Vimos que, se $R(x_0, x_1)$, as classes de equivalência $\hat{x}_0$ e $\hat{x}_1$ coincidem. Vejamos agora que, se $\sim R(x_0, x_1)$, as mesmas classes são disjuntas, isto é, $\hat{x}_0 \cap \hat{x}_1 = 0$. Porque, se existisse $x_2 \in \hat{x}_0 \cap \hat{x}_1$ verificar-se-iam $R(x_0, x_2)$ e $R(x_1, x_2)$, donde, por 2), $R(x_2, x_1)$ e, por 3), $R(x_0, x_1)$, contradição.

Exemplo:
No conjunto
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
"$x - y$ é múltiplo de 3" é uma relação de equivalência, visto que

$\forall_x\; x - x$ é múltiplo de 3
$\forall_x \forall_y\, (x - y$ múltiplo de $3 \Rightarrow y - x$ múltiplo de 3)
$\forall_x \forall_y \forall_z\, (x - y$ múltiplo de $3 \wedge y - z$ múltiplo de $3 \Rightarrow x - z$ múltiplo de 3)

As classes de equivalência são:

$$\hat{1} = \hat{4} = \{1, 4\}$$

$$\hat{2} = \hat{5} = \{2, 5\}$$

$$\hat{3} = \{3\}$$

Como se vê neste exemplo, e também de um modo geral, uma relação R de equivalência definida no conjunto X efectua uma decomposição de X em subconjuntos (as classes de equivalência) dois a dois sem elementos comuns.

Reciprocamente, seja dada uma decomposição de X em subconjuntos A_i:
$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$
com
$$\forall_{i \in I} \forall_{j \in I}\, (i \neq j \Rightarrow A_i \bigcap A_j = 0)$$
A relação $R(x, y)$ definida por $\exists_{i \in I}\, (x \in A_i \wedge y \in A_i)$, isto é, x e y satisfazem R sse ambos pertencem a um mesmo dos conjuntos A_i, é uma relação de equivalência.

Demonstremos, por exemplo, que R é transitiva. Suponhamos que $R(x, y)$ e $R(y, z)$, isto é,
$$\exists_{i \in I}\, (x \in A_i \wedge y \in A_i)$$
e
$$\exists_{j \in I}\, (y \in A_j \wedge z \in A_j)$$
Como
$$y \in A_i \cap A_j,\ A_i \cap A_j \neq 0,\ \text{donde } i = j$$
(porque $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = 0$) de modo que $z \in A_i$ e $\exists_i (x \in A_i \wedge z \in A_i)$, isto é, $R(x, z)$.

Dado um conjunto, X, e uma relação de equivalência, R, definida em X, fica então definido o conjunto das respectivas classes de equivalência, que se chama conjunto quociente de X pela relação R e se escreve X/R ou $\dfrac{X}{R}$.

Capítulo 2

Noções de Teoria dos Conjuntos

2.1 A noção de conjunto

Como se disse, sempre que se usa uma variável supõe-se que ela pode ser substituída por certos valores. A noção de variável é, pois, inseparável da totalidade das entidades que representa. Não é possível reduzir esta noção a noções mais simples; quando muito, em vez de "totalidade", podem empregar-se sinónimos: "colecção" ou, mais habitualmente, "conjunto". Pensamos num conjunto quando pensamos colectivamente em certas entidades e cada uma delas é elemento desse conjunto.

Por exemplo: o conjunto das pessoas que estão nesta sala, o dos números naturais, $1, 2, 3, \ldots$, que habitualmente se representa por $\mathbb{N}$, o dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, e o dos números racionais, $\mathbb{Q}$, (números cujas propriedades supomos conhecidas), o conjunto dos pontos de uma recta, o das letras do alfabeto português, etc.

Para indicar que a é elemento do conjunto C escreve-se $a \in C$ "a pertence a C; $b \notin C$ significa $\sim (b \in C)$ "b não pertence a C".

Sendo x variável que admita como valores todos os elementos de C e possivelmente outros, $x \in C$ é uma f.p. que se torna proposição verdadeira quando x é elemento de C e só nesse caso.

A recíproca, isto é, que a cada expressão proposicional $A(x)$ corresponde um conjunto, não se pode afirmar sem certas restrições de ordem lógica de que não nos podemos ocupar aqui. Mas convém dar um exemplo das dificuldades que podem surgir (paradoxo de RUSSELL-ZERMELO)[1].

Representemos por $\{x : A(x)\}$ o conjunto formado por todos os valores de x que verificam $A(x)$ (e só esses).

Suponhamos que $A(x)$ é $x \notin x$ e que os valores da variável x são todos os conjuntos possíveis. Então, $x \notin x$ significa que x não é elemento de si próprio (o que se verifica por exemplo para o conjunto $\mathbb{N}$ pois o conjunto dos números naturais não é um número natural). Seja C o conjunto formado por todos os conjuntos que satisfazem $x \notin x$, isto

[0]Lições de Cálculo Infinitesimal, de Renato Pereira Coelho.

[1]Ernst ZERMELO (1871 - 1956), alemão, a quem se deve a teoria axiomática dos conjuntos e em particular o chamado axioma de escolha, de que adiante falaremos. Bertrand RUSSELL, nascido em 1872 e morto há poucos anos, inglês que se dedicou de 1902 a 1919 à lógica matemática e depois a diversas questões.

é, seja

$$C = \{x : x \notin x\}$$

Pode então perguntar-se se $C \in C$ ou se $C \notin C$. Mas, se fosse $C \in C$, C seria um dos elementos do conjunto C, logo satisfaria $x \notin x$, logo teríamos $C \notin C$; contradição. Analogamente, se $C \notin C$, C não satisfaria $x \notin x$, logo teríamos $C \in C$.

Têm-se construído diversas teorias que permitem eliminar este e outros paradoxos da teoria dos conjuntos – sem garantia aliás de que outros não possam surgir. Neste curso apenas podemos tomar a precaução de não usar nenhuma variável, x, sem supor previamente conhecido o conjunto de todos os seus valores possíveis (o conjunto percorrido por x), que será geralmente um conjunto bastante elementar, e confiar em que não apareçam contradições. De um modo geral, em cada teoria matemática supõe-se que as variáveis só podem tomar valores em certo conjunto universal, U, que abrange todas as entidades que nessa teoria é necessário considerar. Aliás, o significado de $\{x : A(x)\}$ depende do da variável x, isto é, do conjunto percorrido por x. Assim, por exemplo, conforme x designe um número real ou complexo, assim o conjunto $\{x : x^4 = 1\}$ tem como elementos os números -1 e 1 ou os números -1, 1, i e $-i$.

Quando um conjunto é indicado por uma notação como $\{x : A(x)\}$, diz-se que está definido em compreensão.

Se um conjunto tem poucos elementos, também pode ser definido em extensão escrevendo os seus elementos um a um, por qualquer ordem, entre chavetas e separados por vírgulas. Por exemplo, os dois conjuntos acima indicados são

$$\{1, -1\} \quad \text{e} \quad \{1, -1, i, -i\}.$$

2.2 Operações sobre conjuntos

Consideremos dois conjuntos, A e B, e as respectivas f.p., $x \in A$ e $x \in B$.

Combinando-se por operações do cálculo proposicional, obtemos novas f.p., a que corresponderão novos conjuntos.

Interessam-nos três casos:

$\{x :\sim x \in A\}$, conjunto complementar de A que se escreve $\backslash A$[2];

$\{x : x \in A \wedge x \in B\}$, intersecção ou produto lógico, ou parte comum de A e B, que se escreve $A \cap B$;

$\{x : x \in A \vee x \in B\}$, reunião ou soma lógica de A e B, $A \cup B$.

Exemplos: sendo

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, e, i, o, u\},$$

$A \cap B$ é o conjunto $\{a\}$, com um só elemento e $A \cup B$ é o conjunto $\{a, b, c, e, i, o, u\}$.

$\backslash A$ é o conjunto constituído por todas as entidades do conjunto universal, excepto as que são designadas por a, b e c. O complementar de U, $\backslash U$, é um conjunto sem elemento nenhum, o conjunto vazio , que se escreve $\emptyset$ (ou 0, ou $\Box$) e que pode aparecer

[2] Por vezes usam-se outras notações menos convenientes: $\sim A, \overline{A}, C\,A$.

Capítulo 3

Relação de Equivalência e Ordem

3.1 Relações de equivalência e abstracções

Uma relação binária $R(x, y)$ em que tanto x como y percorrem certo conjunto, X, diz-se relação de equivalência se tem as seguintes propriedades:

1) $\forall_x\, R(x, x)$ – propriedade reflexiva

2) $\forall_x \forall_y\, [R(x, y) \Rightarrow R(y, x)]$ – propriedade simétrica

3) $\forall_x \forall_y \forall_z\, [R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)]$ – propriedade transitiva

Por exemplo, sendo X o conjunto das rectas do plano, $x, y, \ldots$, a relação "x é paralela a y" é relação de equivalência (se se convencionar que cada recta é paralela a si própria); sendo X o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, a relação "x é aproximadamente igual a y a menos de $0,001$" não é relação de equivalência porque não satisfaz 3). As relações de equivalência intervêm no processo mental de abstracção do modo seguinte: por vezes, sabemos reconhecer se dois objectos, x e y, têm ou não certa analogia ainda que não saibamos definir a característica comum que os torna análogos, mas, se a relação $R(x, y)$ que traduz essa analogia entre x e y for uma relação de equivalência, dado um objecto, x_0, o conjunto $\{x : R(x_0, x)\}$ que representaremos por $\hat{x}_0$ e se chama a classe de equivalência definida por R e x_0 e o conjunto $\hat{x}_1 = \{x : R(x_1, x)\}$ em que x_1 satisfaz $R(x_0, x_1)$ – isto é, em que x_1 é análogo a x_0 – são iguais em virtude de 2) e 3). Deste modo, a propriedade de pertencer a esta classe de equivalência não depende especificamente de x_0, podendo ser definida por qualquer outro elemento, x_1, da mesma classe. Abstraimos assim um conceito novo, a propriedade comum a x_0 e aos objectos análogos (segundo R). Por exemplo, como a relação de paralelismo entre rectas do plano é uma equivalência, todas as paralelas a certa recta x_0 têm uma propriedade comum, que se chama a direcção definida por x_0 (ou por qualquer destas paralelas). Pelo contrário, com a relação de igualdade aproximada a menos de $0,001$, as coisas passam-se diferentemente: por exemplo, o n.° $2,4006$ tem a propriedade de diferir de $2,4$ menos de $0,001$ mas a propriedade de diferir de $2,4006$ menos de $0,001$ já é outra ($2,3992$ tem a primeira propriedade mas não a segunda).

