((\prod\limits_{i\in I} G_i,+),(p_i : \prod\limits_{i\in I} G_i \to G)_{i\in I})$, onde $\prod\limits_{i\in I} G_i$ é o produto cartesiano dos conjuntos G_i e a operação $+$ é definida componente a componente, isto é,

   $$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} := (x_i +_i y_i)_{i\in I}.$$

4. Na categoria $\mathcal{G}rf$ dos grafos dirigidos e respectivos homomorfismos, o produto de uma família $(X_i, K_i)_{i\in I}$ é o par $((X,K),(p_i : (X,K) \to (X_i,K_i))_{i\in I})$, onde X é o produto cartesiano de $(X_i)_{i\in I}$ e
$$K = \{((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}) \in X \times X \,|\, \text{para todo o } i \in I,\ (x_i,y_i) \in K_i\},$$
sendo cada p_i a projecção do produto cartesiano no factor respectivo.

5. Seja $(X,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $(x_i)_{i\in I}$ é uma família de elementos de X, o seu produto em $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ é exactamente (quando existe) o ínfimo do conjunto $\{x_i \,|\, i \in I\}$.

6. Na categoria dos conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{POC}onj$ o produto de uma família $(X_i,\leq_i)_{i\in I}$ é o par $((X,\leq),(p_i : (X,\leq) \to (X_i,\leq_i))_{i\in I})$, onde X é o produto cartesiano da família de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ e a relação de ordem $\leq$ é definida por:
$$(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I} \;:\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)\; x_i \leq_i y_i,$$
sendo p_i a projecção do produto cartesiano no factor X_i.

6.6 Observação.

O produto de uma família vazia de objectos de $\mathcal{C}$ é, quando existe, o objecto terminal de $\mathcal{C}$.

6.7 Definições.

Diz-se que uma categoria $\mathcal{C}$:

1. tem produtos binários se, dado qualquer par de objectos A e B, existir o produto de A e B.

2. tem produtos finitos se qualquer família de objectos de $\mathcal{C}$ indexada por um conjunto finito tiver produto.

3. tem produtos se qualquer família de objectos de $\mathcal{C}$ indexada por um conjunto tiver produto em $\mathcal{C}$.

6.8 Observações.

1. Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são morfismos em $\mathcal{C}$ e se existem os produtos $(A \times C,(p_A,p_C))$, $(B \times D,(p_B,p_D))$ de A e B e de C e D respectivamente, o único morfismo de $A \times C$ em $B \times D$ que torna o seguinte diagrama comutativo
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times C \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_C"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[d, "g"] \\ B & B \times D \arrow[l, "p_B"'] \arrow[r, "p_D"] & D \end{tikzcd}$$
designa-se habitualmente por $f \times g$.

2. Se $f : A \to B$ e $g : A \to C$ são dois morfismos em $\mathcal{C}$ e se existe o produto $(B \times C,(p_B,p_C))$ de B e C em $\mathcal{C}$, o único morfismo de A em $B \times C$ que torna o diagrama seguinte comutativo
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "g"] & \\ B & B \times C \arrow[l, "p_B"'] \arrow[r, "p_C"] & C \end{tikzcd}$$
designa-se habitualmente por $< f, g >$.

6.9 Exercícios.

1. Mostre que uma categoria tem produtos finitos se e só se tem objecto terminal e produtos binários.

2. (a) Para o produto cartesiano de conjuntos prove que as seguintes funções são bijecções:
   i. $c : X \times Y \longrightarrow Y \times X$, com $c(x, y) = (y, x)$.
   ii. $a : X \times (Y \times Z) \longrightarrow (X \times Y) \times Z$, com $a(x, (y, z)) = ((x, y), z)$.

   (b) Mostre que, se A, B, C são objectos de uma categoria $\mathcal{C}$, então:
   i. existe um isomorfismo de $A \times B$ em $B \times A$;
   ii. $A \times (B \times C)$ e $(A \times B) \times C$ são isomorfos.

3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos binários. Mostre que, para cada objecto A de $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{rcl} - \times A : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ C & \longmapsto & C \times A \\ (f : C \to C') & \longmapsto & (f \times 1_A : C \times A \to C' \times A) \end{array}$$

   é um functor.

4. (a) Mostre que, se $\mathcal{C}$ tem objecto terminal 1, então, para todo o objecto C de $\mathcal{C}$, o produto de 1 por C existe e é isomorfo a C.

   (b) Suponha agora que $\mathcal{C}$ tem objecto inicial 0. Verifique que em geral não se verifica que $C \times 0$ seja isomorfo a 0 para todo o objecto C de $\mathcal{C}$.

   E se 0 for objecto zero?

5. Considere em $\mathcal{C}on j$ os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ dos números inteiros e reais, respectivamente. Sejam $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ o seu produto cartesiano, $z_0 \in \mathbb{Z}$, $r_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} p_{z_0} : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (z, r) & \longmapsto & z + z_0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} p_{r_0} : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (z, r) & \longmapsto & r + r_0 \end{array}$$

   Mostre que, quaisquer que sejam z_0 e r_0, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, (p_{z_0}, p_{r_0}))$ é um produto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ em $\mathcal{C}on j$.

6. Sejam $(G, +)$ um grupo abeliano e $(G^2, (\pi_1, \pi_2))$ o produto cartesiano de G por G. Mostre que $(G^2, (\pi_1, \pi_2))$, $(G^2, (\pi_1, +))$ e $(G^2, (\pi_2, +))$ são produtos de (G, G) na categoria dos grupos abelianos $\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$.

7. Mostre que a categoria $\mathcal{P}fn$ tem produtos finitos.

   (Sugestão: Verifique que o produto de X e Y é $(X \prod Y, (p_X, p_Y))$, onde

$$X \prod Y = (X \times Y) \overset{+}{\cup} X \overset{+}{\cup} Y,$$

   $p_X : X \prod Y \to X$ é a função parcial com domínio de definição $(X \times Y) \overset{+}{\cup} X$, sendo $p_X(x, y) = x$ e $p_X(x) = x$, e p_Y é definida de forma análoga.)

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos finitos. Prove que $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C}$ tem produtos finitos.

6.10 Definição.

Se $(C_i)_{i\in I}$ é uma família de objectos de uma categoria $\mathcal{C}$, chama-se coproduto de $(C_i)_{i\in I}$ a um par $(C, (c_i : C_i \to C)_{i\in I})$, onde $C \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $c_i \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ para todo o $i \in I$, tal que, se $(D, (d_i : C_i \to D)_{i\in I})$ é um par com $D \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $d_i \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ $(i \in I)$, então existe um único morfismo $t : C \to D$ satisfazendo a igualdade $d_i = t \circ c_i$ para todo o $i \in I$.

Se $(C, (c_i)_{i\in I})$ é o coproduto de $(C_i)_{i\in I}$, é habitual designar C por $\coprod\limits_{i\in I} C_i$ e chamar aos morfismos $c_i : C_i \to C$ coprojecções.

6.11 Exemplos.

Seja I um conjunto.

1. Em $\mathcal{C}onj$ o coproduto de uma família de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ é a sua reunião disjunta
$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\})$$
com inclusões $c_j : X_j \to \coprod X_i$, sendo $c_j(x) = (x, j)$, para todo o $x \in X_j$.

2. Na categoria $\mathcal{G}rf$, o coproduto de $(X_i, K_i)_{i\in I}$ é o par (X, K) onde X é a reunião disjunta de (X_i) e
$$K = \{((x, i), (y, i)) \,|\, (x, y) \in K_i,\ i \in I\}.$$

3. Na categoria dos grupos, o coproduto de uma família $(G_i, +_i, e_i)_{i\in I}$ é o seu produto livre, que é construído da seguinte forma:
   - considera-se a reunião disjunta A dos conjuntos G_i (a A chama-se alfabeto);
   - considera-se em seguida o conjunto B de todas as sucessões finitas (chamadas palavras) de elementos de A;
   - em B define-se a relação de equivalência $\sim$ gerada pelas condições:
     - quaisquer que sejam $i, j \in I$, $e_i \sim e_j \sim \emptyset$ ("palavra vazia");
     - sempre que a_m e a_{m+1} pertençam a um mesmo G_j,
$$a_1a_2\cdots a_m a_{m+1}\cdots a_n \ \sim\ a_1a_2\cdots(a_m +_j a_{m+1})\cdots a_n.$$

   $B/\sim$, munido da operação de concatenação (ou justaposição) é o produto livre de $(G_i)_{i\in I}$, que se designa habitualmente por $\coprod_{i\in I} G_i$, sendo $c_j(a)$ a sucessão singular a, para cada $a \in G_j$, $j \in I$.

4. Em $\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$ o coproduto de uma família $(G_i, +_i, e_i)_{i\in I}$ é a sua soma directa
$$\coprod_{i\in I} G_i = \{(x_i)_{i\in I} \,|\, x_i \in G_i,\ \{i \in I \,|\, x_i \neq e_i\} \text{ é finito}\},$$
sendo a operação de grupo exactamente a definida no caso do produto, e $c_j : G_j \to \coprod G_i$ definido por $c_j(x) = (x_i)_{i\in I}$ com $x_j = x$ e $x_i = e_i$ para $i \neq j$.

6.12 Definições.

Tal como para produtos, dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$:

1. tem coprodutos binários se, dado qualquer par de objectos A e B, existir o coproduto de A e B.

2. tem coprodutos finitos se qualquer família de objectos de $\mathcal{C}$ indexada por um conjunto finito tiver coproduto.

