

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. (a) Prove que, quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de \mathbb{R} e o número real x , se x é ponto interior de A e $A \subseteq B$, então x é ponto interior de B .
 (b) Enuncie a contra-recíproca e a negação da proposição anterior.
2. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x = -2 \\ \ln(x+2) & \text{se } -2 < x < 0, \\ x^x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Indique o domínio de f .
- (b) Identifique os pontos de descontinuidade de f e classifique-os.
- (c) Verifique que $f(-2) = f(2)$.
- (d) Diga, justificando, se as alíneas anteriores permitem concluir qual o valor de verdade da proposição:

$$\exists c \in]-2, 2[: f'(c) = 0.$$

3. Considere a sucessão de termo geral

$$x_n = \frac{\ln(n^3 - n^2 + \pi)}{\ln(n^3 - n^2 + e)}.$$

Defina uma extensão da sucessão a $[1, +\infty[$ e use-a, juntamente com a Regra de Cauchy, para calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

4. (a) Deduza a Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange de ordem n , no ponto 0, da função exponencial.
 (b) Prove que se tem

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

5. Depositou-se numa conta bancária a quantia de 1000 euros.

- (a) Se o juro dessa conta for de 10% calculado anualmente, qual o valor da conta ao fim de dois anos?
- (b) Se o juro da conta for de 10% calculado continuamente, isto é, se em cada instante de tempo a taxa de variação do valor da conta for 10% do valor do depósito nesse momento, qual o valor da conta ao fim de dois anos?

(Aqui a unidade de tempo é também 1 ano.)

- (c) Use a alínea (b) do exercício anterior para concluir qual das contas é mais vantajosa para o cliente.