[0] Lições de Cálculo Infinitesimal, de Renato Pereira Coelho.

em numerosos casos, por exemplo, como $\{a,b,c\} \cap \{d,e\}$ ou como $\{x : x$ é inteiro $\wedge\, x^2 = -1\}$.

A implicação e a equivalência interessam-nos quando são formais; as expressões

a) $\forall_x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

e

b) $\forall_x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

são proposições que afirmam que os conjuntos A e B satisfazem certas relações. A primeira escreve-se $A \subseteq B$ (ou $A \subset B$) e significa, como a expressão a) indica, que todo o elemento de A é também elemento de B; a segunda escreve-se $A = B$ e significa que os elementos de A são precisamente os mesmos de B.

Estas relações chamam-se, respectivamente, "inclusão" e "igualdade" de conjuntos e lêem-se "A está contido em B" (ou "A é parte de B" ou "A é subconjunto de B"[3], podendo ainda escrever-se $B \supseteq A$ e ler-se "B contém A") e "A é igual a B", quer dizer, consideram-se iguais dois conjuntos, mesmo definidos por f.p. diferentes, se tiverem exactamente os mesmos elementos.

As operações $\backslash$, $\cap$ e $\cup$ sobre conjuntos têm propriedades que vamos estudar sumariamente.

Em geral, dados vários conjuntos $A, B, C, \ldots$, e construídas várias expressões em que figuram algumas destas letras e sinais daquelas operações[4] (por exemplo, $A, B, \backslash A, \backslash B, A \cup B, A \cap C, B \cap C, \ldots$) tratar-se-á de provar que uma destas expressões é igual ou está contida noutra, eventualmente sob a hipótese de certas outras expressões serem também iguais ou satisfazerem as relações de inclusão.

Por exemplo, podemos querer provar que

$$A \subseteq A \cup B$$

$$A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cap C \subseteq B \cap C$$

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \backslash B \subseteq \backslash A, \quad \text{etc .}$$

Todos os problemas deste tipo se podem reduzir a questões de cálculo das proposições ou dos predicados. Atendendo às definições das operações e relações entre conjuntos, trata-se de provar, respectivamente, que

$$\forall_x\,(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B),\ \text{isto é},\ \forall_x\,(x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B)$$

$$\forall_x\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow \forall_x\,(x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C)$$

$$\forall_x\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall_x\,(\sim x \in B \Rightarrow \sim x \in A)$$

[3] Chama-se "parte trivial de B" o conjunto vazio, "parte imprópria de B" o próprio B, "parte própria de B", qualquer que não seja imprópria. O conjunto das partes de A escreve-se $\mathcal{P}(A)$, ou $\mathcal{B}(A)$, ($\mathcal{B}$ é a inicial de BOOLE; ver nota da página **??**), ou 2^A.

[4] Quanto ao uso de parêntesis, convencionaremos que a ordem de prioridade é: $\backslash, \cap, \cup$.

Exemplifiquemos com a demonstração da segunda destas expressões (as equivalências reduzem-se, como se sabe, a duas implicações). Uma das expressões logicamente válidas que se indicaram no fim do capítulo anterior mostra que basta provar

$$\forall_x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow (x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C)];$$

basta, portanto, provar que a expressão dentro de parêntesis rectos é sempre V. Ora, nesta expressão só figuram símbolos do cálculo proposicional aplicados às proposições (mais propriamente, são f.p., mas, para cada valor fixo de x, são proposições) $x \in A$, $x \in B$ e $x \in C$, que representaremos por P, Q, R.

Basta, pois, ver que

$$P \Rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R \Rightarrow Q \wedge R)$$

é uma tautologia, o que é fácil, por construção de uma tabela de valores lógicos (com oito linhas).

Damos a seguir uma lista de propriedades importantes das operações e relações entre conjuntos, que se poderiam demonstrar pelo método acima indicado e também em muitos casos deduzir de outras expressões, já demonstradas, da mesma lista.

1. propriedades reflexiva e transitiva da inclusão:
   (a) $A \subseteq A$
   (b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
2. inclusões triviais:
   (a) $\emptyset \subseteq A$
   (b) $A \subseteq U$
3. a igualdade como dupla inclusão:
   (a) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
4. propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da igualdade:
   (a) $A = A$
   (b) $A = B \Rightarrow B = A$
   (c) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$
5. complementos triviais:
   (a) $\setminus\setminus A = A$
   (b) $\setminus\emptyset = U$
   (c) $\setminus U = \emptyset$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \setminus B \subseteq \setminus A$
7. idempotência, comutatividade e associatividade da intersecção:

6) Seja A_i uma família de partes de X e $f : X \to Y$. Então,

$$f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i) \quad \text{e} \quad f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$$

Em particular $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. A igualdade verifica-se se f é injectiva [12]; contraexemplo:

$$f : \{a_1, a_2\} \to \{b\}, \text{ com } A_1 = \{a_1\} \text{ e } A_2 = \{a_2\}, \text{ vindo}$$

$$f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \quad \text{e} \quad f(A_1) \cap f(A_2) = \{b\}.$$

7) Sendo B_i uma família de partes de Y e $f : X \to Y$,

$$f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i) \quad \text{e} \quad f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i).$$

Em particular, considerando as famílias $(A, X \setminus A)$ e $(B, Y \setminus B)$ com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, deduz-se que

8) $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$ e, se f é injectiva, $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.

Dada uma família $(A_i : i \in I)$ de conjuntos não vazios (cada um deles tem, portanto, pelo menos um elemento) e disjuntos 2 a 2, admite-se, geralmente, que é possível considerar um conjunto C constituído por um e um só elemento, x_i, de cada conjunto A_i. É o chamado axioma de ZERMELO, ou axioma de escolha. Os matemáticos da chamada escola intuicionista [13] apenas admitem a existência de C se for possível indicar efectivamente x como função de i, isto é, qual o x_i que $\in A_i \cap C$. Algumas vezes faremos notar que certas demonstrações utilizam este axioma, que, em símbolos lógicos, se poderia escrever

$$\forall_i \forall_j (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = 0) \wedge \forall_i A_i \neq 0 \Rightarrow (\exists_C (\forall_i \exists_x ! \ x \in A_i \cap C \wedge C \subseteq \bigcup_i A_i))$$

[12] E, se a igualdade se verifica para todas as famílias de partes de X, f é injectiva.
[13] Fundada por L.E.J. BROUWER (1881-1966), holandês.

($x_i = x_{i'}$; com $i \neq i'$) e se os mesmos elementos corresponderem aos valores do índice de dois modos diferentes, tratar-se-á de duas famílias distintas.

Por exemplo: – adoptando para funções $x : \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ a notação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – $(1, 3, 1) \neq (1, 1, 3)$ e $(1, 1, 3)$ não é o mesmo que $\{1, 1, 3\}$ porque, se alguma vez se usar esta última notação, é com o significado de $\{1, 3\}$.

Em particular, pode ser X um conjunto de conjuntos. Suponhamos que a variável que percorre X é designada por A. Teremos uma família de conjuntos $(A_i : i \in I)$ e poderemos definir as seguintes extensões das operações de $\cup$ e $\cap$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I}\ x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I}\ x \in A_i\}$$

para as quais se verificam certas propriedades análogas às das operações de reunião e intersecção de conjuntos [10].

1) $\forall_i\ A_i = A \Rightarrow \bigcap_i A_i = \bigcup_i A_i = A$

2) $\exists_i\ A_i = \emptyset \Rightarrow \bigcap_i A_i = \emptyset$; $\exists_i\ A_i = U \Rightarrow \bigcup_i A_i = U$

3) Sendo $p : J \to I$ sobrejectiva, $\bigcap_{j \in J} A_{p(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i$, e o mesmo para $\cup$.

Demonstração. Temos que provar $\forall_x (\forall_j\ x \in A_{p(j)} \Leftrightarrow \forall_i\ x \in A_i)$. Seja x qualquer que satisfaça $\forall_j\ x \in A_{p(j)}$; como p é sobrejectiva, qualquer que seja i, i é um $p(j)$ e x pertence ao correspondente $A_{p(j)}$, logo $x \in A_i$, logo $\forall_i\ x \in A_i$.

Reciprocamente, se $\forall_i\ x \in A_i$, qualquer que seja j, $p(j) \in I$, logo $x \in A_{p(j)}$, logo $\forall_j\ x \in A_{p(j)}$.

Ficou então provado que os conjuntos definidos pelas f.p. $\forall_j\ x \in A_{p(j)}$ e $\forall_i\ x \in A_i$ são iguais, isto é

$$\bigcap_{j \in J} A_{p(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

A demonstração para o caso de $\bigcup$ é semelhante. No caso particular de ser $J = I$ e p uma bijecção (p. permutação de I) esta propriedade traduz a comutatividade generalizada de $\cup$ e $\cap$ de conjuntos.

4) $\forall_i\ A_i \subseteq B_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i \wedge \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$

5) $J \subseteq I \Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i \wedge \bigcup_{i \in J} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ [11]

[10] $A_1 \cap A_2$ é caso particular de $\bigcap_{i \in I} A_i$; com $I = \{1, 2\}$; $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ sem parêntesis graças à propriedade associativa é outro caso particular, com $I = \{1, 2, 3\}$, etc.; facilmente se justificam estas afirmações.

[11] Costuma convencionar-se que $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = U$ e $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$.

(a) $A \cap A = A$
(b) $A \cap B = B \cap A$
(c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

8. intersecções triviais:

(a) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(b) $A \cap U = A$
(c) $A \cap \backslash A = \emptyset$

9. monotonia da $\cap$: $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

10. $A \cap B \subseteq A$

11. idempotência, comutatividade e associatividade da reunião:

(a) $A \cup A = A$
(b) $A \cup B = B \cup A$
(c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

12. reuniões triviais:

(a) $A \cup \emptyset = A$
(b) $A \cup U = U$
(c) $A \cup \backslash A = U$

13. monotonia da $\cup$: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

14. $A \subseteq A \cup B$

15. mútua[5] distributividade entre a reunião e a intersecção:

(a) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
(b) $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

16. dualidade entre a reunião e a intersecção por passagem aos complementares:

(a) $\backslash(A \cap B) = \backslash A \cup \backslash B$
(b) $\backslash(A \cup B) = \backslash A \cap \backslash B$.