3. tem coprodutos se qualquer família de objectos de $\mathcal{C}$ indexada por um conjunto tiver coproduto em $\mathcal{C}$.

6.13 Observação.

Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são morfismos em $\mathcal{C}$ e se existem os coprodutos $(A + C, (c_A, c_C))$, $(B + D, (c_B, c_D))$ de A e B e de C e D respectivamente, o único morfismo de $A + C$ em $B + D$ que torna o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c_A"] \arrow[d, "f"'] & A + C \arrow[d, dashed] & C \arrow[l, "c_C"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "c_B"] & B + D & D \arrow[l, "c_D"'] \end{tikzcd}$$

designa-se habitualmente por $f + g$.

6.14 Exercícios.

Verifique se as seguintes categorias têm coprodutos e, em caso afirmativo, descreva-os:

1. $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$, onde $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado;

2. $\mathcal{P}fn$;

3. $\mathcal{POC}onj$.

7 Igualizadores e co-igualizadores

7.1 Definição.

Dado um par de morfismos $f, g : A \to B$ numa categoria $\mathcal{C}$, um igualizador de f e g é um par $(M, m : M \to A)$, onde $M \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $m \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$, tal que:

1. $f \circ m = g \circ m$;

2. se $(D, d : D \to A)$, com $D \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $d \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$, verifica $f \circ d = g \circ d$, então existe um único morfismo $t : D \to M$ tal que $d = m \circ t$.

7.2 Proposição.

Quando existe, o igualizador de um par de morfismos é único a menos de isomorfismo.

7.3 Proposição.

Todo o igualizador é um monomorfismo.

7.4 Proposição.

Se $f \in \mathcal{C}(A,B)$, então o igualizador de (f,f) existe em $\mathcal{C}$ e é a identidade em A.

7.5 Exemplos.

1. Em $\mathcal{C}onj$ o igualizador de duas aplicações $f,g : X \to Y$ é um par (M,m) onde
$$M = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\},$$
e m é a inclusão.

2. Em $\mathcal{G}rp$ (e $\mathcal{A}b\mathcal{G}rp$) o igualizador de dois homomorfismos $f,g : (G,+) \to (G',+')$ é $((M,+_M),m)$, onde $(M,+_M)$ é o subgrupo $\{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$ de G e m a inclusão.

3. Em $\mathcal{G}rf$ o igualizador de dois morfismos $f,g : (X,K_X) \to (Y,K_Y)$ é o par $((M,K_M),m)$, onde $M = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, $K_M = K \cap (M \times M)$ e m é a inclusão.

7.6 Definição.

Dado um par de morfismos $f,g : A \to B$ numa categoria $\mathcal{C}$, um co-igualizador de f e g é um igualizador de (f,g) em $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Isto é, um co-igualizador de $f,g : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um par $(Q, q : B \to Q)$, onde $Q \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $q \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$, tal que:

1. $q \circ f = q \circ g$;

2. se $(R, r : B \to R)$, com $R \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $r \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$, verifica $r \circ f = r \circ g$, então existe um único morfismo $t : Q \to R$ tal que $r = t \circ q$.

7.7 Exemplos.

1. Na categoria dos conjuntos para definir o co-igualizador (Q,q) de um par de morfismos $f,g : X \to Y$ considera-se a relação de equivalência $\sim$ gerada pelos pares $(f(x), g(x))$ para todo o elemento x de X e o conjunto Q das classes de equivalência desta relação; a aplicação q é a projecção de Y em $Q = Y/\sim$.

2. Na categoria dos grafos dirigidos, dado um par de morfismos $f,g : (X,K_X) \to (Y,K_Y)$, o seu co-igualizador é o par $((Q,K),q)$, onde Q e q são definidos como em $\mathcal{C}onj$ e
$$K = \{(a,b) \in Q \times Q \mid \text{ existe } (y,z) \in K_Y \text{ tal que } q(y) = a \;\&\; q(z) = b\}.$$

3. Na categoria dos grupos abelianos, se $f : G \to G'$, o co-igualizador de $(f,0)$ é o quociente $G' \to G'/f(G)$; se $f,g : G \to G'$, então o co-igualizador de (f,g) é o co-igualizador de $(f-g,0)$.

7.8 Exercícios.

1. Enuncie os resultados duais das Proposições 7.2 - 7.4.

2. Mostre que na subcategoria plena de $\mathcal{C}onj$ constituída pelos conjuntos não vazios há pares de morfismos que não têm igualizador.

3. Seja $(X,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Identifique os morfismos em $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ que são igualizadores.

4. Um monomorfismo $m : M \to X$ diz-se monomorfismo extremal se, sempre que $m = g \circ f$ sendo f um epimorfismo, f é necessariamente um isomorfismo.

   (a) Já provámos que todo o monomorfismo cindido é um igualizador. Mostre que todo o igualizador é um monomorfismo extremal.

   (b) Prove que todo o morfismo que é simultaneamente um epimorfismo e um monomorfismo extremal é um isomorfismo.

   (c) Mostre que, na categoria dos conjuntos, todo o monomorfismo é um igualizador, embora nem todo o monomorfismo seja cindido.

   (d) Dê exemplos de categorias onde nem todo o monomorfismo seja um igualizador.

5. * Mostre que $\mathcal{P}fn$ tem igualizadores.

6. ** Mostre que $\mathcal{P}fn$ tem co-igualizadores.

8 Produtos fibrados e somas amalgamadas

8.1 Definições.

1. O produto fibrado de um par de morfismos $f : A \to B$, $g : C \to B$ numa categoria $\mathcal{C}$ consiste num par $(P, (g' : P \to A,\ f' : P \to C))$, onde $P \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $f', g' \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$, tal que $f \circ g' = g \circ f'$ e, para cada par $(Q, (u : Q \to A,\ v : Q \to C))$ tal que $f \circ u = g \circ v$, existe um único morfismo $t : Q \to P$ que torna o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

comutativo. A f' (resp. g') chama-se o produto fibrado de f (resp. g) ao longo de g (resp. f).

2. À noção dual de produto fibrado chama-se soma amalgamada.

8.2 Exercícios.

1. Mostre que as seguintes categorias têm produtos fibrados:

   (a) $\mathcal{C}onj$;

   (b) $\mathcal{G}rf$;

2. Considere, na categoria dos conjuntos, um morfismo $f : X \to Y$, um subconjunto $M \subseteq X$ e a sua inclusão $m : M \to X$. Identifique o produto fibrado de m ao longo de f.

3. Mostre que, qualquer que seja o morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

é um produto fibrado.

4. Prove que num produto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

se f for um monomorfismo (isomorfismo, resp.), então f' será também um monomorfismo (isomorfismo, resp.).

5. Chama-se par núcleo de um morfismo $f : A \to B$ ao produto fibrado (quando existe) de f por f.

   Seja $f : A \to B$ um morfismo na categoria $\mathcal{C}$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

   (a) f é um monomorfismo;

   (b) o par núcleo de f existe e é dado por $(A, (1_A, 1_A))$;

   (c) o par núcleo $(P, (\alpha, \beta))$ de f existe e é tal que $\alpha = \beta$.

6. Mostre que, se os quadrados seguintes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

são diagramas de somas amalgamadas, então o diagrama exterior ainda é uma soma amalgamada.

7. Enuncie os resultados duais dos exercícios 3 a 6 anteriores.

9 Limites e colimites

9.1 Definições.

Seja $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um functor.

1. um cone de F consiste num par $(C, (p_D : C \to FD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$, onde $C \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ e $p_D \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ para todo o $D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$, tal que, para cada morfismo $f : D \to D'$ em $\mathcal{D}$, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & FD \arrow[d, "Ff"] \\ C \arrow[ur, "p_D"] \arrow[r, "p_{D'}"'] & FD' \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $Ff \circ p_D = p_{D'}$.

2. Um cone $(L, (p_D : L \to FD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ diz-se um cone limite de F (ou simplesmente limite de F) se, para cada cone $(M, (q_D : M \to FD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ de F, existir um único morfismo $t : M \to L$ tal que $q_D = p_D \circ t$ para todo o objecto $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "p_D"] & FD \\ M \arrow[u, dashed, "t"] \arrow[ur, "q_D"'] & \end{tikzcd}$$

9.2 Proposição.

Quando um functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tiver limite, este é único a menos de isomorfismo; isto é, se $(L, (p_D))$ e $(M, (q_D))$ são cones limite de F, então existe um isomorfismo $h : M \to L$ tal que $p_D \circ h = q_D$ para todo o $D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$.

9.3 Proposição.

Se $(L, (p_D : L \to FD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ é um limite de $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $f, g : M \to L$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $p_D \circ f = p_D \circ g$ para todo o $D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$, então $f = g$.

9.4 Definições.

Seja $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um functor.

1. um co-cone de F consiste num par $(C, (c_D : FD \to C)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$, onde C é um objecto de $\mathcal{C}$ e $c_D : FD \to C$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ para todo o $D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$, tal que, para cada morfismo $f : D \to D'$ em $\mathcal{D}$, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & FD \arrow[dl, "c_D"'] \arrow[d, "Ff"] \\ C & FD' \arrow[l, "c_{D'}"] \end{tikzcd}$$

   é comutativo, isto é, $c_{D'} \circ Ff = c_D$.

