Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 1

CAPÍTULO I: Fundamentos

1. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?
   (a) 8 é par ou 6 é ímpar.
   (b) 8 é par e 6 é ímpar.
   (c) 8 é ímpar e 6 é ímpar.
   (d) 8 é ímpar ou 6 é ímpar.
   (e) Se 8 for ímpar então 6 é ímpar.
   (f) Se 8 for par então 6 é ímpar.
   (g) Se 8 for ímpar então 6 é par.
   (h) Se 8 for ímpar e 6 for par então $8 < 6$.

2. Quais das seguintes frases são a negação à proposição apresentada?

   Proposição 1: A resposta é 2 ou 3.
   (a) A resposta não é 2 nem 3.
   (b) A resposta não é 2 ou não é 3.
   (c) A resposta não é 2 e não é 3.

   Proposição 2: Os pepinos são verdes e têm sementes.
   (a) Os pepinos não são verdes e não têm sementes.
   (b) Os pepinos não são verdes ou não têm sementes.
   (c) Os pepinos são verdes e não têm sementes.

   Proposição 3: Tem-se $2 < 7$ e 3 é ímpar.
   (a) Tem-se $2 > 7$ e 3 é par.
   (b) Tem-se $2 \geq 7$ e 3 é par.
   (c) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é ímpar.
   (d) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é par.

3. Escreva as proposições recíproca, negação e contra-recíproca de cada uma das seguintes proposições:

   A. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ B. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ C. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

4. Escreva o recíproco, o contra-recíproco e a negação das seguintes frases:
   (a) Se a economia melhorar arranjarei um emprego melhor.
   (b) Se $2 < 4$ e $5 + 5 = 10$ então $\sin(\pi/3) = 1/2$.

(c) Se acabar o meu trabalho vou andar de bicicleta se não chover.

(d) Se f diferenciável implicar f contínua então f é contínua.

(e) Se f for definida em a então a existência de $\lim_{x\to a} f(x)$ implica que f seja contínua em a.

5. Escreva cada uma das frases na forma de implicação $p \Rightarrow q$.

   (a) Se tocares nesse bolo apanhas.

   (b) Toca nesse bolo e arrepender-te-ás.

   (c) Sai ou chamo a polícia.

   (d) Vou-me embora se não pararem de falar.

6. Determine a proposição contra-recíproca de cada uma das proposições do exercício anterior.

7. Construa tabelas de verdade para as seguintes proposições:

   (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

   (b) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$

   (c) $\sim ((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r)$

   (d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

8. Determine o antecedente e o consequente de cada uma das seguintes proposições:

   (a) Plantas saudáveis crescem com água suficiente.

   (b) Um aumento significativo no poder dos computadores é uma condição necessária para futuros avanços tecnológicos.

   (c) Erros serão introduzidos se efectuarmos uma modificação neste programa.

   (d) Para poupar combustível é necessário instalar um bom isolamento térmico, assim como janelas duplas.

9. Sejam p, q e r as seguintes proposições:

$$p\text{: Eu erro.} \quad q\text{: Eu existo.} \quad r\text{: Eu penso.} \tag{1}$$

   Traduza as seguintes proposições compostas em notação simbólica.

   (a) Ou penso ou erro.

   (b) Sempre que penso não erro.

   (c) Eu existo sempre que erro, mesmo que não pense.

   (d) Eu erro ou se penso e não erro então existo.

10. (a) Sendo $p \Rightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $\sim p \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$?

   (b) Sendo $p \Leftrightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?

   (c) Supondo agora que $p \Leftrightarrow q$ é falso, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 2

CAPÍTULO I: Fundamentos

11. Sendo p, q e r proposições, construa tabelas de verdade para as seguintes proposições compostas.

    (a) $p \wedge \sim (\sim p \vee \sim q)$

    (b) $p \wedge q \Rightarrow \sim p$

    (c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)]$

    (d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

    (e) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim q \vee \sim p$

    (f) $(p \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge q)$

    (g) $((p \vee q) \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p \vee r$

12. Num certo país cada habitante é um amante da verdade ou é um amante da mentira e, como tal, diz sempre a verdade ou diz sempre a mentira. Ao viajar neste país encontrei o Pedro e o Luís. O Pedro disse-me: "Se eu for um amante da verdade então o Luís é um amante da verdade." Será Pedro um amante da verdade ou da mentira? E o Luís?

13. De entre as seguintes frases assinale as que são proposições atribuindo-lhe o respectivo valor de verdade.

    (a) Para todo o x real, $x^2 = x$.

    (b) Para exactamente um x real, $x^2 = x$.

    (c) Para algum $x \in \mathbb{R}$ verifica-se $x^2 = x$.