Observações:

[5] Há, pois, esta diferença importante entre as operações $\cup$ e $\cap$ (soma e produtos lógicos) e a adição e multiplicação de números, em que só a segunda é distributiva em relação à primeira. Na disciplina de Sistemas Lógicos estudam-se álgebras em que se verifica esta dupla distributividade, chamadas Álgebras de BOOLE. A George BOOLE (1815-1864), inglês, e a DE MORGAN, se devem as primeiras matematizações da lógica (1847).

1. Convém não confundir os sinais $\in$ e $\subseteq$. O primeiro estabelece uma relação entre uma entidade e um conjunto a que pertence; o segundo, uma relação entre dois conjuntos. E distingue-se também entre um conjunto, $\{a\}$, com um só elemento, e esse elemento, a. De modo que se escreve $a \in \{a\}$ e $\{a\} \subseteq \{a\}$ mas não inversamente. Aliás, nada impede que os elementos de um conjunto sejam por sua vez conjuntos.

   Por exemplo, podemos falar de um conjunto de rectas, que por sua vez estamos considerando como conjunto de pontos. Mas o conjunto de todos os pontos pertencentes a essas rectas é uma entidade distinta do conjunto das rectas (os elementos deste conjunto, são rectas; os do outro, pontos). Do modo mesmo, é preciso distinguir entre

   $$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\} \text{ e } \{1,2,3\} \cup \{4,5\}, \text{ que é } = \{1,2,3,4,5\}$$

2. Dado um conjunto, A, passa a ter um sentido preciso a noção de variável que percorre A (isto é, cujos valores são todos os elementos de A e só esses). Isto permite simplificar as expressões dos tipos

   $$\forall_x [x \in A \Rightarrow B(x)] \text{ e } \exists_x [x \in A \wedge B(x)]$$

   que se poderão escrever $\forall_{x \in A} B(x)$ e $\exists_{x \in A} B(x)$, respectivamente. Por vezes até se omite a indicação de que x pertence a A se isso constar do contexto.

3. Além das operações acima referidas, também se considera a diferença de conjuntos, $A \setminus B$, definida por

   $$A \setminus B = A \cap \setminus B$$

   cujas propriedades se estabelecem facilmente a partir da definição. Não é necessário que $B \subseteq A$.

2.3 Produto cartesiano. Funções.

A noção de par (ordenado), (a,b), que já usámos em exemplos anteriores, difere da de conjunto com dois elementos, $\{a,b\}$ com $a \neq b$, por dois motivos:

1.°) Se $a \neq b$, $(a,b) \neq (b,a)$, ao passo que $\{a,b\}$ é sempre $= \{b,a\}$.

2.°) (a,a) é um par – em que acontece que são iguais ambos os elementos – mas $\{a,a\}$ não é um conjunto com dois elementos.

A noção de par não é independente da de conjunto, pois pode tomar-se como definição de (a,b) o conjunto

$$\{\{a\},\ \{a,b\}\}$$

Quer dizer: os conjuntos deste tipo têm todas as propriedades que nos interessa que os pares tenham. Por exemplo, com $a \neq b$, $(a,b) \neq (b,a)$ porque então $\{\{a\},\{a,b\}\} \neq$

Estes conjuntos podem ser vazios, por exemplo, se $B = \emptyset$ ou se $\sim \exists_x y = f(x)$. E há certa incoerência na notação $f^{-1}(y)$ que aqui representa um conjunto e, quando f é bijectiva, um elemento, x; mais propriamente devia escrever-se

$$f^{-1}(\{y\}).$$

Por vezes usam-se outras notações.

É fácil ver que, se $B \subseteq C \subseteq Y$, $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(C)$. Sendo $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, pode ver-se que $\forall_A\, A \subseteq f^{-1}[f(A)]$, verificando-se a igualdade destes conjuntos sse f é injectiva e que $\forall_B\, f[f^{-1}(B)] \subseteq B$, verificando-se a igualdade sse f é sobrejectiva.

Por exemplo, quanto às primeiras afirmações; se $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ por definição de $f(A)$, e por definição de f^{-1}, $x \in f^{-1}[f(A)]$.

Supondo agora f injectiva, se $x \in f^{-1}[f(A)]$, $f(x) \in f(A)$, isto é, $\exists_y (y \in f(A) \wedge y = f(x))$, e, como $y \in f(A)$, $\exists_{x'} (x' \in A \wedge f(x') = y)$, mas o facto de ser f injectiva implica $x = x'$, de modo que $x \in A$.

Finalmente, se $\forall_A\, f^{-1}[f(A)] = A$, isto verifica-se em particular para os conjuntos com um só elemento, como $\{x\}$, vindo

$$f^{-1}[f(\{x\})] = \{x\}.$$

Se $f(x) = f(x')$, vem

$$\begin{aligned} \{x\} &= f^{-1}[f(\{x\})] = f^{-1}[\{f(x)\}] = f^{-1}[\{f(x')\}] = \\ &= f^{-1}[f(\{x'\})] = \{x'\}, \end{aligned}$$

de modo que $x = x'$, isto é, f é injectiva.

2.4 Famílias. Famílias de conjuntos.

Consideram-se dois conjuntos, I e X, percorridos pelas variáveis i e x, respectivamente, e uma função de I para X que designaremos até pela própria letra x. O transformado de i será então $x(i)$, mas é costume neste caso usar-se outra notação, x_i. Trata-se apenas de uma mudança de notação, que se usa quando se pensa mais nos transformados, x_i, que na função, x. I chama-se neste caso o conjunto dos índices e a função x chama-se uma família de elementos de X (como esse conjunto, I, de índices) e indica-se por notações do tipo $(x_i : i \in I)$, que se devem distinguir de $\{x_i : i \in I\}$ como a seguir se explicará.

Já conhecíamos um caso particular de família. Sendo $I = \{1,2\}$, um par (x_1, x_2) de elementos de X é, no fundo, uma função que associa ao n.° 1 o elemento x_1 de X (primeiro elemento do par) e ao n.° 2 o elemento x_2 de X (segundo elemento do par).

A distinção entre a família $(x_i : i \in I)$ e o conjunto $\{x_i : i \in I\}$ é a mesma que se faz entre um par e um conjunto de dois elementos.

Na família não interessa só saber quais são os elementos x_i que a constituem mas também como correspondem aos diversos valores de i: pode aí haver elementos repetidos

O problema da existência de elementos neutralizadores da operação de produto é mais complicado. Diz-se que f é sobrejectiva, ou uma sobrejecção, se $f(X) = Y$ (o contradomínio coincide com o conjunto de chegada) e que é injectiva, ou uma injecção se nenhum elemento do conjunto de chegada é imagem de mais de um elemento do domínio, isto é, se, respectivamente:

a′) $\forall_y \, \exists_x \, R(x,y)$

b′) $\forall_y \forall_x \forall_{x'} \, [R(x,y) \wedge R(x',y) \Rightarrow x = x']$

(naturalmente agora, tratando-se de funções, pode escrever-se

$$\begin{array}{l} \forall_y \, \exists_x \, y = f(x) \\ \forall_y \forall_x \forall_{x'} \, (y = f(x) \wedge y = f(x') \Rightarrow x = x'). \end{array}$$

Se f é injectiva e sobrejectiva, diz-se que é bijectiva, ou uma bijecção ou uma correspondência biunívoca de X para Y. Neste caso, $\forall_y \, \exists_x ! \, R(x,y)$.

Neste caso, como a′) e b′) dizem o mesmo que a) e b), só com troca de x por y, a relação R define também x em função de y e esta função chama-se a inversa de f e representa-se por f^{-1}. É claro que o domínio de f^{-1} é Y e o seu conjunto de chegada (que agora coincide com o contradomínio), é X.

Também é fácil ver que $f^{-1} \circ f = i_X$ e $f \circ f^{-1} = i_Y$, o que justifica a designação de função inversa.

Enunciemos algumas propriedades simples das sobrejecções e injecções:

1) f e g são injectivas $\Rightarrow g \circ f$ é injectiva $\Rightarrow f$ é injectiva;

2) f e g são sobrejectivas $\Rightarrow g \circ f$ é sobrejectiva $\Rightarrow g$ é sobrejectiva;

3) A composição de bijecções e a inversa de uma bijecção são bijecções; deste modo, as bijecções: $A \to A$ formam um grupo.

4) Se $f : X \to Y$ é bijectiva e $A \subseteq X$, $f_{|A}$ é uma bijecção de A para $f(A)$.

Demonstremos, por exemplo, 2).

Sendo $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, se f é sobrejectiva, $f(X) = Y$, logo $g \circ f(X) = g[f(X)] = g(Y) = Z$, porque g é sobrejectiva. Logo, $g \circ f$ é sobrejectiva.

Suponhamos agora que g não era sobrejectiva (demonstração por absurdo). Então, $g(Y) \neq Z$; portanto,

$$\exists_{z_0} \, (z_0 \in Z \wedge z_0 \notin g(Y)).$$

Como $f(X) \subseteq Y$, $g \circ f(X) = g[f(X)] \subseteq g(Y)$ e portanto $z_0 \notin g \circ f(X)$. Logo, $g \circ f$ não seria sobrejectiva, contra a hipótese.

Mesmo quando $f : X \to Y$ não satisfaz a′) e b′) se emprega a notação f^{-1} nas seguintes condições:

$$f^{-1}(y) = \{x : y = f(x)\}$$

e, sendo $B \subseteq Y$

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

$\{\{b\}, \{b,a\}\}$. Outra propriedade importante, que também se pode demonstrar a partir da mesma definição, é que, dados dois pares (a,b) e (a',b')

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Consideremos agora uma relação binária, isto é, uma f.p. com duas variáves, $R(x,y)$, em que supomos que x percorre X e y percorre Y[6]. Como sabemos, esta relação é satisfeita por alguns pares (x,y) eventualmente todos ou nenhum.

O conjunto desses pares chama-se o gráfico da relação,

$$G = \{(x,y) : R(x,y)\}$$

Por exemplo, sendo $X = \{1,2\}$ e $Y = \{1,2,3\}$ e sendo $R(x,y)$ dada por $x + y = 4$,

$$G = \{(1,3),(2,2)\}$$

Se nenhum par (x,y) satisfaz R, $G = \emptyset$; se todos satisfazem, escreve-se $G = X \times Y$, conjunto que se chama produto cartesiano de X por Y. Por exemplo, com os conjuntos X e Y dados, $X \times Y = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3)\}$. A designação de cartesiano vem do processo de representação gráfica que se usa em geometria analítica. Supondo que os elementos de X e os de Y estão representados por certos pontos de duas rectas do plano, uma para cada conjunto, os elementos (x,y) de G ficam representados pelos pontos do plano cujas projecções nos dois eixos são os pontos correspondentes a x e y.