2. Um co-cone $(Q, (c_D : FD \to Q)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ diz-se um co-cone colimite de F (ou simplesmente colimite de F) se, para cada co-cone $(M, (q_D : FD \to M)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ de F, existir um único morfismo $t : Q \to M$ tal que $q_D = t \circ c_D$ para todo o objecto $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "t"'] & FD \arrow[l, "c_D"'] \arrow[dl, "q_D"] \\ M & \end{tikzcd}$$

9.5 Exemplos.

1. Se I é um conjunto interpretado como uma categoria discreta $\mathcal{I}$, um functor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ consiste exactamente numa família $(Fi)_{i \in I}$ de objectos de $\mathcal{C}$ indexada por I, e o seu limite, quando existe, é o produto da família (Fi) em $\mathcal{C}$.

2. Seja $\mathcal{D}$ a categoria que tem dois objectos D_1 e D_2, e dois morfismos distintos não triviais $d, d' : D_1 \to D_2$. Um functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ consiste na escolha de dois morfismos $f, g : A \to B$ em $\mathcal{C}$, e o seu limite é exactamente o igualizador de (f, g).

3. Seja $\mathcal{D}$ a categoria que tem três objectos, D_1, D_2 e D_3 e dois morfismos não triviais $d : D_1 \to D_3$ e $d' : D_2 \to D_3$. Um functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ consiste na escolha de dois morfismos com codomínio comum, $f : A \to B$ e $g : C \to B$, e o seu limite, quando existe, é o produto fibrado de f e g.

9.6 Definições.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.

1. $\mathcal{C}$ diz-se completa se, para qualquer categoria pequena $\mathcal{D}$ e qualquer functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, existir o limite de F.

2. $\mathcal{C}$ diz-se finitamente completa se, para qualquer categoria $\mathcal{D}$ com $\mathrm{Mor}\mathcal{D}$ finito e qualquer functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, existir o limite de F.

9.7 Observação.

O seguinte resultado justifica a nossa restrição a categorias pequenas na definição de categoria completa:

9.8 Teorema.

Se numa categoria $\mathcal{C}$ existir o limite de qualquer functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ para toda a categoria $\mathcal{D}$, então entre cada dois objectos de $\mathcal{C}$ existe no máximo um morfismo.

(Ou seja, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(X,\leq)}$ para alguma classe pré-ordenada $(X, \leq)$.)

9.9 Teorema de existência de limites.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathcal{C}$ é completa;

(ii) $\mathcal{C}$ tem produtos e igualizadores.

9.10 Teorema de existência de limites finitos.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathcal{C}$ é finitamente completa;

(ii) $\mathcal{C}$ tem objecto terminal, produtos binários e igualizadores;

(iii) $\mathcal{C}$ tem objecto terminal e produtos fibrados.

9.11 Exercícios.

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Verifique se os seguintes functores têm limite e colimite em $\mathcal{C}$:

   (a) $F : 1 \to \mathcal{C}$;

   (b) $F : 2 \to \mathcal{C}$.

2. Mostre que, se $(A, (f_D : A \to HD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ é um cone do functor $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um functor, então $(FA, (Ff_D))$ é um cone do functor $F \circ H$.

3. Considere o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais com a relação de ordem usual $\leq$. Verifique se $\mathcal{C}_{(\mathbb{N},\leq)}$ é completa e cocompleta.

4. Sejam X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Considere o functor

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{C}_{(\mathcal{P}(X),\subseteq)} & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ S & \longmapsto & S \\ S \to S' & \longmapsto & S \hookrightarrow S' \end{array}$$

onde $S \hookrightarrow S'$ é a função de inclusão. Calcule o limite e o colimite de F.

5. Um par $(\Lambda, \leq)$ diz-se um conjunto orientado se $\leq$ for uma relação binária em X tal que:

(1) $\leq$ é reflexiva;

(2) $\leq$ é transitiva;

(3) dados $\alpha, \beta \in \Lambda$ existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

Considere um conjunto orientado $(\Lambda, \leq)$ como uma categoria $\mathcal{D}$ que tem como classe de objectos Λ e

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \{*_\beta^\alpha\} & \text{se } \beta \leq \alpha \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}onj$ um functor. Prove que $(P, (p_\alpha : P \to F(\alpha)))$, onde $P = \{(x_\alpha) \in \prod_\alpha F(\alpha)\,;\, F(*_\beta^\alpha)(x_\alpha) = x_\beta\}$ e cada p_α é a projecção óbvia, é um cone limite de F.

(Nota: À imagem de F chama-se sistema inverso e ao seu limite limite do sistema inverso ou simplesmente limite inverso.)

6. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathcal{A}$ tem objecto inicial;

(ii) o functor $id_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tem limite.

7. Um functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserva limites se, quaisquer que sejam a categoria pequena $\mathcal{D}$ e o functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$, sempre que $(L, (p_L : L \to FD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ for um cone limite de F, também $(GL, (Gp_D : GL \to GFD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ é um cone limite do functor GF. Mostre que:

(a) Todo o functor que preserva limites preserva necessariamente monomorfismos.

(b) Se $\mathcal{A}$ é uma categoria e A um objecto de $\mathcal{A}$, então o functor $\mathcal{A}(A, -)$ preserva limites.

10 Transformações naturais

10.1 Definição.

Sejam $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ functores.

1. Uma transformação natural $\alpha : F \to G$ de F em G é uma classe de morfismos $(\alpha_A : FA \to GA)_{A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}}$ em $\mathcal{B}$, indexada pelos objectos de $\mathcal{A}$, e tal que, para cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{A}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"] & GB \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é $\alpha_B \circ Ff = Gf \circ \alpha_A$.

2. Uma transformação natural $\alpha : F \to G$ diz-se um isomorfismo natural se existir uma transformação natural $\beta : G \to F$ tal que $\beta \circ \alpha = 1_F$ e $\alpha \circ \beta = 1_G$.

10.2 Propriedades.

1. Se $F, G, H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ são functores e $\alpha : F \to G$ e $\beta : G \to H$ são transformações naturais, então $\beta \circ \alpha$, definida por $(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A$ ($A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$), é uma transformação natural de F em H.

2. A lei de composição de transformações naturais atrás definida é associativa e tem unidade: para cada functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $1_F : F \to F$ é definida obviamente por $(1_{FA} : FA \to FA)_{A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}}$.

3. Se $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G, H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são functores e $\alpha : G \to H$ é uma transformação natural, então podemos definir transformações naturais $\alpha F : G \circ F \to H \circ F$ e $K\alpha : K \circ G \to K \circ H$, onde $\alpha F_A = \alpha_{FA} : GFA \to HFA$ e $K\alpha_B = K(\alpha_B) : KGB \to KHB$.

10.3 Proposição.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria pequena e $\mathcal{B}$ uma categoria qualquer. Os functores de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ e as transformações naturais entre eles constituem uma categoria, $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Esta categoria é pequena desde que $\mathcal{B}$ o seja.

10.4 Exercício.

Mostre que as seguintes condições são equivalentes, para uma transformação natural $\alpha : F \to G$, onde $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ são functores:

(i) α é um isomorfismo natural.

(ii) para todo o objecto A de $\mathcal{A}$, $\alpha_A : FA \to GA$ é um isomorfismo em $\mathcal{B}$.

10.5 Exemplos.

1. Seja $\mathcal{C}$ a categoria dos espaços vectoriais sobre um corpo K, e seja $(\ )^{**} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ o functor bidual; isto é, $V^{**} = \mathcal{C}(\mathcal{C}(V, K), K)$ e, se $f \in \mathcal{C}(V, W)$, então

$$\begin{array}{rcl} (f)^{**} : \mathcal{C}(\mathcal{C}(V,K),K) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{C}(W,K),K) \\ g : \mathcal{C}(V,K) \to K & \longmapsto & \begin{array}{rcl} (f)^{**}(g) : \mathcal{C}(W,K) & \to & K \\ u & \mapsto & g(u \circ f). \end{array} \end{array}$$

   Os morfismos canónicos

$$\begin{array}{rcl} \alpha_V : V & \longrightarrow & V^{**} \\ v & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(V,K) & \to & K \\ f & \mapsto & f(v) \end{array} \end{array}$$

   formam uma transformação natural $\alpha : 1_{\mathcal{C}} \to (\ )^{**}$.

2. O determinante é uma transformação natural:

   Consideremos a categoria $\mathcal{C}$ dos anéis com identidade, e os functores

$$\begin{array}{rcl} U : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{G}rp \\ A & \longmapsto & UA \text{ (grupo multiplicativo dos elementos invertíveis de } A) \end{array}$$

   e

$$\begin{array}{rcl} GL_n : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{G}rp \\ A & \longmapsto & GL_n(A) \text{ (grupo das matrizes } n \times n \text{ invertíveis com entradas em } A) \end{array}$$

   As "funções determinante" $\det_A : GL_n(A) \to UA$ definem uma transformação natural

$$\det : GL_n \to U.$$

3. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria. Cada morfismo $f : B \to A$ em $\mathcal{A}$ define uma transformação natural $\mathcal{A}(f,-) : \mathcal{A}(A,-) \to \mathcal{A}(B,-)$, sendo $\mathcal{A}(f,-) = (\mathcal{A}(f,C))_{C\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}}$, onde

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(f,C) : \mathcal{A}(A,C) & \longrightarrow & \mathcal{A}(B,C) \\ g : A \to C & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

10.6 Exercícios.

1. Sejam $(X,\leq)$ e $(Y,\preceq)$ dois conjuntos pré-ordenados. Dados functores $F,G : \mathcal{C}_{(X,\leq)} \to \mathcal{C}_{(Y,\preceq)}$, interprete transformação natural $\mu : F \to G$.