    (d) $x^2 = x$.

    (e) $xy = xz$ implica $y = z$.

    (f) Para x, y, z reais $xy = xz$ implica $y = z$.

14. Para cada uma das proposições determine uma interpretação onde a proposição seja verdadeira e outra onde seja falsa.

    (a) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \Rightarrow q(y, x))$

    (b) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (\exists y)q(x, y))$.

15. Considere as seguintes expressões proposicionais:

$a(x,y)$	"x ama y",	$b(x)$	"x é belo",
$h(x)$	"x é homem",	$e(x)$	"x é encantador",
M	"Maria",	$m(x)$	"x é mulher".

    Agora, apresente uma tradução em português dos seguintes predicados:

    (a) $(\forall x)[m(x) \Rightarrow (\forall y)(a(x, y) \Rightarrow h(y) \wedge b(y))]$;

(b) $(\exists x)(h(x) \wedge b(x) \wedge a(x, M))$;

(c) $(\exists x)[m(x) \wedge e(x) \wedge (\forall y)(a(x, y) \Rightarrow b(y) \wedge h(y))]$.

16. Determine a proposição negação da proposição apresentada em cada alínea.

(a) Algumas pessoas gostam de matemática.

i. Algumas pessoas não gostam de matemática.

ii. Todas as pessoas gostam de matemática.

iii. Ninguém gosta de matemática.

(b) Todas as pessoas são altas e magras.

i. Existe alguém que é baixo e gordo.

ii. Ninguém é alto e magro

iii. Existe alguém que é baixo ou gordo.

(c) Todas as pessoas gostam de gelados.

i. Ninguém gosta de gelados.

ii. Todas as pessoas não gostam de gelados.

iii. Existe alguém que não gosta de gelados.

(d) Há pessoas belas e inteligentes.

i. Não há pessoas belas e inteligentes.

ii. Algumas pessoas não são belas, mas são inteligentes.

iii. Qualquer pessoa não é bela ou não é inteligente.

17. Analise a validade dos seguintes argumentos:

(a) Bom tempo é necessário para se conseguir um belo jardim. Como o jardim está muito bonito o tempo tem estado bom.

(b) Se hoje for segunda-feira amanhã será terça-feira. Mas hoje não é segunda feira, logo, amanhã não é terça.

(c) Hoje é segunda ou terça-feira. Mas hoje não é segunda. Então hoje é terça-feira.

(d) Sendo $p \Rightarrow q$ uma tautologia para que $q \Rightarrow p$ seja uma tautologia é necessário e suficiente que $p \Leftrightarrow q$ seja uma tautologia. Sabendo que $p \Rightarrow q$ é uma tautologia e $p \Leftrightarrow q$ não é uma tautologia então $q \Rightarrow p$ não é uma tautologia.

(e) O Artur não possui carro próprio. A Maria gosta de rapazes que tenham carro. Então a Maria não gosta do Artur.

(f) Algumas pessoas admiram a Amália. Mas existem pessoas que não admiram quem admire a Amália. Então existem pessoas que não são admiradas por todas as pessoas.

18. Determine a negação de cada uma das seguintes expressões numa forma que não contenha o conectivo $\sim$ como conectivo principal.

(a) $(\forall x)(p(x) \vee \sim p(x))$

(b) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x))$

(c) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (q(x) \vee r(x)))$

(d) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow p(x)))$

(e) $(\forall x)((q(x) \wedge \sim r(x)) \Leftrightarrow p(x))$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 3

CAPÍTULO I: Fundamentos

19. Seja $S = \{2, 5, 17, 27\}$. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

    (a) $5 \in S$ (b) $2 + 5 \in S$ (c) $\emptyset \in S$ (d) $S \in S$.

20. Considere os conjuntos

    $R = \{1, 3, \pi, 4.1, 9, 10\}$ $S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$ $T = \{1, 3, \pi\}$ $U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$.

    Indique, de entre as seguintes proposições, as que são falsas (justifique a sua resposta).

    (a) $S \subseteq R$ (b) $1 \in R$ (c) $1 \in S$
    (d) $1 \subseteq U$ (e) $\{1\} \subseteq T$ (f) $\{1\} \subseteq S$
    (g) $T \not\subseteq R$ (h) $\{1\} \in S$ (i) $\emptyset \subseteq S$
    (j) $T \subseteq U$ (l) $T \in U$ (m) $T \notin R$
    (n) $T \subseteq R$ (o) $S \subseteq \{1, 3, 9, 10\}$.