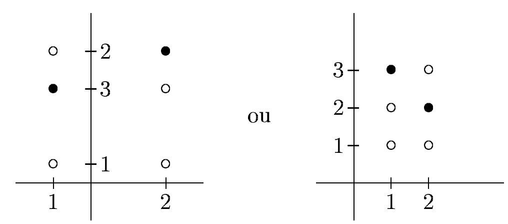


Fig. 1

Na figura 1, os elementos de G são os pontos representados pelos círculos negros e os de $X \times Y$, os representados pelos negros e pelos brancos.

Note-se que, como X e Y têm um número finito de elementos (e poucos) a correspondência entre os seus elementos e pontos de recta pode ser arbitrária.

Outro exemplo: sejam X e Y os próprios eixos, considerados como conjuntos de pontos, e seja G o conjunto dos pontos de uma circunferência.

Podem distinguir-se três espécies de elementos de X, conforme as paralelas ao eixo Y que passam por tais pontos não intersectam G, intersectam G em um ponto e um só ou intersectam G em mais de um ponto. São os casos de x_0, x_1 e x_2 (figura 2).

[6]Conjuntos que geralmente se supõem não vazios; mas não é obrigatório.

Pode exprimir-se esta distinção dizendo que x_0 não satisfaz, mas x_1 e x_2 satisfazem, a condição $\exists_y R(x,y)$ e que x_2 não satisfaz, mas x_1 satisfaz (e x_0 também), a condição $\forall_y \forall_{y'} [R(x,y) \wedge R(x,y') \Rightarrow y = y']$.

Pode, porém, acontecer, para certas relações, que só haja pontos do tipo x_1, isto é, que R satisfaça as duas condições

a) $\forall_x \exists_y R(x,y)$

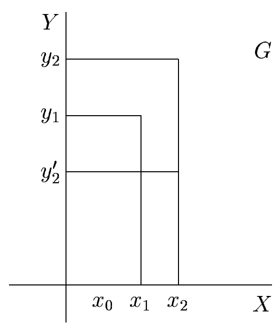


Fig. 2

b) $\forall_x \forall_y \forall_{y'} [R(x,y) \wedge R(x,y') \Rightarrow y = y']$

ou, de outro modo, a condição

$$\forall_x \exists_y! \; R(x,y)$$

Nestas condições, diz-se que $R(x,y)$ define uma função ou transformação, ou aplicação, de X para Y: para cada x de X há um único valor de y tal que $R(x,y)$ e este valor de y representa-se por uma notação do tipo $f(x)$, isto é,

$$\forall_x \forall_y [R(x,y) \Leftrightarrow y = f(x)].$$

O facto de f designar uma função de X para Y indica-se escrevendo $f : X \to Y$; X chama-se o domínio[7] de f e $f(x)$ o transformado ou imagem de x por f. Se $S(x,y)$ é outra relação e se $\forall_x \forall_y [R(x,y) \Leftrightarrow S(x,y)]$, os gráficos de R e S são iguais e também S define uma função, $g : X \to Y$, mas $\forall_x \forall_y [y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x)]$ de modo que $\forall_x f(x) = g(x)$. Toma-se esta propriedade como definição de igualdade de funções (ambas com o mesmo domínio) escrevendo-se então $f = g$.

Uma função pode então ser definida de muitos modos: ou explicitamente por equações do tipo $y = f(x)$, $y = g(x), \ldots$, em que as expressões designatórias $f(x)$, $g(x), \ldots$ (em que normalmente figurará x), podem ser diferentes (embora conduzam sempre aos mesmos valores) ou implicitamente por f.p., $R(x,y)$, $S(x,y), \ldots$ (equivalentes entre si), que não tenham aquela forma explícita.

Por exemplo, com $X = \{1,2\}$ e $Y = \{1,2,3\}$, $G = \{(1,3),(2,2)\}$ é o gráfico de uma função que pode ser definida por $x+y = 4$, por $[(x-1)^2+(y-3)^2]\times[(x-2)^2+(y-2)^2] = 0$,

[7]Se X for vazio, obtém-se em particular a função vazia, cujo gráfico é vazio.

por $y = 4 - x$, por $y = \sqrt[3]{(4-x)^3}$, etc. Pode indicar-se esta função indicando o seu domínio, $\{1,2\}$, o seu conjunto de chegada, $\{1,2,3\}$, e uma regra que permita passar de x para $f(x) : x \mapsto 4 - x$, $x \mapsto \sqrt[3]{(4-x)^3}$, etc.

Sendo $A \subseteq X$, representa-se por $f(A)$ [8] o conjunto $\{y : \exists_x x \in A \wedge y = f(x)\}$ ou, como abreviadamente se costuma escrever, $\{f(x) : x \in A\}$, que vem a ser o conjunto dos transformados, por f, dos elementos de A; em particular $f(X)$ chama-se o contradomínio de f. Em geral Y não é o contradomínio; é apenas o conjunto de chegada.

Sendo do mesmo modo $A \subseteq X$, $G \cap (A \times Y)$ é o gráfico de uma função, $h : A \to Y$, que se representa por $f_{|A}$ e se chama a restrição de f a A.

Também se diz que f é um prolongamento de h a X. Quando uma relação R satisfizer b) mas não a), sendo $X_0 = \{x : \exists_y R(x,y)\}$, $G \cap (X_0 \times Y)$ é já o gráfico de uma função, não de X para Y, mas de X_0 para Y. Quando R satisfizer a) mas não b) ainda por vezes se diz que define uma função não-unívoca (como no caso de $x - y^2 = 0$ que conduz a $y = \pm\sqrt{x}$), mas quando nada se disser, supõe-se que as funções de que se fala são unívocas.

Facilmente se demonstra que, se $A \subseteq B \subseteq X$, $f(A) \subseteq f(B)$.

Consideremos agora três variáveis, x, y e z que percorrem respectivamente os conjuntos X, Y e Z, e duas funções, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ [9].

Chama-se composta (ou produto) de g e f e representa-se por $g \circ f$ a função de X para Z definida por

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Esta operação de composição de funções não é comutativa, nem se põe em geral esse problema (só se $Z = X$). Mesmo quando é possível considerar $g \circ f$ e $f \circ g$, em geral trata-se de funções diferentes porque $g \circ f$ tem por domínio X e $f \circ g$ tem por domínio Y. Mas mesmo quando $X = Y = Z$ pode ser $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo:
$X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$, $g(y) = y + 1$. $g \circ f(x) = 2x + 1$, $f \circ g(x) = 2(x+1)$ e $f \circ g \neq g \circ f$ porque, por exemplo para $x = 1$, $f \circ g(x) = 4$ e $g \circ f(x) = 3$.

Pelo contrário, esta operação é associativa. Dados quatro conjuntos e três funções de acordo com o esquema $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$, tanto $h \circ (g \circ f)$ como $(h \circ g) \circ f$ são funções de X para T e, qualquer que seja x, $h \circ (g \circ f)(x) = h[g \circ f(x)] = h\{g[f(x)]\} = h \circ g[f(x)] = (h \circ g) \circ f(x)$, como era necessário provar.

Quanto a esta mesma operação, há funções que desempenham o papel de elementos neutros à direita ou à esquerda, mas não em relação a qualquer função, pois se $f : X \to Y$ e $i \circ f = f$ tem de ser $i : Y \to Y$. A função $i_Y : Y \to Y$ definida por $i_Y(y) = y$ chama-se a função identidade do conjunto Y e desempenha o papel de (único) elemento neutro à esquerda para qualquer função cujo conjunto de chegada seja Y e, analogamente, o papel de (único) elemento neutro à direita para qualquer função, g, cujo domínio seja $Y (g \circ i_Y = g)$.

Também facilmente se demonstra que sendo $A \subseteq X$, $g \circ f(A) = g[f(A)]$.

[8]Por vezes usam-se outras notações, como $f < A >$, para fazer notar que A não é elemento de X.
[9]Bastaria que o contradomínio de f estivesse contido no domínio de g, mas é costume, quando se fala de $g \circ f$, convencionar que o conjunto de chegada de f é o domínio de g.

de modo que f é injectiva. Inversamente, dados dois elementos de $f(X)$, $f(x)$ e $f(y)$, $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$ e o esquema anterior mostra que

$$f^{-1}[f(x)] = x \lessgtr y = f^{-1}[f(y)] \text{ conforme } f(x) \lessgtr f(y).$$

o) Num conjunto totalmente ordenado, X, dado um subconjunto, A,

$$s = \sup\ A \Leftrightarrow s \geq A \wedge \forall_x (x < s \Rightarrow \exists_{a \in A}\, x < a \leq s)$$

De facto, se $s = \sup\ A$, é $\geq A$ e sendo $x < s$, $\sim x \geq A$, logo $\exists_{a\in A} \sim x \geq a$.

Ora, sendo X totalmente ordenado,

$$\forall_x (\sim x \geq a \Leftrightarrow x < a)$$

de modo que [11] $\exists_{a\in A}\, x < a$ e $a \leq s$ por ser $s = \sup\ A$.

Reciprocamente $x < s \Rightarrow \exists_a x < a$ significa $x < s \Rightarrow \sim x \geq A$, donde $x \geq A \Rightarrow \sim x < s \Rightarrow x \geq s$. Logo, s é minorante de M_A, mas como $s \geq A$, $s \in M_A$ e é o sup A.

Analogamente, num conjunto totalmente ordenado

$$i = \inf\ A \Leftrightarrow i \leq A \wedge \forall_x (x > i \Rightarrow \exists_a x > a \geq i).$$

[11] De $\forall_x(\sim x \geq a \Leftrightarrow x < a)$ deduz-se sucessivamente $\forall_x(\sim\sim x \leq a \Leftrightarrow \sim x < a)$, e por 3) da pág. ??, $\forall_x \sim\sim x \geq a \Leftrightarrow \forall_x \sim x < a$, e finalmente $\sim \forall_x \sim\sim x \geq a \Leftrightarrow \sim \forall_x \sim x < a$, isto é, $\exists_x \sim x \geq a \Leftrightarrow \exists_x\, x < a$.