2. Se G e G' são grupos e $H,K : \mathcal{C}_G \to \mathcal{C}_{G'}$ são functores, mostre que existe uma transformação natural $\beta : H \to K$ se e só se H e K são homomorfismos conjugados, i.e. se existe um $x \in G'$ tal que
$$H(g) = x \cdot K(g) \cdot x^{-1}$$
para todo o $g \in G$.

3. Considere os functores
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : \mathcal{C}onj & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ X & \longmapsto & \mathcal{P}(X) \\ (f : X \to Y) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \end{array}$$
e
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q} : \mathcal{C}onj & \longrightarrow & \mathcal{C}onj. \\ X & \longmapsto & \mathcal{Q}(X) := \mathcal{P}(X) \\ (f : X \to Y) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \mathcal{Q}(f) : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\} \end{array} \end{array}$$

   (a) Verifique que $\lambda = (\lambda_X : X \to \mathcal{P}(X))_{X\in\mathcal{C}onj}$, onde $\lambda_X(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$, é uma transformação natural do functor identidade no functor $\mathcal{P}$.

   (b) Mostre que o mesmo $\lambda = (\lambda_X)_{X\in\mathcal{C}onj}$ não é uma transformação natural de $1_{\mathcal{C}onj}$ em $\mathcal{Q}$.

4. Seja S um conjunto. Considere os functores
$$\begin{array}{rcl} F = -\times S : \mathcal{C}onj & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ X & \longmapsto & X \times S \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} G = \mathcal{C}onj(S,-) : \mathcal{C}onj & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ X & \longmapsto & \mathcal{C}onj(S,X) =: X^S. \end{array}$$
Prove que as funções "avaliação"
$$\begin{array}{rcl} \alpha_X : X^S \times S & \longrightarrow & X \\ (f,s) & \longmapsto & f(s) \end{array}$$
definem uma transformação natural $\alpha = (\alpha_X)_{X\in\mathcal{C}onj}$ de FG em $1_{\mathcal{C}onj}$.

10.7 Teorema.

Se $\mathcal{A}$ é uma categoria pequena, podemos considerar o functor
$$\begin{array}{rcl} Y : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{C}onj) \\ A & \longmapsto & \mathcal{A}(A,-) \\ f \in \mathcal{A}^{\mathrm{op}}(A,B) & \longmapsto & \mathcal{A}(f,-) : \mathcal{A}(A,-) \to \mathcal{A}(B,-). \end{array}$$

O functor Y é uma imersão, a que se chama Imersão de Yoneda.

10.8 Observações.

A injectividade de Y em objectos é imediata. O ser pleno e fiel significa que toda a transformação natural de $\mathcal{A}(A,-)$ em $\mathcal{A}(B,-)$ é definida por um único morfismo em $\mathcal{A}$ de B em A, isto é, por um único elemento de $\mathcal{A}(B,-)(A) = \mathcal{A}(B,A)$.

Este resultado é ainda válido quando substituímos $\mathcal{A}(B,-)$ por um functor arbitrário $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$.

10.9 Lema de Yoneda.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ um functor. Consideremos um objecto A de $\mathcal{A}$ e o functor $\mathcal{A}(A,-) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$.

1. Existe uma bijecção
$$\theta_{F,A} : \mathrm{Nat}(\mathcal{A}(A,-),F) \longrightarrow FA$$
entre as transformações naturais de $\mathcal{A}(A,-)$ em F e os elementos do conjunto FA.

2. As bijecções $\theta_{F,A}$ constituem uma transformação natural na variável A; isto é, $\theta_F = (\theta_{F,A})_{A\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}}$ é uma transformação natural do functor
$$\begin{array}{rcl} N : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ A & \longmapsto & \mathrm{Nat}(\mathcal{A}(A,-),F) \end{array} \quad \text{em } F,$$
onde, se $f : A \to B$,
$$\begin{array}{rcl} N(f) : \mathrm{Nat}(\mathcal{A}(A,-),F) & \to & \mathrm{Nat}(\mathcal{A}(B,-),F) \\ \alpha & \mapsto & \alpha \circ \mathcal{A}(f,-) \end{array}.$$

3. Além disso, se $\mathcal{A}$ é uma categoria pequena, as bijecções $\theta_{F,A}$ constituem uma transformação natural na variável F; isto é, $\theta_A = (\theta_{F,A})_{F\in \mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{C}onj)}$ é uma transformação natural do functor
$$\begin{array}{rcl} M : \mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{C}onj) & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ F & \longmapsto & \mathrm{Nat}(\mathcal{A}(A,-),F) \end{array} \quad \text{em} \quad \begin{array}{rcl} ev : \mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{C}onj) & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ F & \longmapsto & FA \end{array},$$
onde, para cada transformação natural $\alpha : F \to G$,
$$\begin{array}{rcl} M(\alpha) : \mathrm{Nat}(\mathcal{A}(A,-),F) & \to & \mathrm{Nat}(\mathcal{A}(A,-),G) \\ \beta & \mapsto & \alpha \circ \beta \end{array} \quad \text{e } ev(\alpha) = \alpha_A.$$

10.10 Exercícios.

1. Demonstre as afirmações 2 e 3 do Lema de Yoneda.

2. Identifique a categoria $\mathcal{C}onj^{\mathcal{D}} = \mathcal{F}un(\mathcal{D},\mathcal{C}onj)$, quando:
   (a) $\mathcal{D}$ é a categoria discreta com dois objectos;
   (b) $\mathcal{D} = 2$ (definida no Exemplo 1.4);
   (c) $\mathcal{D}$ é a categoria definida por um monóide M.

3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pequena. Verifique se a categoria $\mathcal{C}onj^{\mathcal{C}}$ tem
   (a) objecto terminal,
   (b) produtos binários,

   e, em caso afirmativo, construa-os.

11 Functores representáveis

11.1 Definição.

Um functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ diz-se representável se existir um objecto A de $\mathcal{A}$ e um isomorfismo natural de F em $\mathcal{A}(A, -)$.

Diz-se então que o objecto A representa o functor F.

11.2 Corolário do Lema de Yoneda.

Se um functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ for representado por dois objectos, A e A', da categoria $\mathcal{A}$ então existe um isomorfismo $h : A \to A'$ em $\mathcal{A}$.

11.3 Exemplos.

1. O functor identidade $1 : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj$ é representável, sendo representado por qualquer conjunto singular.

2. O functor de esquecimento $U : \mathcal{G}rf \to \mathcal{C}onj$ é representável, sendo representado pelo grafo $1 = (\{*\}, \{(*, *)\})$.

3. (a) O functor de esquecimento $U : \mathcal{SG}rp \to \mathcal{C}onj$ é representável, sendo representado pelo semigrupo aditivo $\mathbb{N}$ (que não contém o 0).
   (b) O functor de esquecimento $U : \mathcal{M}on \to \mathcal{C}onj$ é representável, sendo representado pelo monóide $\mathbb{N}_0$.
   (c) O functor de esquecimento $U : \mathcal{G}rp \to \mathcal{C}onj$ é representável, sendo representado pelo grupo $\mathbb{Z}$.

11.4 Exercícios.

Verifique se os seguintes functores são representáveis:

1. O functor de esquecimento $U : \mathcal{POC}onj \to \mathcal{C}onj$.

2. O functor de esquecimento $U : \mathcal{PC}onj \to \mathcal{C}onj$.

3. O functor

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{G}rf & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ (X, K_X) & \longmapsto & \{x \in X \mid (x, x) \in K_X\} \\ (f : (X, K_X) \to (Y, K_Y)) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} Ff : FX & \to & FY \\ x & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

4. O functor

$$\begin{array}{rcl} G : \mathcal{G}rf & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ (X, K_X) & \longmapsto & K_X \\ (f : (X, K_X) \to (Y, K_Y)) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} Gf : K_X & \to & K_Y \\ (x, x') & \mapsto & (f(x), f(x')). \end{array} \end{array}$$

12 Functores e limites

12.1 Definição.

Um functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserva limites se, quaisquer que sejam a categoria pequena $\mathcal{D}$ e o functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$, sempre que $(L, (p_L : L \to FD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ for um cone limite de F, também $(GL, (Gp_D : GL \to GFD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ é um cone limite do functor GF.

12.2 Lema.

Todo o functor que preserva limites preserva necessariamente monomorfismos.

12.3 Proposição.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria (finitamente) completa e $\mathcal{B}$ uma categoria qualquer. Um functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserva limites (finitos) se e só se preserva produtos (finitos) e igualizadores.

12.4 Proposição.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria e A um objecto de $\mathcal{A}$. O functor $\mathcal{A}(A, -)$ preserva limites.

12.5 Corolário 1.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria e A um objecto de $\mathcal{A}$. O "functor contravariante"

$$\mathcal{A}(-, A) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$$

transforma colimites (que existam) em limites.

12.6 Corolário 2.

Todo o functor representável preserva limites.

12.7 Definição.

Seja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um functor. Diz-se que G reflecte limites quando, quaisquer que sejam a categoria pequena $\mathcal{D}$ e o functor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$, se $(L, (p_D : L \to FD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ é um cone para F e $(GL, (Gp_D : GL \to GFD)_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ é um cone limite de GF, então $(L, (p_D))$ é um cone limite de F.

12.8 Lema.

Todo o functor que reflecte limites reflecte necessariamente isomorfismos e monomorfismos.

12.9 Proposição.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria completa e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um functor que preserva limites. As seguintes condições são equivalentes:

(i) F reflecte limites;

(ii) F reflecte isomorfismos.