21. Para A, B e C conjuntos arbitrários apresente o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições.

    (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$ (b) $\{\emptyset\} = \emptyset$
    (c) $\{\emptyset\} = \{0\}$ (d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
    (e) $\emptyset \subseteq A$ (f) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \not\subseteq C$
    (g) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$ (h) $\emptyset \in A$
    (i) Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$ (j) Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$ então $A \notin C$.

22. Para $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}, B = \{1, 4, 5, 9\}$, $C = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } 2 \leq x < 5\}$ subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ determine:

    (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \cap C$
    (d) $B \cup C$ (e) $A - B$ (f) A^c
    (g) $A \cap A^c$ (h) $(A \cap B)^c$ (i) $C - B$
    (j) $(B - A)^c \cap (A - B)$ (l) $(C \cap B) \cup A^c$ (m) $(C^c \cup B)^c$
    (n) $B \times C$.

23. Sendo A e B subconjuntos arbitrários de um conjunto X, indique as igualdades verdadeiras:

    (a) $A \cup A = A$ (b) $B \cap B = B$
    (c) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ (d) $(A^c)^c = A$
    (e) $A - B = (B - A)^c$ (f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
    (g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A = B^c$ (h) $B \times A = A \times B$
    (i) $\emptyset \times A = \emptyset$ (j) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

24. Para cada uma das seguintes proposições, indique condições a impor aos conjuntos A e B para que as proposições sejam verdadeiras.

    (a) $A \cup B = A$ (b) $A \cup \emptyset = \emptyset$ (c) $A \cap B = A$

    (d) $B - A = \emptyset$ (e) $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$.

25. Mostre que para conjuntos arbitrários X, Y e Z se tem

    (a) Se $X \subseteq Y$ e $X \subseteq Z$ então $X \subseteq Y \cap Z$.

    (b) Se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$ também $X \cup Y \subseteq Z$.

26. Sejam A e B conjuntos arbitrários. Prove que:

    (a) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$.

    (b) Use a alínea anterior para provar que $B^c \subseteq A^c \Rightarrow A \subseteq B$.

    (c) Conclua, agora, que $A = B$ se e só se $A^c = B^c$.

27. Prove ou refute que, sendo A, B e C subconjuntos arbitrários de um conjunto X, se verificam as seguintes propriedades:

    (a) $A \subseteq B$ se e só se $A \cup B = B$. (b) $A \subseteq B$ se e só se $A \cap B = A$.

    (c) $A - (B - C) = (A - B) - C$. (d) $(A - B)^c = A^c - B^c$.

    (e) $A \cup (B - A) = A \cup B$. (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

    (g) $A - B = A \cap B^c$.

28. Sejam A e B conjuntos arbitrários.

    (a) Prove que, se $A \subseteq B$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

    (b) Prove que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

    (c) Prove que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

    (d) Apresente um exemplo que mostre que a inclusão recíproca da inclusão apresentada na alínea anterior não é verdadeira.

    (e) Prove que se $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ então $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

29. Sejam A, B, C e D conjuntos arbitrários. Prove as seguintes afirmações:

    (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

    (b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

    (c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

    (d) $A \subseteq C$, $B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$.

30. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X.

    (a) Mostre que, em geral, $A^c \times B^c \neq (A \times B)^c$.

    (b) Quando é que $A^c \times B^c = (A \times B)^c$?

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 4

CAPÍTULO I: Fundamentos

31. Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (n,m) &\mapsto m\times n. \end{aligned}$$

   (a) Verifique se a função f é injectiva.

   (b) Verifique se a função f é sobrejectiva. É bijectiva?

   (c) Calcule $f(X)$, quando:

      i. $X = \{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\, n+m\leq 5\}$;
      ii. $X=\{2\}\times\mathbb{N}$;
      iii. $X = \{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\, n \text{ e } m \text{ pares}\}$.

   (d) Calcule $f^{-1}(Y)$, quando:

      i. $Y=\{1,2,3\}$
      ii. $Y=\{n\in\mathbb{N}\,;\, n \text{ é par}\}$;
      iii. $Y=\{n\in\mathbb{N}\,;\, n \text{ é ímpar}\}$.

32. Sejam $f : A\to B$ uma função e X e X' subconjuntos de A. Prove que:

   (a) $f(X-X')\supseteq f(X)-f(X')$;

   (b) se f é injectiva, então $f(X-X')=f(X)-f(X')$;

   (c) f é injectiva se e só se $f(A-X)=f(A)-f(X)$.

33. Prove que, dada uma função $f : A\to B$:

   (a) $\forall X\subseteq A\ \ X\subseteq f^{-1}(f(X))$;

   (b) f é injectiva $\Leftrightarrow$ $\forall X\subseteq A\ \ X=f^{-1}(f(X))$;

   (c) $\forall Y\subseteq B\ \ f(f^{-1}(Y))\subseteq Y$;

   (d) f é sobrejectiva $\Leftrightarrow$ $\forall Y\subseteq B\ \ f(f^{-1}(Y))=Y$.