No exemplo supra,

$$\frac{X}{R} = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3\}\}.$$

Como a cada elemento x de X corresponde uma e uma só classe (porque duas classes distintas não têm elementos comuns), a classe $\hat{x}$, e como cada classe, $\hat{x}$, tem pelo menos um elemento (o próprio x), vê-se que a aplicação $x \mapsto \hat{x}$ é uma sobrejecção $X \to X/R$.

3.2 Cardinais

Um exemplo importante de conceito definido por uma relação de equivalência é o de número cardinal, ou cardinalidade ou potência de um conjunto; dados dois conjuntos X e Y diz-se que são equicardinais ou equipotentes ou têm o mesmo cardinal se existe uma bijecção de X para Y. A bijecção i_X e o facto de serem bijecções a inversa de uma bijecção e a composta de duas, mostram que esta relação entre X e Y é, de facto, uma equivalência e a correspondente noção é a de número cardinal [1].

Às diversas classes de equicardinalidade correspondem, assim, números cardinais [2]: à que é definida pelo conjunto vazio, $\emptyset$, (e que só possui esse conjunto) corresponde um cardinal a que se chama 0 (zero); à classe de equicardinalidade de que faz parte o conjunto $\{\emptyset\}$ (e todos os que lhe são equicardinais, como $\{a\}$, $\{24\}$, etc.) corresponde um cardinal a que se chama 1; chama-se 2 o cardinal do conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 3 o cardinal do conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e assim por diante, considerando de cada vez um conjunto cujos elementos são todos os conjuntos anteriores.

Ficam, assim definidos o zero e os números naturais e poderiam definir-se também, para estes números, as relações de desigualdade $(\leq, \geq, <, >)$ e as operações $(+, -, \times, :$, potenciação) que já conhecemos, e demonstrar, a partir dessas definições, as suas propriedades.

Em particular poderia demonstrar-se o princípio de boa ordem (em qualquer conjunto de números naturais há um que é o menor de todos) e o princípio de indução completa: se $P(n)$ é uma propriedade da variável natural n,

$$P(1) \wedge \forall_n [P(n) \Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow \forall_n\, P(n)$$

Os números naturais constituem um conjunto $\mathbb{N}$, cujo cardinal (chamado álefe-zero, $\aleph_0$) já não é um número natural, pois (num sentido intuitivamente evidente, mas que adiante se definirá), os primeiros são finitos e o segundo não.

Poderia ainda pensar-se que todos os conjuntos infinitos tinham o mesmo cardinal, mas não é verdade: alguns têm "mais elementos" que outros, se se definir esta noção do seguinte modo:

Dados dois conjuntos X e Y, diz-se que $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ se existe uma injecção $i : X \to Y$ (o que sucede, por exemplo, se $X \subseteq Y$). Se isto se verifica, i é também uma bijecção

[1] O cardinal do conjunto A representa-se aqui pela sua primitiva notação: $\overline{\overline{A}}$. Outras são Card A e $\#A$.

[2] A ideia de definir deste modo o número de elementos de um conjunto, que aparece por vezes atribuída a Russell, foi exposta já em 1884 pelo matemático alemão F.L.G. Frege (1848 - 1925) a quem se deve a fundamentação da aritmética na lógica.

$X \to i(X) \subseteq Y$ e, reciprocamente, se existe uma bijecção $b : X \to Y_1 \subseteq Y$, b é também uma injecção $b : X \to Y$. Em particular, se $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ existe uma bijecção $b : X \to Y$ e b^{-1} é também bijectiva: $Y \to X$, donde

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \Rightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$$

Podem então, em princípio, acontecer quatro casos:

$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$ (isto é, existem injecções $i : X \to Y$ e $j : Y \to X$)

$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \sim \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$

$\sim \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$

$\sim \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \sim \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$

É necessário recorrer agora a dois teoremas importantes da teoria dos conjuntos que não poderemos demonstrar aqui. O primeiro afirma que

$$\forall_X \forall_Y \, \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \vee \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}},$$

propriedade que, por vezes, se chama dicotómica (da relação $\leq$) ficando deste modo excluído o 4.° caso.

O outro teorema é o de Bernstein, e afirma que

$$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}} \Rightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

isto é, se existem injecções $i : X \to Y$ e $j : Y \to X$ existe uma bijecção $b : X \to Y$.

Deste modo, dados os cardinais de dois conjuntos quaisquer, X e Y, ou se está no primeiro caso e $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$, ou no segundo e diz-se então que $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$ porque é $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ mas não $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$, ou no terceiro e diz-se então, por motivos análogos, que $\overline{\overline{Y}} < \overline{\overline{X}}$. Este resultado constitui a propriedade tricotómica da desigualdade de cardinais.

Definamos agora conjunto finito e conjunto infinito.

Representando por $X^* \subset X$ o facto de ser $X^* \subseteq X$ mas $X^* \neq X$, o que se exprime também dizendo que X^* é parte própria de X, diz-se que X é finito se nenhuma parte própria de X é equicardinal a X (isto é, se não existe nenhuma bijecção $b : X \to X^* \subseteq X$).

Por exemplo, $\{a, b\}$ com $a \neq b$ é finito porque as suas partes próprias são $\emptyset$, $\{a\}$ e $\{b\}$, e facilmente se vê que nenhuma é equicardinal a $\{a, b\}$. Um conjunto que não é finito diz-se infinito e o seu cardinal chama-se transfinito. Um exemplo simples é o do conjunto $\mathbb{N}$ que é equicardinal a $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, pela bijecção $b(n) = n+1$, ou ao conjunto $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ dos quadrados dos números naturais [3]. Estes conjuntos e todos os que são equicardinais

[3] É o chamado paradoxo de Galileu: paradoxo, porque contradiz o axioma "a parte é menor que o todo" que vem já dos geómetras gregos, e de Galileu porque nos tempos modernos foi o astrónomo e físico florentino Galileu Galilei (1564 - 1642), bem conhecido protagonista da polémica em torno do heliocentrismo, quem chamou a atenção para este facto. Mas descobriu-se recentemente que já na primeira metade do séc. XIV se tinham ocupado do assunto dois autores, Henry of Harclay, em Oxford, e Gregorio da Rimini.

Como $s^2 \leq 4$, $\dfrac{s^2-2}{5} \leq \dfrac{2}{5} < s$ e $s - \dfrac{s^2-2}{5}$ é positivo.

Logo, $s - \dfrac{s^2-2}{5} \notin A$ e, se $q > s - \dfrac{s^2-2}{5}$ também $q > 0$ e $q^2 > 2$, donde $q \notin A$.

Então, $q \in A \Rightarrow q \leq s - \dfrac{s^2-2}{5}$ e $s - \dfrac{s^2-2}{5} \in M_A$ sendo $< s$, o que contradiz $s = \sup\ A$.

Finalmente, um conjunto parcialmente ordenado (X, R) diz-se totalmente ordenado ou linearmente ordenado se R satisfaz

4) $\forall_x \forall_y \, [R(x,y) \vee R(y,x)]$

não podendo, pois, existir em X elementos incomparáveis (tais que nem $x \leq y$ nem $y \leq x$).
O conjunto do exemplo 5.° não é linearmente ordenado. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são-no.

Se R satisfaz esta condição, a respectiva relação de ordem em sentido restrito, R', satisfaz a propriedade tricotómica:

$\forall_x \forall_y$ Verifica-se sempre uma e uma só das três condições seguintes:

$$R'(x,y), \ x = y, \ R'(y,x).$$

De facto, se $R(x,y) \vee R(y,x)$, há três casos possíveis:

$R(x,y) \wedge R(y,x)$, donde, por 2), $x = y$;

$R(x,y) \wedge \sim R(y,x)$, donde $R'(x,y)$, porque $\sim R(y,x)$ implica, em vista de 1), $x \neq y$; e analogamente, se $\sim R(x,y) \wedge R(y,x)$.

Em sentido inverso, se R' é tricotómica, a respectiva relação R satisfaz 1) e 2), como facilmente se vê, de modo que se pode caracterizar um conjunto totalmente ordenado por meio de uma relação de ordem (em sentido restrito) que seja, apenas, transitiva e tricotómica.

Algumas propriedades dos c.t.o.

m) Se $(X, \leq)$ é totalmente ordenado, é um reticulado.

Pois, dados a e b, se $a \leq b$, sup $\{a, b\} = b$ e inf $\{a, b\} = a$, e inversamente se $a \geq b$.

n) Uma aplicação, f, monótona em sentido restrito de um conjunto totalmente ordenado X num conjunto parcialmente ordenado, Y, é injectiva e a respectiva aplicação $f^{-1} : f(X) \to X$ é crescente em sentido restrito ou decrescente em sentido restrito conforme for f.

Supondo f crescente,

$$x \neq y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \text{ou} \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

20.°) Exemplo de um c.p.o. completo é $(\mathbb{Z}, \leq)$ pois se A é um conjunto de inteiros não vazio $(\exists_{n_1}\, n_1 \in A)$ e maiorado $(\exists_{n_2}\, A \leq n_2)$, como $n_1 \leq n_2$ e entre n_1 e n_2 há apenas um número finito de inteiros, pode verificar-se um a um se $\in A$ ou $\notin A$ e encontrar-se assim o maior dos elementos de A, que é o sup A.

21.°) Exemplo de um c.p.o. não completo é o exemplo 14.°, acima mencionado, por não existir sup A como logo se vê.

Há aqui, pois, uma lacuna entre A e $X \setminus A$ como a figura 6 sugere.

22.°) Outro exemplo de c.p.o. não completo é $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Seja $A = \{q : q > 0 \wedge q^2 < 2\}$. $1 \in A$, logo $A \neq 0$. $q \in A \Rightarrow q \leq 2$, pois $q > 2 \Rightarrow q^2 > 4$; logo $A \leq 2$.

Se existisse, em $\mathbb{Q}$, $s = \sup\ A$, teria de ser $1 \leq s \leq 2$.

Vejamos o valor de s^2.

Se $s^2 = 2$, seja $s = \dfrac{m}{n}$, irredutível.

Então $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2\,n^2$, m par, $m = 2\,p$, $4\,p^2 = 2\,n^2$, $2\,p^2 = n^2$ e n par contra a hipótese de ser $\dfrac{m}{n}$ irredutível.

Se $s^2 < 2$, como $s^2 \geq 1$, $0 < 2 - s^2 \leq 2 - 1 = 1$.