12.10 Proposição.

Todo o functor fiel e pleno reflecte limites.

12.11 Observação.

Embora os functores representáveis não reflictam em geral limites, eles reflectem conjuntamente limites, como se indica em seguida.

12.12 Proposição.

Os functores representáveis reflectem conjuntamente limites; isto é, se $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ é um functor e $(L, (p_D : L \to FD)_{D\in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$ é um cone para F, então este cone é um cone limite se e só se, para cada objecto A de $\mathcal{A}$,

$$(\mathcal{A}(A, L), (\mathcal{A}(A, p_D) : \mathcal{A}(A, L) \to \mathcal{A}(A, FD))_{D\in \mathrm{Ob}\mathcal{D}})$$

é um cone limite de $\mathcal{A}(A, F-)$ em $\mathcal{C}onj$.

12.13 Exercício.

Demonstre a Proposição 13.10.

13 Functores Adjuntos

13.1 Definições.

Sejam $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um functor e B um objecto de $\mathcal{B}$.

1. Um morfismo universal de B para G é um par (η_B, A_B), constituído por um objecto A_B de $\mathcal{A}$ e um morfismo $\eta_B : B \to G(A_B)$ em $\mathcal{B}$, tal que, para cada $f : B \to GA'$, existe um único morfismo $\overline{f} : A \to A'$ em $\mathcal{A}$ para o qual o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "f"'] & G(A_B) \arrow[d, "G\overline{f}"] & A_B \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & GA' & A' \end{tikzcd}$$

é comutativo.

2. Um morfismo universal de G para B é um par (σ_B, A_B), constituído por um objecto A_B de $\mathcal{A}$ e por um morfismo $\sigma_B : G(A_B) \to B$ em $\mathcal{B}$, tal que, para cada $g : GA' \to B$, existe um único morfismo $\overline{g} : A' \to A$ em $\mathcal{A}$ para o qual o diagrama

$$\begin{tikzcd} A_B & G(A_B) \arrow[r, "\sigma_B"] & B \\ A' \arrow[u, dashed, "\overline{g}"'] & GA' \arrow[u, "G\overline{g}"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

13.2 Proposição.

Seja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um functor tal que, para cada objecto B de $\mathcal{B}$, existe um morfismo universal (η_B, A_B) de B em G. Então existe um functor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $FB = A_B$ para todo o $B \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$, e $\eta = (\eta_B : B \to GFB)_{B\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}}$ é uma transformação natural de $1_\mathcal{B}$ em $G \circ F$.

13.3 Definição.

Diz-se que um functor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é adjunto à esquerda do functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se existir uma transformação natural $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to GF$ tal que, para cada objecto B de $\mathcal{B}$, η_B é um morfismo universal de B para G.

Neste caso G diz-se um adjunto à direita de F, e escreve-se $F \dashv G$.

A $(F, G; \eta)$ chama-se adjunção.

13.4 Proposição.

Dada uma adjunção $(F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}; \eta)$, existe uma transformação natural $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{A}}$ tal que, para cada objecto A de $\mathcal{A}$, $\varepsilon_A : FGA \to A$ é um morfismo universal de F para A. Além disso, tem-se que, para cada $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ e cada $B \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$,

$$G\varepsilon_A \circ \eta_{GA} = 1_{GA} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{FB} \circ F\eta_B = 1_{FB}.$$

13.5 Definição.

Numa situação de adjunção como a da proposição anterior, chama-se unidade da adjunção à transformação natural η, e co-unidade da adjunção à transformação natural ε.

Dizer que $(F, G; \eta, \varepsilon)$ é uma adjunção significa que $F \dashv G$, e que η é a unidade e ε a co-unidade da adjunção.

13.6 Exercícios.

1. Mostre que, se $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é adjunto esquerdo de $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, com unidade η e co-unidade ε, então $G^{\mathrm{op}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ é adjunto esquerdo de $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, com unidade $\varepsilon^{\mathrm{op}}$ e co-unidade η^{op}.

2. Mostre que, se F e $F' : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ são adjuntos à esquerda do functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, então F e F' são naturalmente isomorfos.

3. Mostre que, se $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ e $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ são functores e $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to GF$ e $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{A}}$ são transformações naturais tais que, para todo o objecto A de $\mathcal{A}$ e todo o objecto B de $\mathcal{B}$,

$$G\varepsilon_A \circ \eta_{GA} = 1_{GA} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{FB} \circ F\eta_B = 1_{FB},$$

   então $(F, G; \eta, \varepsilon)$ é uma adjunção.

13.7 Teorema.

Dadas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e functores $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, as seguintes condições são equivalentes:

(i) Existe uma transformação natural $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to GF$ tal que, para cada $B \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$, $\eta_B : B \to GFB$ é um morfismo universal de B para G.

(ii) Existe uma transformação natural $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{A}}$ tal que, para cada $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$, $\varepsilon_A : FGA \to A$ é um morfismo universal de F para A.

(iii) Existem transformações naturais $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to GF$ e $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{A}}$ tais que

$$G\varepsilon_A \circ \eta_{GA} = 1_{GA} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{FB} \circ F\eta_B = 1_{FB}.$$

(iv) Os functores $\mathcal{A}(F-, -), \mathcal{B}(-, G-) : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ são naturalmente isomorfos.

13.8 Exercícios.

1. Mostre que, se F, G, H e K são functores,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "G"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[r, shift left, "K"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift left, "H"] \end{tikzcd},$$

e $F \dashv G$ e $H \dashv K$, então $F \circ H \dashv K \circ G$.

2. Descreva situação de adjunção para functores entre conjuntos parcialmente ordenados considerados como categorias.

3. Sejam X e Y conjuntos, e $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{P}(Y)$ os conjuntos das partes de X e Y respectivamente, ordenados pela inclusão, e considerados como categorias. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação qualquer.

   Considere o functor
   $$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\ ) : \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X). \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

   Mostre que:

   (a) o functor
   $$\begin{array}{rcl} f(\ ) : \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$$
   é adjunto esquerdo de $f^{-1}(\ )$;

   (b) o functor
   $$\begin{array}{rcl} f!(\ ) : \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ A & \longmapsto & \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\} \end{array}$$
   é adjunto direito de $f^{-1}(\ )$.

4. Mostre que:

   (a) o functor $\mathcal{C} \to 1$ tem adjunto direito se e só se $\mathcal{C}$ tem objecto terminal;

   (b) o functor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, com $\Delta(C) = (C, C)$ e $\Delta(f) = (f, f)$, tem adjunto direito se e só se $\mathcal{C}$ tem produtos binários.

5. Prove que, para todo o conjunto S, o functor $F = - \times S : \mathcal{C}onj \longrightarrow \mathcal{C}onj$ tem por adjunto à direita o functor $\mathcal{C}onj(S, -) : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj$.

13.9 Proposição.

Todo o functor adjunto direito (isto é, que tem adjunto esquerdo) preserva limites.

13.10 Corolário.

Todo o functor adjunto esquerdo preserva colimites.

13.11 Observação.

A preservação de limites por um functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ não garante a existência de adjunto esquerdo de G, excepto quando a categoria é pequena e completa. Esta afirmação resulta do Teorema que enunciamos em seguida.

13.12 Teorema do Functor Adjunto de Freyd.

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria completa e $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um functor. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G tem adjunto esquerdo;

(ii) G preserva limites e satisfaz a seguinte "Condição de conjunto solução":

> Para cada objecto B de $\mathcal{B}$ existe um conjunto C_B de objectos de $\mathcal{A}$ tal que, para cada objecto A de $\mathcal{A}$ e cada morfismo $f : B \to GA$ em $\mathcal{B}$, existem $A' \in C_B$, $f' : A \to A'$ e $h : B \to GA'$ em $\mathcal{B}$ tais que $Gf' \circ h = f$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & GA' \arrow[d, "Gf'"] \\ & GA \end{tikzcd}$$

13.13 Exercícios.

1. Considere o functor de inclusão $g : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}_\infty$ (onde os conjuntos bem ordenados $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_\infty$ são interpretados como categorias). Mostre que:
   (a) g preserva limites;
   (b) g não é adjunto direito.

2. Mostre que o functor $f(\ \ ) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ considerado no Exercício 13.8 não tem adjunto direito.

3. Mostre que o functor de esquecimento $U : \mathcal{G}rp \to \mathcal{C}onj$ não tem adjunto direito.

4. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e A um objecto de $\mathcal{C}$. Considere o functor

$$\begin{array}{rcl} U_A : \mathcal{C} \downarrow A & \longrightarrow & \mathcal{C}. \\ (C \stackrel{f}{\to} A) & \longmapsto & C \\ ((C,f) \stackrel{h}{\to} (C',f')) & \longmapsto & h \end{array}$$

   (a) Mostre que, se $\mathcal{C}$ tem produtos, então U_A tem um adjunto à direita.
   (b) Mostre que, em geral, U_A não tem adjunto esquerdo.
   (c) Caracterize os objectos A de $\mathcal{C}$ para os quais U_A tem adjunto esquerdo.

13.14 Teorema.

Seja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ um functor. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G tem adjunto esquerdo;

(ii) G é representável, e o objecto A de $\mathcal{A}$ que o representa tem coprodutos em $\mathcal{A}$.

13.15 Exercício.

Verifique se o functor

$$\begin{array}{rcl} G : \mathcal{G}rf & \longrightarrow & \mathcal{C}onj \\ (X, K_X) & \longmapsto & \{x \in X \mid (x,x) \in K_X\} \\ (f : (X,K_X) \to (Y,K_Y)) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} Gf : FX & \to & FY \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \end{array}$$

tem adjunto esquerdo.