34. Sejam $f : A\to B$ e $g : B\to C$ duas funções. Prove que:

   (a) Se f e g são injectivas, então $g\circ f$ é injectiva.

   (b) Se f e g são sobrejectivas, então $g\circ f$ é sobrejectiva.

   (c) Se f e g são sobrejectivas, então $g\circ f$ é sobrejectiva.

   (d) Se $g\circ f$ é injectiva, então f é injectiva.

   (e) Se $g\circ f$ é sobrejectiva, então g é sobrejectiva.

35. Seja $(A_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Verifique se a seguinte igualdade

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$$

é verdadeira.

36. Denotando por $\mathcal{F}(A;B)$ o conjunto das funções de A em B, dados conjuntos A, B e C estabeleça uma bijecção entre os conjuntos $\mathcal{F}(A\times B;C)$ e $\mathcal{F}(A;\mathcal{F}(B;C))$.

37. Teste a reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade da relação ρ no conjunto A, quando:

    (a) $A=\mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x+y$ for um número par;

    (b) $A=\mathbb{N}$, $(x,y)\in\rho$ se $x=y^2$;

    (c) $A=\{0,1\}$ e $x\rho y$ se $x=y^2$;

    (d) A conjunto das linhas do plano e $x\rho y$ se x for paralela a y ou x coincidir com y;

    (e) $A=\{1,2,3\}$ e $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$.

38. Seja $f:A\to B$ uma função.

    (a) Prove que ρ, definida em A por

    $$x\rho y \quad \text{se e só se} \quad f(x)=f(y),$$

    é uma relação de equivalência. (ρ diz-se a equivalência núcleo de f.)

    (b) Para $A=B=\mathbb{Z}$ e $f(x)=3x^2$ determine a classe de equivalência do elemento 4 pela relação de equivalência núcleo de f.

39. Em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ considere a relação binária ρ definida por

    $$(a,b)\rho(c,d) \text{ se } a<c \text{ ou } a=c \text{ e } b\le d.$$

    (a) Mostre que ρ é uma relação de ordem em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. É total?

    (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, ínfimo, majorantes, máximo, supremo, dos seguintes subconjuntos X de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

        i. $X=\{1\}\times\mathbb{N}$;

        ii. $Y=\mathbb{N}\times\{1\}$;

        iii. $Z=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\,n+m=10\}$;

40. Considere a relação de inclusão $\subseteq$ no conjunto das partes do conjunto $A=\{1,2,3\}$.

    (a) Mostre que $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, mas não uma cadeia.

    (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, ínfimo, majorantes, máximo e supremo, dos conjuntos:

        i. $X=\{S\subseteq A\,;\,1\in S\}$;

        ii. $X=\{S\subseteq A\,;\,2\notin S\}$;

        iii. $X=\{S\subseteq A\,;\,S \text{ é um conjunto singular}\}$.

41. Seja A um conjunto.

    (a) $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ tem elemento mínimo? Qual?

    (b) E elemento máximo? Indique-o.

    (c) Sejam X e Y subconjuntos arbitrários de A. Prove que o ínfimo e o supremo de $\{X,Y\}$ existem. Indique esses elementos.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 5

CAPÍTULO I: Fundamentos

42. Dado um conjunto X com n elementos, determine o número de funções injectivas de $\{1, 2, \cdots, n\}$ em X.

43. Quantos subconjuntos com p elementos possui um conjunto X com n elementos?

44. Prove que, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

45. Prove que, se X é um conjunto infinito numerável, então o conjunto das partes finitas de X também é infinito numerável.

46. Defina uma função sobrejectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.

47. Obtenha uma decomposição
$$\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \cdots$$
de forma que os conjuntos $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ sejam infinitos e disjuntos dois a dois.

48. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m \cdot (2n - 1)$. Prove que f é uma bijecção.

49. Prove que um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é limitado se e só
$$\exists b \in \mathbb{R} \;\; : \;\; \forall x \in X \;\; |x| \leq b.$$

50. Prove que todo o subconjunto finito não vazio de $\mathbb{R}$ tem máximo e mínimo.

51. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e α um majorante de A.
    (a) Mostre que as seguintes afirmações se equivalem:
        (i) α é o supremo de A;
        (ii) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A \; : \; x > \alpha - \varepsilon$;
        (iii) $\forall x \in A \;\; (x = \alpha \;\vee (\, \exists x' \in A \; : \; x' \in]\, x, \alpha\,]\,)\,)$.
    (b) Formule as correspondentes caracterizações de ínfimo de A.

52. Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e α o supremo de A.
    (a) Determine o conjunto dos majorantes de A;
    (b) Se $x \in \mathbb{R}$ for tal que $x < \alpha$, o que pode concluir sobre x? E se $x > \alpha$?

53. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.
    (a) Suponha que $A \subseteq B$. Prove que:
        i. Se α é um majorante de B, também é um majorante de A.

ii. Se A for não vazio e B for limitado superiormente, então $\sup A \leq \sup B$.

(b) Mostre que, se α é um majorante de A e β é um majorante de B, então $\max\{\alpha, \beta\}$ é um majorante de $A \cup B$.

54. Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que

$$\forall x \in A \ \ \forall y \in B \ \ x < y.$$

Prove que:

(a) $\sup A \leq \inf B$;

(b) pode ocorrer $\sup A = \inf B$;

(c) se $\sup A = \inf B$, então

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists x \in A \ \ \exists y \in B \ : \ x + \delta > y;$$

(d) a condição necessária da alínea anterior é também suficiente.

55. Prove que um subconjunto de $\mathbb{R}$ é aberto se e só se é reunião de intervalos abertos.

56. Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos e/ou fechados:

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

(d) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (e) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

57. Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, A diz-se *vizinhança de x* se x for ponto interior de A. Mostre que:

(a) A intersecção de duas vizinhanças de x ainda é uma vizinhança de x.

(b) Se x e y são números reais distintos, então existem uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

(c) Se $\alpha = \sup A$, então A e $\mathbb{R} \setminus A$ não são vizinhanças de α.

58. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Prove que, se $\alpha = \sup A$ e $\alpha \notin A$, então α é ponto de acumulação de A.

59. Determine o conjunto dos pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) $\mathbb{Z}$ (b) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $]0, 1]$.

60. Dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$:

(a) infinito sem pontos de acumulação;

(b) com exactamente um ponto de acumulação;

(c) com um conjunto de pontos de acumulação numerável;

(d) numerável com um conjunto de pontos de acumulação não numerável.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 6

CAPÍTULO II: Limites

61. Prove que cada uma das sucessões cujo termo geral se indica a seguir é limitada.

    Estude a monotonia destas sucessões.

    (a) $x_n = \dfrac{2n}{3n+16}$; (b) $x_n = \dfrac{100}{n} + 2(-1)^n$;

    (c) $x_n = \begin{cases} 10 & \text{se } n = 1 \\ \frac{(-1)^n n - 8}{3n-2} & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$

62. Verifique que as seguintes sucessões não são limitadas:

    (a) $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $((-1)^n n^2 + 2n)_{n\in\mathbb{N}}$.

63. Sejam X um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e s o seu supremo. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para s.

64. (a) Sejam X um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para a.

    (b) Conclua que qualquer número real é limite de uma sucessão de números racionais e limite de uma sucessão de números irracionais.

65. Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

    (a) Mostre que (x_n) é uma sucessão crescente.

    (b) Prove que, para todo o número natural n, $x_n \leq 2$. (Sugestão: Mostre que $n! \geq 2^{n-1}$.)

    (c) Será (x_n) uma sucessão convergente? Justifique.

66. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais.

    (a) Mostre que, se (x_n) for convergente e $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, então a sucessão $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é também convergente, com limite $|a|$.

    (b) Dê um exemplo que mostre que a recíproca pode ser falsa quando $a \neq 0$.

67. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

    (a) Toda a sucessão convergente é limitada.

    (b) Toda a sucessão limitada é convergente.

    (c) Toda a sucessão convergente é monótona.

    (d) Toda a sucessão de termos positivos que tende para 0 é monótona decrescente (a partir de certa ordem).

    (e) Para que uma sucessão seja limitada basta que possua uma subsucessão limitada.

    (f) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < 0$, então tem-se $u_n < 0$ a partir de uma certa ordem.

(g) Se $\lim_{n\to\infty} u_n \leq 0$, então tem-se $u_n \leq 0$ a partir de uma certa ordem.

(h) Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente e se $u_n < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} u_n < 0$.

(i) Se uma sucessão convergente é soma de duas sucessões, então cada uma das sucessões parcelas também é convergente.

68. Usando dois processos, a álgebra dos limites e a definição de limite, verifique as seguintes igualdades:

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+n}{1-n^2} = 0$ (quando $n \geq 2$);

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n-7}{\pi - n} = -2$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n + \sin(\frac{n\pi}{3})}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

69. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as subsucessões definidas por $u_n = x_{2n}$ e $v_n = x_{2n-1}$. Mostre que:

(a) Se $a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} v_n = a$, então também $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(b) Se $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$, então também $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

70. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

(a) Toda a sucessão superiormente ilimitada tende para $+\infty$.