Então,

$$\begin{aligned}(s + \frac{2-s^2}{5})^2 &= s^2 + \frac{2}{5}\, s\,(2-s^2) + \frac{(2-s^2)^2}{25} \\ &\leq s^2 + \frac{4}{5}\,(2-s^2) + \frac{2-s^2}{25}\end{aligned}$$

(atendendo a que $s \leq 2$ e $2 - s^2 \leq 1$), donde

$$(s + \frac{2-s^2}{5})^2 = s^2 + \frac{21}{25}\,(2-s^2) < s^2 + (2-s^2) = 2.$$

O racional $s + \dfrac{2-s^2}{5} \in A$, não podendo s ser maiorante de A.

Se $s^2 > 2$, $0 \leq s^2 - 2$, e

$$\begin{aligned}(s - \frac{s^2-2}{5})^2 &= s^2 - \frac{2}{5}\, s\,(s^2-2) + \frac{(s^2-2)^2}{25} \\ &\geq s^2 - \frac{4}{5}\,(s^2-2)\end{aligned}$$

porque $s \leq 2$, vindo

$$(s - \frac{s^2-2}{5})^2 > s^2 - \frac{5}{5}\,(s^2-2) = 2.$$

a $\mathbb{N}$ chamam-se conjuntos numeráveis, isto é, que podem ser numerados usando apenas os números naturais e todos eles.

Não podemos desenvolver aqui a teoria dos números cardinais (finitos ou transfinitos) e das suas relações e operações mas vamos citar alguns resultados importantes demonstrando alguns.

a) A infinito $\Rightarrow \overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

Suponhamos que existe $b : A \to A^* \subset A$. $A \setminus A^*$ tem pelo menos um elemento, a_1. Seja $a_2 = b(a_1), a_3 = b(a_2), \ldots$ e em geral $a_{n+1} = b(a_n)$.

Mostremos que estes elementos são todos distintos.

Com efeito, se não fossem todos distintos, pelo príncipio de boa ordem haveria um índice m que seria o menor índice tal que

$$\exists_{n>m}\, a_m = a_n.$$

De $n > m$ deduz-se sucessivamente $n > 1$, $a_n = b(a_{n-1})$, $a_n \in A^*$ (por ser imagem na bijecção b), $a_m \in A^*$ (por ser $= a_n$), $a_m = b(a_{m-1})$, $b(a_{m-1}) = b(a_{n-1})$ e $a_{m-1} = a_{n-1}$ por ser b bijectiva. Mas isto contraria a hipótese de ser m o menor índice, tal que

$$\exists_{n>m}\, a_m = a_n.$$

b) $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{\mathbb{N}}} \Rightarrow A$ infinito

Seja i uma injecção: $\mathbb{N} \to A$. i é também uma bijecção $i : \mathbb{N} \to i(\mathbb{N})$ que tem uma inversa $i_1 : i(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$.

Considere-se a aplicação $j : A \to A$ definida por

$$j(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A \setminus i\,(\mathbb{N}) \\ i(i_1\,(x) + 1) & \text{se } x \in i\,(\mathbb{N}) \end{cases}$$

j não é sobrejectiva porque, no primeiro caso, $j(x) \in A \setminus i(\mathbb{N})$ e, no segundo, $i_1(x) + 1$ nunca toma o valor 1, de modo que $\in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e, como i é injectiva, $j(x) = i(i_1(x)+1) \in i(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = i(\mathbb{N}) \setminus \{i(1)\}$; logo, $j(x)$ nunca toma valor $i(1)$.

Por outor lado, j é injectiva, pois: se $j(x_1)$ e $j(x_2)$ resultam do primeiro caso (x_1 e $x_2 \in A \setminus i(\mathbb{N})$), $j(x_1) = j(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ porque $j(x_1) = x_1$, etc.; se $j(x_1)$ e $j(x_2)$ resultam do segundo caso,

$$\begin{aligned} j(x_1) &= j(x_2) \Rightarrow i(i_1(x_1)+1) = i(i_1(x_2)+1) \Rightarrow i_1(x_1) + 1 = i_1(x_2) + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow i_1(x_1) = i_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

em vista de serem i e i_1 injectivas.

Então j é uma injecção $A \to A \setminus \{i(1)\} \subset A$ e A é infinito.

De a) deduz-se

c) Se A é infinito, contém um subconjunto numerável.

De a) e b) deduz-se

d) A é finito $\Leftrightarrow \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

Pode demonstrar-se que também

e) A é finito $\Leftrightarrow \overline{\overline{A}}$ é um número natural, ou zero.

f) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável.

g) A reunião de uma família numerável (isto é, cujo conjunto de índices é $\mathbb{N}$) de conjuntos numeráveis é um conjunto numerável.

h) A reunião de um número finito de conjuntos numeráveis é um conjunto numerável.

i) A reunião de um conjunto finito com um conjunto numerável é um conjunto numerável.

A segunda destas propriedades pode demonstrar-se elementarmente do seguinte modo. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é o conjunto de todos os pares (m, n) em que m e n são naturais. Se dispusermos estes pares num quadro com uma infinidade numerável de linhas e uma infinidade numerável de colunas como o que é sugerido à esquerda da figura 3 e se os numerarmos como é indicado pela outra parte da mesma figura, segundo linhas oblíquas [4] fica definida uma bijecção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$.

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$\cdots$	1	2	4	7	11	$\cdots$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$\cdots$	3	5	8	12	$\cdots$	$\cdots$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$\cdots$	6	9	13	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$\cdots$	10	14	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	15	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Fig. 3

A propriedade g) pode demonstrar-se por um processo análogo:

Sendo $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n \cup \ldots$ [5] uma reunião de conjuntos numeráveis, podemos dispôr os elementos de A_1 na primeira linha de um quadro como o dos pares (m, n) da figura 3, os de A_2 na segunda linha e assim por diante e enumerá-los de modo análogo ao que aí se indicou apenas com a precaução de desprezar os elementos que, por figurarem em

[4] É possível indicar explicitamente uma função $b(m, n)$ que defina uma bijecção $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que esta propriedade se demonstre sem recurso à figura.

[5] Modo sugestivo de exprimir a reunião $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Então

$$a' \leq x \wedge a'' \leq x \Leftrightarrow \{a', a''\} \leq x \Leftrightarrow a \leq x$$

(de acordo com d). Logo, a intersecção daqueles intervalos é igual a

$$\{x : a \leq x \wedge a'' \neq x \wedge x < b\} = [a, b[\setminus \{a''\}.$$

Como $a'' < a \vee a'' = a$, a mesma intersecção ou é $[a, b[$ ou $]a, b[$.

Chama-se denso um conjunto parcialmente ordenado, tal que

$$\forall_a \forall_b \, (a \leq b \Rightarrow]a, b[\neq 0),$$

isto é, onde não há elementos consecutivos.

Por exemplo, $(\mathbb{Q}, \leq)$ é denso, porque, dados

$$\frac{m_1}{n_1} \text{ e } \frac{m_2}{n_2},$$

a sua média aritmética é ainda $\in \mathbb{Q}$ e pertence ao intervalo aberto determinado por aqueles números; $(\mathbb{Z}, \leq)$ não é denso porque $]2, 3[$, por exemplo, é vazio.

Chama-se completo um conjunto parcialmente ordenado que satisfaz uma das três condições seguintes (em que A e B designam subconjuntos do c.p.o. X)

1) $\forall_A (A \neq \emptyset \wedge A$ maiorado $\Rightarrow \exists_s \, s = \sup \, A)$

2) $\forall_B (B \neq \emptyset \wedge B$ minorado $\Rightarrow \exists_i \, i = \inf \, B)$

3) $\forall_A \forall_B (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \leq B \Rightarrow \exists_x \, A \leq x \leq B)$

(diz-se que entre A e B, com $A \leq B$, há uma lacuna se $\sim \exists_x \, A \leq x \leq B$).

Estas três condições são equivalentes entre si, bastando verificar-se uma delas para que as outras se verifiquem (e o c.p.o. seja completo).

Demonstração:

Vejamos que 1) $\Rightarrow$ 3). Se A e B satisfazem a hipótese de 3), como $B \neq 0$, $\exists_b (b \in B \wedge A \leq b)$ (porque $A \leq B$) de modo que A é maiorado; por 1) existe $s = \sup \, A$, o que implica, conforme a definição de sup, $s \in M_A$ e $s \leq M_A$, donde, respectivamente $A \leq s$ e $s \leq B$ (porque todos os elementos de B pertencem a M_A por ser $A \leq B$); s é então o x a que se refere a tese de 3).

Vejamos que 3) $\Rightarrow$ 2).

Seja $B \neq 0$ e minorado e seja $A = \{x : x$ é minorante de $B\}$. $A \neq 0$ porque B é minorado e $A \leq B$, dada a definição de A.

Então, por 3), $\exists_i \, A \leq i \leq B$. $A \leq i$ significa que i é $\geq$ qualquer minorante de B; $i \leq B$ significa ser i minorante de B.

Logo, $i = \inf \, B$.

Vejamos que 2) $\Rightarrow$ 1).

Se A satisfaz as hipóteses de 1), A maiorado, donde $M_A \neq 0$, e $A \neq 0$, de modo que M_A minorado (por ser $A \leq M_A$).

Então, por 2), existe $\inf \, M_A$, mas, como se viu em c), existe então $\sup \, A$.

j) Num conjunto filtrante à direita [esquerda], qualquer elemento máximo é o maior [menor] elemento.

Seja a o máximo.

$$\forall_x \exists_m (a \leq m \wedge x \leq m).$$

Como a é um máximo,

$$a \leq m \Rightarrow a = m,$$

donde

$$\forall_x \ \ x \leq a.$$

17.°) O conjunto do exemplo 3.° é filtrante à direita (por exemplo $m = \text{m.m.c.}\,(x, y)$) e à esquerda ($m = 1$).

18.°) O conjunto parcialmente ordenado a, b, c representado por

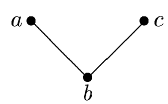


Fig.

é filtrante à esquerda mas não à direita.

Diz-se que X é um reticulado quando, dados dois quaisquer elementos, x e y, existem

$$\sup\{x, y\} \quad \text{e} \quad \inf\{x, y\}$$

Exemplo:

19.°) $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um reticulado.

Dados A e B, contidos em E, os maiorantes de A, B, isto é, os subconjuntos de E que contêm A e B são $A \cup B$ e todos os conjuntos que contêm $A \cup B$. $A \cup B$ é, pois, um maiorante $\leq$ que qualquer outro (isto é, $\subseteq$ em qualquer outro).