13.16 Proposição.

Se $(F:\mathcal{B}\to\mathcal{A}, G:\mathcal{A}\to\mathcal{B};\eta,\varepsilon)$ é uma adjunção, então:

(a) G é fiel se e só se, para todo o objecto A de $\mathcal{A}$, ε_A é um epimorfismo;

(b) G é pleno se e só se, para todo o objecto A de $\mathcal{A}$, ε_A é um monomorfismo cindido.

(c) G é fiel e pleno se e só se, para todo o objecto A de $\mathcal{A}$, ε_A é um isomorfismo.

13.17 Corolário.

Se $(F:\mathcal{B}\to\mathcal{A}, G:\mathcal{A}\to\mathcal{B};\eta,\varepsilon)$ é uma adjunção, então:

(a) F é fiel se e só se, para todo o objecto B de $\mathcal{B}$, η_B é um monomorfismo;

(b) F é pleno se e só se, para todo o objecto B de $\mathcal{B}$, η_B é um epimorfismo cindido.

(c) F é fiel e pleno se e só se, para todo o objecto B de $\mathcal{B}$, η_B é um isomorfismo.

14 Subcategorias reflectivas.

14.1 Definições.

Sejam $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{B}$, e $I:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ o functor de inclusão.

1. A subcategoria $\mathcal{A}$ diz-se repleta se for fechada para isomorfismos; isto é, se, sempre que $h:A\to B$ for um isomorfismo e A pertencer a $\mathcal{A}$, também B pertence a $\mathcal{A}$.
2. A subcategoria $\mathcal{A}$ diz-se reflectiva (co-reflectiva) se o functor de inclusão I tiver adjunto esquerdo (direito). Ao adjunto esquerdo (direito) de I chamaremos reflector (co-reflector).

14.2 Lema.

Se $\mathcal{A}$ for uma subcategoria plena de $\mathcal{B}$ e o functor de inclusão $I:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ for adjunto direito, então podemos definir um adjunto esquerdo $R:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ de I tal que R, quando restrito a $\mathcal{A}$, é o functor identidade.

14.3 Observação.

De agora em diante, sempre que I tiver adjunto esquerdo, tomaremos para $R\dashv I$ um functor nas condições referidas no Lema.

Se η é a unidade da adjunção $R\dashv I$, diz-se que $\eta_B: B\to RB(=IRB)$ é a reflexão de B em $\mathcal{A}$.

14.4 Teorema.

Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria reflectiva, plena e repleta, de $\mathcal{B}$.

(a) Se $\mathcal{B}$ for uma categoria completa, então $\mathcal{A}$ é completa.

(b) Se $\mathcal{B}$ for uma categoria cocompleta, então $\mathcal{A}$ é cocompleta.

14.5 Exercícios.

1. Considerando a relação de ordem natural $\leq$ em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$, verifique se a categoria $\mathcal{C}_{(\mathbb{N},\leq)}$ é uma subcategoria (co-)reflectiva de $\mathcal{C}_{(\mathbb{Z},\leq)}$.

2. Verifique se a categoria dos conjuntos finitos e aplicações é uma subcategoria (co-)reflectiva de $\mathcal{C}onj$.

3. * Verifique se a categoria $\mathcal{C}onj$ é uma subcategoria (co-)reflectiva de $\mathcal{P}fn$.

4. Seja $\mathcal{B}$ a subcategoria (plena) de $\mathcal{G}rf$ constituída pelos grafos reflexivos (isto é, grafos (X, K_X) tais que, para todo o $x \in X$, $(x,x) \in K_X$).

   Seja $I : \mathcal{B} \to \mathcal{G}rf$ o functor de inclusão.

   (a) Para cada grafo (X, K_X), considere $X' = \{x \in X \,|\, (x,x) \in K_X\}$ e $K' = \{(x,y) \in K_X \,|\, x, y \in X'\}$. Mostre que

   $$\begin{array}{rcl} \varepsilon_{(X,K_X)} : (X', K') & \longrightarrow & (X, K_X) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

   é um morfismo universal de I para (X, K_X).

   (b) $\mathcal{B}$ é uma subcategoria co-reflectiva de $\mathcal{G}rf$. Justifique.

   (c) Mostre que $\mathcal{B}$ é também uma subcategoria reflectiva de $\mathcal{G}rf$.

5. Seja $\mathcal{A}$ a subcategoria (plena) de $\mathcal{G}rf$ constituída pelos grafos dirigidos simétricos (i.e., os grafos (X, K_X) tais que, se $(x,y) \in K_X$, também $(y,x) \in K_X$). Mostre que $\mathcal{A}$ é uma subcategoria simultaneamente reflectiva e co-reflectiva de $\mathcal{G}rf$.

6. Se G é um grupo abeliano, chama-se torsão de G ao subgrupo de G

   $$\mathcal{T}or(G) = \{g \in G \,|\, g \text{ tem ordem finita}\}.$$

   Um grupo abeliano G diz-se grupo de torsão se $G = \mathcal{T}or(G)$ e grupo sem torsão se $\mathcal{T}or(G) = \{0\}$.

   Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ as subcategorias (plenas) de $\mathcal{A}b$ dos grupos abelianos de torsão e dos grupos abelianos sem torsão. Mostre que:

   (a) $\mathcal{A}$ é uma subcategoria co-reflectiva de $\mathcal{A}b$;

   (b) $\mathcal{B}$ é uma subcategoria reflectiva de $\mathcal{A}b$.

7. Seja $\mathcal{B}$ uma categoria com dois objectos A, B e que, além das identidades, tem morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to A$ tais que $g \cdot f = 1_A$ e $f \cdot g = 1_B$. Prove que a subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ com objectos A e B e morfismos $1_A, 1_B, f$ é reflectiva mas o functor reflector $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, quando restrito a $\mathcal{A}$, não pode ser a identidade.

15 Adjunções versus equivalência de categorias

15.1 Definição.

Duas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dizem-se equivalentes se existirem functores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ e isomorfismos naturais $\alpha : 1_{\mathcal{A}} \to G \circ F$ e $\beta : 1_{\mathcal{B}} \to F \circ G$.

Diz-se então que F (e então também G) é uma equivalência de categorias.

15.2 Exemplos.

1. Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria com um único objecto, A, e um único morfismo, 1_A, e $\mathcal{B}$ uma categoria com dois objectos, B_1 e B_2, e com dois morfismos não triviais, $f : B_1 \to B_2$ e $g : B_2 \to B_1$, tais que $g \circ f = 1_{B_1}$ e $f \circ g = 1_{B_2}$. Então as categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são equivalentes.

2. Os functores F e G dados em seguida definem uma equivalência entre a categoria $\mathcal{P}fn$ e a categoria $\mathcal{P}\mathcal{C}onj$ dos conjuntos pontuados:

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{P}\mathcal{C}onj & \longrightarrow & \mathcal{P}fn \\ (X, x_0) & \longmapsto & X \setminus \{x_0\} \\ f & \longmapsto & Ff \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} G : \mathcal{P}fn & \longrightarrow & \mathcal{P}\mathcal{C}onj \\ X & \longmapsto & (X \overset{+}{\cup} \{\infty\}, \infty) \\ g & \longmapsto & Gg \end{array}$$

onde, para $f \in \mathcal{P}\mathcal{C}onj((X, x_0), (Y, y_0))$, $DD_{Ff} = X \setminus f^{-1}(y_0)$ e $Ff(x) = f(x)$ para todo o $x \in DD_{Ff}$, e, para $g \in \mathcal{P}fn(X, Y)$, $Gg(x) = g(x)$ se $x \in DD_g$ e $Gg(x) = \infty$ se $x \notin DD_f$.

15.3 Teorema.

Seja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um functor. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G é fiel e pleno e tem adjunto esquerdo fiel e pleno;

(ii) G é uma equivalência de categorias;

(iii) G é fiel e pleno, e cada objecto B de $\mathcal{B}$ é isomorfo a um objecto da forma GA para algum $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$.

15.4 Corolário.

Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma equivalência de categorias. Então, se $\mathcal{A}$ for (finitamente) completa, também $\mathcal{B}$ será (finitamente) completa.

16 Categorias cartesianas fechadas

Para cada conjunto A, o functor $F : - \times A : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj$ tem adjunto direito, $G = \mathcal{C}onj(A, -) : \mathcal{C}onj \to \mathcal{C}onj$, sendo a co-unidade da adjunção dada pelas funções "avaliação"

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ev}_B : \mathcal{C}onj(A, B) \times A & \longrightarrow & B \\ (f, a) & \longmapsto & f(a). \end{array}$$

16.1 Definição.

Diz-se que uma categoria $\mathcal{C}$ é cartesiana fechada se tiver produtos finitos e, para cada objecto A de $\mathcal{C}$, o functor $- \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tiver adjunto direito.

Nesse caso, se G_A for o adjunto direito de $- \times A$, a $G_A(B)$ chama-se objecto exponencial – ou exponencial de B com expoente A –, e denota-se por B^A ou $[A \to B]$.

16.2 Proposição.

Uma categoria $\mathcal{C}$ é cartesiana fechada se e só se os seguintes functores têm adjunto direito

$$\mathcal{C} \longrightarrow 1, \qquad \begin{array}{rcl}\Delta : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \\ C & \longmapsto & (C,C)\end{array} \quad \text{e} \quad -\times A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{(para cada objecto } A \text{ de } \mathcal{A}\text{).}$$

16.3 Exercícios.

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cartesiana fechada com objecto inicial 0.