(b) Toda a sucessão que tende para $+\infty$ é crescente (a partir de uma certa ordem).

(c) Toda a sucessão monótona e não limitada inferiormente tende para $-\infty$.

(d) Toda a sucessão crescente tende para $+\infty$.

71. Mostre, usando a definição, que:

(a) $\lim_{n\to\infty} (n - n^2) = -\infty$;

(b) $\lim_{n\to\infty} (2n + (-1)^n n) = +\infty$.

72. Estude a convergência das sucessões de termo geral

(a) $u_n = \begin{cases} 1 - \frac{4}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n^2-3n-2}{n^2+n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$

(b) $u_n = \begin{cases} (-1)^n + \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \cos((n-1)\pi) & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$

(c) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ (-1)^n \frac{1}{n} & \text{se } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ (\frac{1}{\pi})^n & \text{se } n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

(d) $u_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{\sin n}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

73. Descubra o erro do seguinte raciocínio:

Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (n parcelas). Como o limite da soma é igual à soma dos limites, caso existam os limites das parcelas, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Como o limite é único, tem-se $0 = 1$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 7

CAPÍTULO II: Limites

74. Usando o Teorema das sucessões enquadradas, determine o limite das sucessões:

(a) $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $u_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 7^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2}$, $n \in \mathbb{N}$;

(d) $u_n = \displaystyle\sum_{i=4}^{n+6} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+i}}$, $n \in \mathbb{N}$.

75. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + (-3n) + 1}{\sqrt{n^4+1}}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)} - n$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+5}4n+1}$;

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2 - 3\sqrt{n+1} + n}{\sqrt{n^3} - n^2}$ $(n \geq 2)$;

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n+19)}{\log n}$ $(n \geq 2)$;

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$;

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3n}\right)^3$;

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -n(16 + \cos(\log n))$;

(j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n!(1 + \sin^2 n)$;

(k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 \sin^2 \frac{1}{n}$.

76. Indique, quanto à convergência, o comportamento da sucessão $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $a \in \mathbb{R}$.

77. Indique sucessões (x_n) e (y_n) de números reais que tendam para $+\infty$ e tais que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = -\infty$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \infty$ (sem ser $+\infty$ nem $-\infty$);

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a$, sendo a uma número real previamente fixado.

(e) $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão divergente, mas limitada.

(f) $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada mas não tende para ∞.

78. Dê exemplos de sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tendam para $+\infty$ e 0, respectivamente, e tais que

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$, sem ser $+\infty$ e $-\infty$;

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = a$, sendo a um número real qualquer, previamente dado;

(e) $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente mas limitada;

(f) $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente mas não tende para ∞.

79. Dê exemplos:

(a) De uma sucessão limitada com quatro pontos de acumulação.

(b) De uma sucessão não limitada com quatro pontos de acumulação.

80. (a) Mostre que se $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(b) Se $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, encontre os primeiros oito termos da sucessão (a_n).

(c) Use a alínea (a) para provar que (a_n) é convergente.

81. Foram investidos 1000 euros a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente.

(a) Indique o valor v_n do investimento ao fim de n anos.

(b) Verifique se a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

82. Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência da seguinte forma:

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{x_n}},\ n \geq 1.$$

(a) Prove, por indução, que:

i. $x_{n+1} \geq x_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

ii. $x_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(b) Conclua que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

(c) Mostre que o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é raiz do polinómio $P(x) = x^4 - 4x^2 - x + 4$.

83. Mostre que cada uma das sucessões a seguir definidas é convergente e calcule o respectivo limite:

(a) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) dado $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < 1$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

84. Sejam a e b números positivos, com $a > b$. Denotemos por a_1 a sua média aritmética, e por b_1 a sua média geométrica; isto é,

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Iterando este processo, obtemos duas sucessões, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(a) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(A este limite Gauss chamou *média aritmética-geométrica* dos números a e b.)

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 8

CAPÍTULO II: Limites

85. Represente graficamente as seguintes funções e indique o seu domínio e o seu contradomínio:

(a) $a(x) = 1 + |x|$ (b) $b(x) = |\sin x|$ (c) $c(x) = \sin |x|$

(d) $d(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \notin \mathbb{Z}_0^+ \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$ (e) $e(x) = \begin{cases} -x-5 & \text{se } x \geq 1 \\ -1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$ (g) $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(h) $h(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa a *característica* de x, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x.

86. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c constantes reais. Analise a representação gráfica de f, consoante o valor dos parâmetros a, b e c.

87. Sendo $f(x) = kx^2 + 5x + k$, determine k de modo que $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

88. Sendo $f(x) = kx^2 + 3x + 2k + 1$, determine k de modo que $\sqrt{f(x) + 2}$ tenha domínio $\mathbb{R}$.

89. Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ (b) $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ (c) $h(x) = \sqrt{-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(d) $j(x) = 1 + 2\cos x$ (e) $l(x) = \ln \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ (f) $m(x) = \dfrac{\tan(x+1)}{\sqrt[4]{x}}$

(g) $n(x) = \sqrt{x} - \dfrac{2^x}{x}$ (h) $o(x) = e^{\sqrt{x+1}} - \sin x$

90. Diga quais dos seguintes conjuntos de pontos são gráficos de funções:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 4\}$; (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = -\sqrt{3 - x^2}\}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy = 1\}$; (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| + |y| = 1\}$;

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,;\, y \text{ é divisor de } x\}$; (f) $F = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \,;\, x = \sin y\}$.

91. Sendo $f : A \to B$, identifique as seguintes definições:

(a) $(\forall x \in A \; \exists y \in B \;:\; f(x) = y) \;\wedge\; (\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2))$.

(b) $(\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)) \;\wedge\; (\forall y \in B \; \exists x \in A \;:\; f(x) = y)$.

(c) $\forall x \in A \; -x \in A \;\wedge\; f(-x) = f(x)$.

(d) $\forall x \in A \; -x \in A \;\wedge\; f(-x) = -f(x)$.

92. Verifique quais das seguintes funções são pares e quais são ímpares:

(a) $f(x) = \ln \dfrac{2+x}{2-x}$;   (b) $g(x) = \dfrac{2}{3}(e^x + e^{-x})$;

(c) $h(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2}$;   (d) $l(x) = \sin^2 x - \cos(x+\pi)$.

93. Verifique, usando a definição, se são ou não bijectivas as seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{7x+9}$ (b) $g(x) = 5 - 3x^2$ (c) $h(x) = \tan x,\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

94. Determine em que casos a função é invertível e, quando o for, determine a sua inversa e faça a representação gráfica de ambas as funções:

(a) $f(x) = \sin x$;   (b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$;   (c) $h(x) = x|x|$;

(d) $i(x) = 3x^2 - 2$;   (e) $j(x) = e^{x+1}$.

95. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, determine $f(\mathbb{R})$, $f(A)$, $f^{-1}(B)$ e $f^{-1}(C)$, quando $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq 4\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}\,;\, y > 3\}$ e $C = \{y \in \mathbb{R}\,;\, y < -3 \ \vee\ y = 1\}$.

96. Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Indique o domínio e a expressão analítica das funções $h = f+g$, $j = f \cdot g$, $k = f/g$, $l = g/f$ e $m = \sqrt{f}$.

97. Determine o domínio e a expressão analítica de $g \circ f$, sendo:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

(b) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \sqrt{2x+3}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = x^2 - 1$;

(d) $f(x) = |x|$ e $g(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{se } x > -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < -1. \end{cases}$

98. Sendo $f(x) = x^4$ e $g(x) = 4^x$, determine o domínio, o contradomínio e a expressão analítica das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 9

CAPÍTULO II: Limites

99. Demonstre, usando a definição, que:

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{2}(3x-2) = 5$; (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} [\sin x] = 0$; (c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{x-3} = -6$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$; (e) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$; (f) $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$;

100. (a) Mostre que, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existir e for L, então também existe $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ e é igual a $|L|$.

(b) Dê exemplos que mostrem que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ pode existir não existindo $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(c) Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se e só se $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

101. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva e $a \in D'$. Mostre que, se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$, então existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ e é igual a $\frac{1}{L}$.

102. Mostre que não existem os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

103. Estude a existência de limite, nos pontos indicados, das funções definidas por:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}, x = 0$;

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{7+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{-7+2\sqrt{1-x}}{4\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 1 \end{cases}, x = 1$;

(c) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x = 0$; (d) $f(x) = \frac{x+2+|x+2|}{x^2-4}$, $x = 2$, $x = -2$.

104. Use o Teorema das funções enquadradas para provar que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}} = 0$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$, sendo f tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq c \in \mathbb{R}$.

105. Demonstre, usando a definição, que:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x^2} = 1$; (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{7+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$; (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$;

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-2) = +\infty$; (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+4) = +\infty$; (f) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2}{|x-4|} = +\infty$.

106. Seja p um polinómio real de grau n; isto é,

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Estude $\lim\limits_{x\to +\infty} p(x)$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} p(x)$.