Logo, $A \cup B = \sup\{A, B\}$ e analogamente $\inf\{A, B\} = A \cap B$, no conjunto ordenado que estamos considerando.

1) Num reticulado a intersecção de dois intervalos é um intervalo.

Bastará analisar o que se passa num dos casos; os outros são análogos.

$$\begin{aligned} [a', b[\cap]a'', \to[\quad &= \{x : a' \leq x \wedge x < b\} \cap \{x : a'' < x\} \\ &= \{x : a' \leq x \wedge x < b \wedge a'' \leq x \wedge a'' \neq x\} \\ &= \{x : a' \leq x \wedge a'' \leq x \wedge a'' \neq x \wedge x < b\}. \end{aligned}$$

Seja $a = \sup\,\{a', a''\}$.

mais de um dos conjuntos A_n, já tinham recebido numeração. A demonstração de h) é análoga à de g) e a de i) é muito fácil.

i) permite mostrar que é numerável o conjunto $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; daí, usando h), deduz-se que é numerável $\mathbb{Z}$ porque o conjunto dos inteiros negativos é evidentemente equicardinal a $\mathbb{N}$; g) permite mostrar que é numerável o conjunto $\mathbb{Q}^+$ dos números racionais positivos (A_1 seriam as fracções de denominador 1, A_2 as de denominador 2, etc...) e daqui se deduz, usando outra vez i) e h), que $\mathbb{Q}$ também é numerável.

Finalmente, mostremos que

j) $\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} > \overline{\overline{X}}$

Como a aplicação $x \mapsto \{x\}$ é uma injecção de X em $\mathcal{P}(X)$, $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$. Se fosse igual, existiria uma injecção $i : \mathcal{P}(X) \to X$.

Seja $C = \{i(A) : i(A) \notin A\}$. Se fosse $i(C) \in C$, $i(C)$ seria um dos elementos $i(A)$ com a propriedade $i(A) \notin A$, logo $i(C) \notin C$, contradição. Se fosse $i(C) \notin C$, $i(C)$ teria aquela propriedade e $i(C) \in C$, outra contradição. Logo, não existe i.

3.3 Relações de ordem

Chama-se relação de ordem (parcial) em sentido lato num conjunto X uma relação binária R que tenha as seguintes propriedades:

1) $\forall_x \, R(x, x)$

2) $\forall_x \forall_y \, [R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y]$

3) $\forall_x \forall_y \forall_z \, [R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)]$

A cada relação R deste tipo corresponde uma e uma só relação binária R', relação de ordem (parcial) em sentido restrito definida por $R'(x, y)$ sse $R(x, y) \wedge x \neq y$, que tem as propriedades seguintes:

1′) $\forall_x \sim R'(x, x)$

2′) $\forall_x \forall_y \sim [R'(x, y) \wedge R'(y, x)]$

3′) $\forall_x \forall_y \forall_z \, [R'(x, y) \wedge R'(y, z) \Rightarrow R'(x, z)]$

como seria fácil de provar.

Reciprocamente, dada uma relação R' com as propriedades 1′), 2′) e 3′) e definindo R por meio de

$$R(x, y) \text{ sse } R'(x, y) \vee x = y$$

vê-se que R tem as propriedades 1), 2) e 3).

Também a partir de uma relação R se pode definir a relação inversa $R^{-1}(x, y)$, que se verifica sse $R(y, x)$ e que é também uma relação de ordem parcial, em sentido restrito ou em sentido lato, conforme for R.

Chama-se conjunto ordenado (parcialmente) um conjunto em que esteja definida uma relação de ordem parcial (por exemplo, em sentido lato R e, portanto, também as respectivas relações de ordem parcial R', R^{-1} e $(R^{-1})'$).

Mais propriamente, um conjunto ordenado é o par (X, R) em que X é um conjunto e R uma relação de ordem parcial.

Exemplos:

1.°) O exemplo típico é o da relação $x \leq y$ no conjunto $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Por este motivo, em vez de $R(x, y)$, escreveremos muitas vezes $x \leq y$, mesmo que não se trate destes conjuntos ordenados e que $\leq$ tenha um significado diferente.

As respectivas relações R', etc., são $<$, $\geq$ e $>$.

2.°) Uma recta horizontal, como conjunto dos seus pontos, ordenados por "x não está à direita de y". No conjunto dos pontos de um plano esta relação já não é de ordem parcial por se não verificar 2) nem 2′).

3.°) $\mathbb{N}$, com a relação "x é divisor de y".

4.°) Sendo E um conjunto, $\mathcal{P}(E)$ com a relação $X \subseteq Y$, em que $X \subseteq E$ e $Y \subseteq E$.

5.°) Considere-se o conjunto $\{a, b, c, \ldots, h\}$ de pontos indicados na figura 4:

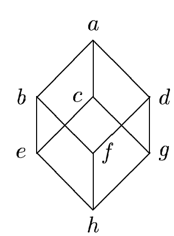
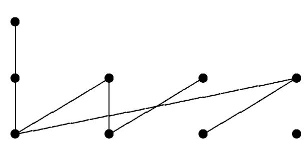


Fig. 4

com a relação "$x = y \vee x$ está abaixo de y e ligado a y por uma poligonal que não é intersectada em mais de um ponto por nenhuma recta horizontal". Verifica-se, por exemplo, $R(h, h)$, $R(h, e)$, $R(h, c)$ mas não $R(e, f)$ porque uma poligonal que una e a f, como $e\ b\ f$ ou $e\ h\ f$ já não tem a propriedade indicada.

Sendo finito o conjunto ordenado X, pode representar-se a relação de ordem R por um esquema deste tipo.

O exemplo 3.°, no conjunto $\{2, 3, \ldots, 10\}$, tem o esquema



apenas a desigualdade $f(x) \leq f(y)$ é substituída, respectivamente por $f(x) < f(y)$, $f(x) \geq f(y)$ e $f(x) > f(y)$.

No primeiro e no terceiro casos diz-se, ainda, que f é monótona em sentido lato e que é monótona em sentido restrito nos outros dois.

É claro que a função crescente em sentido restrito é também crescente em sentido lato, etc.

Se f é crescente e decrescente em sentido lato, $\forall_x\, \forall_y [x < y \Rightarrow f(x) = f(y)]$, de modo que f é constante.

15.°) Exemplos de aplicações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ classificadas quanto ao crescimento:

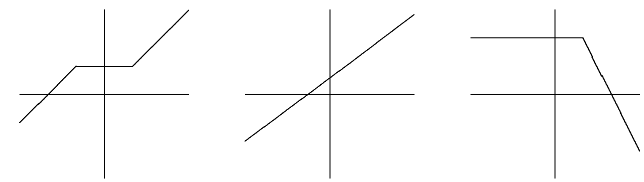


Fig. 7

Num conjunto parcialmente ordenado, X, dados dois elementos a e b, chamam-se intervalos de extremos a e b (por esta ordem) os conjuntos

$[a, b] = \{x : a \leq x \wedge x \leq b\}$ [10]	intervalo fechado
$]a, b[= \{x : a < x \wedge x < b\}$	intervalo aberto
$[a, b[= \{x : a \leq x \wedge x < b\}$	intervalo fechado à esquerda e aberto à direita
$]a, b] = \{x : a < x \wedge x \leq b\}$	intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

Consideram-se ainda os intervalos ilimitados $[a, \to[$, $]a, \to[$, $]\leftarrow, b]$, $]\leftarrow, b[$ e $]\leftarrow, \to[$, que significam, respectivamente,

$$\{x : a \leq x\}, \quad \{x : a < x\}, \quad \{x : x \leq b\}, \quad \{x : x < b\} \quad \text{e} \quad X$$

16.°) Exemplos de intervalos no conjunto ordenado do exemplo 5.°.

$$[e, a] = \{e, b, c, a\}, \quad [g, a[= \{g, c, d\}, \quad]f, c[= \emptyset, \quad [f, \to[= \{f, b, d, a\},$$
$$[f, f] = \{f\}, \ [f, h] = \emptyset, \quad]\leftarrow, h[= \emptyset$$

Facilmente se vê que os intervalos $[a, \to[$ e $]\leftarrow, b]$ e, se $a \leq b$, os intervalos $[a, b]$, $[a, b[$ e $]a, b]$ não podem ser vazios.

Se $a < b$ e $]a, b[$ é vazio, diz-se que a e b são consecutivos.

Consideremos agora diversas espécies particulares de conjuntos ordenados.

Diz-se que X, ordenado por $\leq$, é filtrante à direita [esquerda] quando

$$\forall_x \forall_y \exists_m\, (x \leq m \wedge y \leq m)\ [\forall_x \forall_y \exists_m\, (m \leq x \wedge m \leq y)],$$

isto é, quando dois quaisquer elementos possuem um maiorante [minorante] comum.

Mas é costume considerar $\sup\emptyset$ igual ao menor dos elementos de X e $\inf\emptyset$ igual ao maior, se estes elementos existirem (porque, por exemplo, $\forall_{m\in X}\,(x\in\emptyset\Rightarrow x\leq m)$, de modo que $M_\emptyset = X$).

Seja $f: X\to Y$, em que X é um conjunto qualquer e Y um conjunto ordenado pela relação $\leq$. Seja $A\subseteq X$.

$f(A)$, como parte de Y, pode ter ou não sup e inf, que se chamam então supremo ou ínfimo de f em A e se representam por $\sup\limits_A f$ e $\inf\limits_A f$ ou $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ e $\inf\limits_{x\in A} f(x)$.

Se em particular este supremo ou este ínfimo pertencerem a $f(A)$, isto é, forem valores efectivamente tomados pela função f em A, chamam-se o máximo absoluto [9] de f em A e o mínimo absoluto de f em A.

Por exemplo, sendo $f: R\to R$ dada por $x\mapsto x^2$ e $A=[-1,2[$, $f(A)$ é $[0,4[$, $\inf\limits_A f = 0$, $\sup\limits_A f = 4$ e 0 é também o mínimo absoluto de f em A.

g) $A\subseteq B\Rightarrow \sup\limits_A f\leq \sup\limits_B f\wedge \inf\limits_A f\geq \inf\limits_B f$

Basta atender a e) e e′) e a que $f(A)\subseteq f(B)$.

h) Se $\forall_{x\in A}\, f(x)\leq g(x)$ e se $\sup\limits_A f$ e $\sup\limits_A g$ existem, $\sup\limits_A f\leq \sup\limits_A g$.