   Prove que, se A é um objecto de $\mathcal{C}$,

   (a) $0 \cong 0 \times A$;

   (b) se $\mathcal{C}(A, 0) \neq \emptyset$, então $A \cong 0$;

   (c) se $0 \cong 1$, então a categoria $\mathcal{C}$ é degenerada, isto é, todos os objectos de $\mathcal{C}$ são isomorfos;

   (d) todo o morfismo $0 \to A$ é um monomorfismo;

   (e) $A^1 \cong A$, $A^0 \cong 1$ e $1^A \cong 1$.

16.4 Exemplos.

1. As seguintes categorias são cartesianas fechadas:

   (a) $\mathcal{C}onj$;

   (b) $\mathcal{C}onj \times \mathcal{C}onj$;

   (c) $\mathcal{C}onj \downarrow \mathcal{C}onj$;

   (d) $\mathcal{C}onj \downarrow I$, para qualquer conjunto I;

   (e) $\mathcal{C}at$;

   (f) $\mathcal{G}rf$.

2. As seguintes categorias não são cartesianas fechadas: $\mathcal{SG}rp$, $\mathcal{V}ec_K$, $\mathcal{M}on$, $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{T}op$.

16.5 Exercícios.

1. Mostre que a categoria dos conjuntos finitos e aplicações é cartesiana fechada.

2. Um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ diz-se uma álgebra de Boole se:

   - tiver ínfimos e supremos finitos,
   - $\wedge$ for distributiva em relação a $\vee$
     (isto é: $(\forall x, y, z \in X)\ \ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$), e
   - todo o elemento x de X tiver complemento $\neg x$ em X
     (isto é: $x \wedge \neg x = 0$ e $x \vee \neg x = 1$).

   Mostre que, se $(X, \leq)$ é uma álgebra de Boole, então a categoria $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ é cartesiana fechada.

3. Se $(X, \leq)$ é uma cadeia com elemento máximo 1, então $\mathcal{C}_{(X,\leq)}$ é uma categoria cartesiana fechada, sendo
$$q^p := \begin{cases} 1 & \text{se } p \leq q \\ q & \text{se } q < p. \end{cases}$$

4. Mostre que, se $\mathcal{C}$ é uma categoria cartesiana fechada e A e B são objectos de $\mathcal{C}$, existe uma bijecção entre os conjuntos $\mathcal{C}(A, B)$ e $\mathcal{C}(1, B^A)$.

   (Aos elementos de $\mathcal{C}(1, X)$ chama-se pontos de X.)

17 Topos

17.1 Definição.

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria com objecto terminal 1, chamamos classificador de subobjectos de $\mathcal{C}$ a um par $(\Omega, \top : 1 \to \Omega)$, onde Ω é um objecto de $\mathcal{C}$ e $\top : 1 \to \Omega$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, tal que:

> Para cada monomorfismo $f : A \to B$, existe um e um só morfismo $\chi_f : B \to \Omega$ tal que o diagrama seguinte
>
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$
>
> é um produto fibrado.

(A χ_f é usual chamar morfismo característico – ou carácter – de f.)

17.2 Exercícios.

1. Mostre que um classificador de subobjectos, se existir, é único a menos de isomorfismo.

2. Prove que, se a categoria $\mathcal{C}$ tem classificador de subobjectos e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ são monomorfismos em $\mathcal{C}$, então: $f \cong g \;\Leftrightarrow\; \chi_f = \chi_g$.

17.3 Definição.

Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se um topos (elementar) se

(a) $\mathcal{C}$ é finitamente completa;

(b) $\mathcal{C}$ é finitamente cocompleta;

(c) $\mathcal{C}$ é cartesiana fechada;

(d) $\mathcal{C}$ tem classificador de subobjectos.

17.4 Observação.

Na definição anterior a condição (b) é consequência de (a), (c) e (d).

17.5 Exemplos.

1. $\mathcal{C}onj$.

2. A categoria dos conjuntos finitos e aplicações.

3. $\mathcal{C}onj \times \mathcal{C}onj$.

4. $\mathcal{C}onj \downarrow \mathcal{C}onj$.

5. $\mathcal{C}onj \downarrow I$, qualquer que seja o conjunto I.

6. A categoria M-$\mathcal{C}onj$ das acções de um monóide M sobre conjuntos e funções equivariantes.

17.6 Proposição.

Seja $\mathcal{C}$ um topos.

1. Todo o monomorfismo em $\mathcal{C}$ é um igualizador.
2. Em $\mathcal{C}$, um morfismo é um isomorfismo se e só se é monomorfismo e epimorfismo.

17.7 Teorema.

Num topos todo o morfismo tem uma factorização (epi,mono) essencialmente única; isto é,

1. para cada morfismo $f : X \to Y$ existem um epimorfismo $e : X \to M$ e um monomorfismo $m : M \to Y$ tais que $f = m \circ e$;
2. se $f = m \circ e = m' \circ e'$, com m, m' monomorfismos e e, e' epimorfismos, então existe um isomorfismo $h : M \to M'$ tal que $m' \circ h = m$ e $h \circ e = e'$.

17.8 Observação.

Na prova deste teorema usamos o seguinte Teorema, que não provaremos neste curso:

Teorema. Se $\mathcal{C}$ é um topos e A é um objecto de $\mathcal{C}$, então $\mathcal{C} \downarrow A$ é um topos.

17.9 Corolário.

Num topos todo o epimorfismo é um co-igualizador.

17.10 Exercício.

Mostre que, num topos, se no diagrama comutativo seguinte e é um epimorfismo e m é um monomorfismo,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "e"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

então existe um único morfismo $d : V \to X$ tal que $m \circ d = v$ e $d \circ e = u$.

17.11 Proposição.

Em todo o topos não degenerado (isto é, com $0 \not\cong 1$), com classificador de subobjectos $(\top : 1 \to \Omega)$, o objecto Ω tem pelo menos dois pontos:

- o morfismo "verdade" $\top : 1 \to \Omega$,
- o morfismo "falsidade" $\perp : 1 \to \Omega$, que é o morfismo característico do monomorfismo $0 \to 1$.

17.12 Exercício.

Seja $\mathcal{C}$ um topos. Os pontos de Ω chamam-se valores de verdade do topos $\mathcal{C}$.

Indique os valores de verdade dos seguintes topos:

1. $\mathcal{C}onj \times \mathcal{C}onj$;
2. $\mathcal{C}onj \downarrow \mathcal{C}onj$;
3. $\mathcal{C}onj \downarrow I$ (onde I é um conjunto);
4. M-$\mathcal{C}onj$.

17.13 Definição.

Um objecto de números naturais num topos é um diagrama

$$1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$$

tal que, para qualquer outro diagrama do mesmo tipo

$$1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{u} X$$

existe um único morfismo $f : N \to X$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "o"] \arrow[dr, "x"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

comuta.

17.14 Proposição.

Se

$$1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$$

é um objecto de números naturais num topos, então:

1. $1 \xrightarrow{o} N \xleftarrow{s} N$ é um diagrama de coproduto.
2. $N \underset{1_N}{\overset{s}{\rightrightarrows}} N \longrightarrow 1$ é um diagrama de co-igualizador.

17.15 Teorema.

As propriedades 1. e 2. da Proposição anterior caracterizam o objecto de números naturais num topos.

17.16 Teorema.

Se existir num topos um objecto X tal que $X \cong X \coprod 1$, então existe objecto de números naturais.

17.17 Exercícios.

Verifique se existem objectos de números naturais nos topos estudados anteriormente.

18 Categorias Abelianas

18.1 Definições.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objecto zero. Para cada par de objectos A e B de $\mathcal{C}$, chama-se morfismo zero, de A em B, ao morfismo $A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$. Definimos *núcleo* do morfismo $f : A \to B$ como o igualizador de f e do morfismo zero; designamo-lo por ker$f$. De modo dual define-se conúcleo.

18.2 Exemplos

1. Na categoria $\mathcal{C}onj_*$ dos conjuntos pontuados, e na categoria $\mathcal{A}b$ dos grupos abelianos, todo o monomorfismo é um núcleo. Em $\mathcal{C}onj_*$ nem todo o epimorfismo é um conúcleo.
2. Na categoria $\mathcal{T}op_*$ dos espaços topológicos pontuados, e na categoria $\mathcal{G}rp$ dos grupos, nem todo o monomorfismo é um núcleo.

18.3 Observação.

Suponhamos que a categoria $\mathcal{C}$ tem objecto zero, núcleos e conúcleos. Para cada objecto C de $\mathcal{C}$ consideramos

$$P^C = \{f \mid \mathrm{cod} f = C\}/\sim \;\text{ e } Q_C = \{f \mid \mathrm{dom} f = C\}/\sim,$$

onde as relações de equivalência $\sim$ são definidas por $f \sim g$ se e só se $f \leq g$ e $g \leq f$, e a relação de pré-ordem $\leq$ é a seguinte: dados f, g, ambos com codomínio C, ou ambos com domínio C, $f \leq g$ se f se factoriza através de g. Então $(P^C, \leq)$ e $(Q_C, \leq)$ são parcialmente ordenados (podendo ser classes próprias), e as funções $u \mapsto \ker u$ e $f \mapsto \mathrm{coker} f$ definem functores adjuntos

$$\begin{tikzcd} Q^C \arrow[r, shift right, "\ker"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & P_C^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\mathrm{coker}"'] \end{tikzcd}.$$

(omitiremos a referência a classes de equivalência desde que isso seja claro do contexto). Isto é,

$$f \leq \ker u \iff u \leq \mathrm{coker} f.$$

18.4 Exercício.

Prove que, para todo o $u \in Q^C$ e todo o $f \in P_C$,

$$\ker(\mathrm{coker}(\ker u)) = \ker u \text{ e } \mathrm{coker}(\ker(\mathrm{coker} f)) = \mathrm{coker} f.$$

Conclua que todo o núcleo é núcleo do seu conúcleo e todo o conúcleo é conúcleo do seu núcleo.

18.5 Proposição.

Se $\mathcal{C}$ tem objecto zero, núcleos e conúcleos, então todo o morfismo $f : A \to B$ se factoriza através de $m := \ker(\mathrm{coker} f)$; isto é, existe q tal que $f = m \circ q$. Esta factorização tem a seguinte propriedade: se $f = m' \circ q'$, com m' núcleo, então existe um único morfismo t que torna o diagrama seguinte comutativo:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & \cdot \arrow[d, "m=\ker(\mathrm{coker} f)"] \arrow[dl, dotted, "t"'] \\ \cdot \arrow[r, "m'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Se, além disso, $\mathcal{C}$ tiver igualizadores e todo o monomorfismo em $\mathcal{C}$ for um núcleo, então q é um epimorfismo.

18.6 Definição.

Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se enriquecida em $\mathcal{A}b$ (ou $\mathcal{A}b$-categoria) se todo o conjunto de morfismos $\mathcal{C}(A, B)$ tiver uma estrutura de grupo abeliano compatível com a lei de composição, isto é, tal que a composição de morfismos é bilinear:

$$(\forall f, f' \in \mathcal{C}(A, B))\ (\forall g, g' \in \mathcal{C}(B, C))\ (g + g') \circ (f + f') = (g \circ f) + (g \circ f') + (g' \circ f) + (g' \circ f').$$

18.7 Exercício.

Prove que, se C é um objecto numa $\mathcal{A}b$-categoria, então as seguintes condições são equivalentes:

(i) C é inicial;

(ii) C é terminal;

(iii) 1_C é o morfismo zero;

(iv) $\mathcal{C}(C, C)$ é o grupo trivial.

18.8 Definição.

Um diagrama de biproduto dos objectos A, B da categoria $\mathcal{A}b$-enriquecida $\mathcal{C}$ é um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_1"'] & C \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[r, shift left, "p_2"] & B \arrow[l, shift left, "i_2"] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

tal que $p_1 \circ i_1 = 1_A$, $p_2 \circ i_2 = 1_B$ e $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1_C$.

18.9 Exercício.

Prove que, se o diagrama (1) é um biproduto, então $p_1 \circ i_2 = 0$ e $p_2 \circ i_1 = 0$.

18.10 Teorema.

Numa $\mathcal{A}b$-categoria dois objectos têm produto se e só se têm biproduto. Em particular, dado o diagrama de biproduto (1), $A \xleftarrow{p_1} C \xrightarrow{p_2} B$ é o produto de A e B, enquanto que, dualmente, $A \xrightarrow{i_1} C \xleftarrow{i_2} B$ é um coproduto. Em particular, existe o produto de A e B se e só se existe o seu coproduto.

18.11 Definição.

Uma $\mathcal{A}b$-categoria diz-se aditiva se tiver objecto zero e biprodutos.

18.12 Definição.

Numa categoria aditiva podemos definir um functor (produto tensorial):

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd} (A,B) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,g)}"'] & A \oplus B \arrow[d, "f \oplus g"] \\ (A',B') \arrow[r, mapsto] & A' \oplus B' \end{tikzcd}$$

onde $A \oplus B$ é o (objecto do) biproduto de A e B, e $f \oplus g$ pode ser definido como $f \times g$ ou $f + g$, à custa da propriedade universal de $A \oplus B$ como produto e coproduto de A e B, respectivamente.

18.13 Exercício.

Prove que $f \times g = f + g$, na definição dada acima.

18.14 Proposição.

Se $f, f' : A \to B$ são morfismos numa categoria aditiva $\mathcal{C}$, então:

$$(A \xrightarrow{f+f'} B) = (A \xrightarrow{\Delta_A} A \oplus A \xrightarrow{f \oplus f'} B \oplus B \xrightarrow{\nabla_B} B)\ ,$$

onde $\Delta_A : A \to A \times A$ é o morfismo $\langle 1_A, 1_A \rangle$ e $\nabla_B : B + B \to B$ é o morfismo $[1_B, 1_B] : B + B \to B$.

18.15 Exercício.

Demonstre a Proposição anterior.

18.16 Definição.

Um functor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, entre duas categorias enriquecidas em $\mathcal{A}b$, diz-se um functor aditivo se preservar a soma de morfismos, isto é, para $f, f' : A \to B$ em $\mathcal{A}$, $T(f + f') = T(f) + T(f')$.

18.17 Proposição.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ forem categorias aditivas, então um functor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é aditivo se e só se preserva biprodutos.

18.18 Definição.

Uma $\mathcal{A}b$-categoria diz-se abeliana se:

(1) tiver objecto zero;

(2) tiver biprodutos;

(3) tiver núcleos e conúcleos;

(4) todo o monomorfismo for o núcleo e todo o epimorfismo for um conúcleo.

18.19 Observações.

(a) Atendendo ao Exercício 18.7, em (1) basta exigir a existência de objecto terminal.

(b) Atendendo ao Teorema 18.10, em (2) basta exigir a existência de produtos, ou de coprodutos.

(c) O conceito de categoria abeliana é auto-dual; isto é, uma categoria $\mathcal{C}$ é abeliana se e só se $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ o é.

(d) Se substituirmos (2) por

(2') tiver produtos e coprodutos binários;

não precisamos de impôr à partida que a categoria seja $\mathcal{A}b$-enriquecida. Pode definir-se a adição de morfismos como indicado na Proposição 18.14 [prova não trivial, que omitiremos neste curso].

18.20 Lema.

Toda a categoria abeliana é finitamente completa.

18.21 Exercício.

Prove que, se $\mathcal{A}$ é uma categoria pequena e $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana, então a categoria $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ é abeliana.

18.22 Proposição.

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana, então todo o morfismo f tem uma factorização $f = m \circ e$, com m monomorfismo e e epimorfismo, sendo $m = \ker(\mathrm{coker} f)$ e $e = \mathrm{coker}(\ker f)$. Além disso, se $g = m' \circ e'$ é uma factorização do mesmo tipo e o diagrama

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & {} \arrow[d, "k"] \\ {} \arrow[r, "f"] & {} \end{tikzcd}$$

comuta, então existe um único morfismo t que torna o diagrama seguinte comutativo:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "t"] & \cdot \arrow[d, "k"] \\ \cdot \arrow[r, "e"] & \cdot \arrow[r, "m"] & \cdot \end{tikzcd}$$

Designamos esta factorização de f, que é única a menos de isomorfismo, por $f = \mathrm{im}f \circ \mathrm{coim}f$, sendo $m = \ker(\mathrm{coker}f) = \mathrm{im}f$ e $e = \mathrm{coker}(\ker f) = \mathrm{coim}f$.

18.23 Definição.

Um par componível de morfismos $\xrightarrow{f} B \xrightarrow{g}$ diz-se exacto em B se $\mathrm{im}f \cong \ker g$, ou, equivalentemente, $\mathrm{coker}f \cong \mathrm{coim}g$.

18.24 Exercício.

Prove que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ é exacto em A, B e C se e só se $f = \ker g$ e $g = \mathrm{coker}f$.

18.25 Definições.

1. Um diagrama $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ diz-se uma sucessão exacta curta se for exacto em A, B e C; isto é, $f = \ker g$ e $g = \mathrm{coker}f$.

2. Diz-se que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ é uma sucessão exacta curta à esquerda se $f = \ker g$, isto é, se for exacta em A e B.

3. Diz-se que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ é uma sucessão exacta curta à direita se $g = \mathrm{coker}f$, isto é, se for exacta em B e C.

18.26 Definição.

Um functor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre duas categorias abelianas diz-se exacto se preservar limites finitos e colimites finitos. Diz-se exacto à esquerda se preservar limites finitos.

18.27 Teorema.

As seguintes condições são equivalentes, para um functor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre categorias abelianas:

(i) T é exacto;

(ii) T é aditivo e preserva núcleos e conúcleos;

(iii) T é aditivo e preserva sucessões exactas curtas à esquerda e à direita.

18.28 Definição.

Numa categoria abeliana $\mathcal{C}$, um complexo (em cadeia) é uma sucessão de morfismos componíveis

$$C = (\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots)$$

Define-se a homologia do complexo C por:

$$H_n(C) = \ker(\partial_n)/\mathrm{im}\partial_{n+1}.$$

(Não vamos estudar homologia aqui; fica apenas a nota de que é possível estudar homologia em categorias abelianas em geral.)

18.29 Short Five Lemma: O Lema dos Cinco para Sucessões Exactas Curtas.

Num diagrama comutativo numa categoria abeliana

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "m'"] & B' \arrow[r, "e'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são sucessões exactas,

(1) se f e h são monomorfismos, então g é um monomorfismo;

(2) dualmente, se f e h são epimorfismos, então g é um epimorfismo;

(3) logo, se f e h são isomorfismos, então g é um isomorfismo.

18.30 Proposição.

Numa categoria abeliana, consideremos um diagrama de produto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

1. Se f for um epimorfismo, então também f' é um epimorfismo.

2. Além disso, $\ker f = g' \cdot \ker f'$.