Porque a hipótese implica que qualquer maiorante de $g(A)$ é maiorante de $f(A)$, isto é, $M_{g(A)}\subseteq M_{f(A)}$, donde $\inf\ M_{f(A)}\leq \inf\ M_{g(A)}$ e estes ínfimos são precisamente $\sup\limits_A f$ e $\sup\limits_A g$.

h′) Sob a mesma condição, se $\inf\limits_A f$ e $\inf\limits_A g$ existem, $\inf\limits_A f\leq \inf\limits_A g$.

As noções de supremo, máximo, etc., de uma função aplicam-se naturalmente a famílias $(x_i : i\in I)$, bastando que $x_i\in X$, parcialmente ordenado.

Em particular o conjunto dos índices pode ser um produto cartesiano $I\times J$, isto é, pode tratar-se de um aplicação $x: I\times J\to X$, dada por $(i,j)\mapsto x_{ij}$.

Sem demonstração, citaremos uma propriedade importante.

i) Se $\forall_{j\in J}\ \sup\limits_{I\in I} x_{ij}$ existe, então $\sup\limits_{(i,j)\in\, I\times J} x_{ij}$ existe sse existe $\sup\limits_{j\in J}\sup\limits_{i\in I} x_{ij}$ e, nesse caso, estes dois supremos coincidem.

Seja agora $f: X\to Y$ uma aplicação entre dois conjuntos parcialmente ordenados por certas relações de ordem que, para simplificar, designaremos – ambas – pelo mesmo sinal $\leq$.

Diz-se que f é crescente em sentido lato quando

$$\forall_x\,\forall_y\,[x<y\Rightarrow f(x)\leq f(y)]$$

Analogamente, diz-se que f é crescente em sentido restrito, decrescente em sentido lato e decrescente em sentido restrito quando se verificam propriedades análogas em que

[9] Mesmo que, para abreviar, se diga apenas "o máximo de f em A" distingue-se esta noção da de "um máximo de $f(A)$" porque agora se usa o artigo definido.

Fig. 5

Dado um conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$, define-se:

a é um elemento máximo (ou maximal) de X quando, com $x\in X$, $\forall_x\,(a\leq x\Rightarrow a=x)$.

Do mesmo modo, a é um elemento mínimo (ou minimal) de X quando $\forall_x\,(x\leq a\Rightarrow x=a)$.

Pode haver ou não e haver um ou mais elementos máximos e mínimos. Assim, considerem-se os seguintes exemplos:

6.°) Em $(\mathbb{N},\leq)$ não há máximos e há um único mínimo, 1.

7.°) Em $(\mathbb{Z},\leq)$ e no segundo dos exemplos anteriores não há máximos nem mínimos.

8.°) No exemplo a que se refere a figura 5 há cinco máximos, 6, 7, 8, 9 e 10 e 4 mínimos, 2, 3, 5 e 7.

9.°) Em $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}),\subseteq)$ há um máximo, $\{1,2,3\}$, e um mínimo, $\emptyset$. O esquema deste conjunto ordenado é o da figura 4.

Desta noção de máximo e mínimo é preciso distinguir a seguinte:

Chama-se o maior (ou o máximo) elemento de X, se existir, ao elemento $a\in X$ tal que $\forall_x\ x\leq a$. Analogamente, a é o menor (ou o mínimo) elemento de X quando $\forall_x\ a\leq x$.

O maior e o menor elemento de X podem existir ou não: em $(\mathbb{Z},\leq)$ não existem; em $(\mathbb{N},\leq)$ existe só o menor elemento, 1; em $(\mathcal{P}\{1,2,3\}),\leq)$ $\{1,2,3\}$ é o maior elemento e $\emptyset$ o menor.

a) O maior [menor] elemento de X, se existe é um máximo [mínimo] e o único máximo [mínimo].

Por exemplo, sendo a o maior elemento, $\forall_x\ x\leq a$. Então, se $a\leq x, a=x$, isto é, $\forall_x\,(a\leq x\Rightarrow a=x)$ e a é máximo.

Se fosse a' outro máximo, tinha de ser $a'\leq a$ (por ser a o maior) e $a'\leq a\Rightarrow a'=a$ por ser a' máximo; logo, $a'=a$.

Dado um subconjunto A do conjunto ordenado X, chama-se maiorante [6] de A, um elemento m de X tal que $\forall_{x\in A}\ x\leq m$; do mesmo modo, m é minorante de A quando $\forall_{x\in A}\ m\leq x$.

Como nas definições anteriores, pode haver ou não maiorantes e minorantes. E um ou mais.

Exemplos:

10.°) Em $(\mathbb{Z},\leq)$ o conjunto $\mathbb{N}$ não admite maiorantes e tem muitos minorantes, como -4, 0 e até 1 (este por sinal $\in\mathbb{N}$).

[6] Melhor que "majorante" pois todas as palavras portuguesas da família de "maior" se escrevem com i, excepto "major".

11.°) No 5.° exemplo, o conjunto $A = \{b, c, d\}$ tem um só maiorante, a, que $\notin A$ e 4 minorantes, e, f, g, h.

Se $A = \emptyset$, como $\forall_{x \in A}\ x \leq m$ significa $\forall_x (x \in A \Rightarrow x \leq m)$ e a hipótese $x \in A$ é sempre F, qualquer $m \in X$ é maiorante (e, analogamente, é minorante) de A.

Por vezes usam-se as seguintes abreviaturas:

Em vez de $\forall_{x \in A}\ x \leq m$ escreve-se $A \leq m$ e, analogamente se interpretam $A < m$, $A \geq m$, $A > m$. Se $\forall_{x \in A}\ \forall_{y \in B}\ x \leq y$, escreve-se $A \leq B$ e do mesmo modo $A < B$, etc.[7].

Sendo $(X, \leq)$ um conjunto ordenado e $A \subseteq X$, A e a restrição [8] da relação $\leq$ ao conjunto A definem um novo conjunto ordenado. Pode, por exemplo, falar-se do maior dos elementos de A. E facilmente se vê que

b) O maior [menor] dos elementos de A é maiorante [minorante] de A (no conjunto ordenado $(X, \leq)$).

Considere-se agora o conjunto M_A dos maiorantes [minorantes] de A. Se existe o menor [maior] elemento de M_A, chama-se-lhe supremo ou extremo superior [ínfimo ou extremo inferior] de A e representa-se por sup A [inf A]. Pode existir ou não, mas se existir é único em virtude de a).

Exemplos:

12.°) $\mathbb{N}$ em $(\mathbb{Z}, \leq)$ não tem supremo (porque não tem maiorantes) mas tem ínfimo, que é 1 e $\in \mathbb{N}$.

13.°) $\{b, c, d\}$, do exemplo 11.°, tem supremo, a, que $\notin \{b, c, d\}$ mas não tem ínfimo.

14.°) Considere-se uma recta horizontal de que se excluiu um ponto, p, e ordene-se este conjunto, X, pela relação do exemplo 2.° (figura 6).

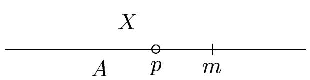


Fig. 6

Seja $A = \{x : x$ está à esquerda de $p\}$. Os maiorantes de A são todos os pontos de X que estão à direita de p (p não é maiorante porque não faz parte de X). Mas não existe sup A porque, dado um dos maiorantes, m, o ponto médio do segmento pm ainda é maiorante de A e está à esquerda de m.

Seja A uma parte do conjunto parcialmente ordenado X e M_A o conjunto dos seus maiorantes.

Então:

a) m é o maior dos elementos de A sse $m \in A \cap M_A$.

[7] Não são relações de ordem em $\mathcal{P}(X)$.

[8] Isto é, a relação $\leq (x, y)$ que se verifica sse $x \in A$, $y \in A$ e $x \leq y$. Salvo indicação em contrário, quando se considera como conjunto ordenado um subconjunto A de $(X, \leq)$ supõe-se que se toma para relação de ordem em A esta restrição de $\leq$.

Pois a definição de "maior dos elementos" foi que $m \in A$ e $\forall_{x \in A}\ x \leq_A m$ sendo $\leq_A$ a restrição da relação $\leq$ ao conjunto A.

Mas, entre elementos x e m de A, $x \leq_A m$ sse $x \leq m$, sendo pois m o maior dos elementos de A sse $m \in A \wedge \forall_{x \in A}\, x \leq m$, isto é, sse $m \in A \cap M_A$.

a$'$) m é o menor dos elementos de A sse $m \in A$ e m é minorante de A.

b) Se $m \in A \cap M_A$, $m =$ sup A

m é maiorante de A. Para qualquer outro maiorante, m', $\forall_{x \in A}\ x \leq m'$, logo, porque $m \in A$, $m \leq m'$, isto é, m é minorante de M_A e, como $\in M_A$ de acordo com a$'$) é o menor dos maiorantes de A, isto é, o sup A.

b$'$) Se algum minorante de A pertencer a A é o inf A.

c) Se existe inf M_A, existe sup A e é igual. E reciprocamente.

Seja $c =$ inf M_A.

Ora

$$\forall_{a \in A}\ a \leq M_A \ (a \text{ é minorante de } M_A),$$

donde

$$\forall_a\ a \leq c$$

por ser c o maior dos minorantes de M_A.

Logo, $c \in M_A$, mas como é minorante de M_A, por a$'$), c é o menor elemento de M_A, isto é, sup A.

Reciprocamente, se $c =$ sup A, é o menor elemento de M_A, logo, por a$'$) e b$'$), é o inf M_A.

c$'$) Se existe o supremo dos minorantes de A, existe inf A e é igual. E reciprocamente.

Facilmente se vê que

d) $m \geq A \Leftrightarrow m \geq$ sup A e $m \leq A \Leftrightarrow m \leq$ inf A.

e) Se $A \subseteq B$, sup $A \leq$ sup B caso estes supremos existam.

De facto, $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Logo, $\forall_{x \in B}\, x \leq m \Rightarrow \forall_{x \in A}\, x \leq m$.

Logo, $m \in M_B \Rightarrow m \in M_A$, isto é, $M_B \subseteq M_A$.

Como sup $B \in M_B$, sup $B \in M_A$, e como sup A é o menor elemento de M_A, sup $A \leq$ sup B.

e$'$) Se $A \subseteq B$ e inf A e inf B existem, inf $A \geq$ inf B.

f) Se $A \neq \emptyset$ e inf A e sup A existem, inf $A \leq$ sup A porque $\exists_a\, a \in A$ e inf $A \leq a \leq$ sup A.