107. Determine, usando propriedades dos limites, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 + x\sin\frac{1}{x}}{(x+3)^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a < b)$; (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3^x - 2^x}{3^{x+1}+2^{x-3}}$.

108. Verifique as seguintes igualdades, usando a teoria das sucessões:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1$; (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-a^x}{x+a^x} = -1$ $(a > 1)$.

109. Mostre que não existem os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x+3|}{9-x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin\dfrac{1}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x$; (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin x$;

(g) $\lim\limits_{x\to a} \cos\dfrac{1}{x-a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

110. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x^3-x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\right)^x$;

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4-3}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3})$; (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - \cos x \ln x)$;

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$.

111. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

Mostre que f não tem limite em nenhum ponto.

112. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \text{ racional} \\ (x-1)^2-2 & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

Estude o limite de f nos pontos 1 e 2.

113. Determine os pontos a do domínio de f para os quais existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, quando:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ racional} \\ \sin x & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \text{ racional} \\ \cos x & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

(c) $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{N},\ p < q,\ \text{mdc}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 10

CAPÍTULO III: Continuidade

114. Estude a continuidade da funções seguintes, indicando, nos pontos de descontinuidade, o tipo de descontinuidade que ocorre:

(a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2+|x+2|}{x^2-4} & \text{se } x \neq 2 \text{ e } x \neq -2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{se } x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \text{se } x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln(\sin x)} & \text{se } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{2\pi - x} & \text{se } x \in \left]\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right[\setminus \{2\pi\} \\ 0 & \text{se } x = 2\pi \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ (x-1)^2 - 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

115. Encontre uma bijecção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos.

116. Prove que a equação $x^3 - 9x^2 + 7$ tem três raízes, uma em cada um dos intervalos abertos $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e $]6, 9[$. Melhore o resultado aproximando-as até às décimas.

117. Seja $f(x) = \tan x$. Verifique que $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ e $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1$. Pode concluir que existe $c \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ tal que $f(c) = 0$?

118. Prove que existe um número real c tal que:

(a) $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$ e $\sin c = 0.7$;

(b) $\dfrac{\pi}{2} < c < \pi$ e $\cos c = -\dfrac{3}{4}$;

(c) $c^3 = 2$;

(d) $c > 0$ e $c^2 = 3$.

119. (a) Mostre que:
    i. a equação $x^4 + x - 1 = 0$ tem uma solução em $\mathbb{R}$;
    ii. o polinómio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2$ admite pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

    (b) Será que todo o polinómio de grau 4 tem uma raiz real?

120. Mostre que:

    (a) a equação $x^3 - x - 1 = 0$ tem uma solução em $\mathbb{R}$.

    (b) Qualquer polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

    Conclua que, para cada $a \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ ímpar, existe pelo menos um número real b tal que $b^p = a$.

121. (a) Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$. Mostre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (A um ponto x tal que $f(x) = x$ chama-se *ponto fixo* da função f.)

    (b) Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0, 1[\to [0, 1[$ que não tenha nenhum ponto fixo.

122. Seja f uma função contínua em $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Prove que existe $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $f(c) = \cos c$.

123. Seja $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$.

    (a) Verifique que $f(-1) > 0$ e que $f(1) < 0$.

    (b) A função anula-se nalgum ponto entre -1 e 1?

    (c) Compare as suas conclusões com o Teorema do Valor Intermédio.

124. Considere a função definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

    (a) Calcule $f(0)$ e $f(3)$.

    (b) Mostre que existe pelo menos um $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0$.

    (c) Explique porque é que esta situação não contradiz o Teorema do Valor Intermédio.

125. Dê exemplos de funções invertíveis, com pontos de descontinuidade, cujas inversas sejam funções contínuas.

126. Verifique se a função f indicada em seguida é limitada e determine os seus extremos, caso existam.

    (a) $f : [-1, 2[\to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 1$;

    (b) $f(x) = \tan x$, com $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$;

    (c) $f :]0, 2] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{4}{x^2}$;

    (d) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$.

127. Indique os extremos da função

$$\begin{array}{rcl} f : [0, 2] \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x-1}. \end{array}$$

    A função toma todos os valores entre eles? Justifique a sua resposta.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 11

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

128. Calcule, usando a definição, a derivada da função f no ponto a indicado:

   (a) $f(x) = x^2 - 4$, $a = 0$;

   (b) $f(x) = 9 - x^2$, $a = 1$;

   (c) $f(x) = 3t^2 - t$, $a = -1$;

   (d) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$, $a = 1$;

   (e) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $a = 1$.

129. Usando a definição, determine a função derivada das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \cos x$;

   (b) $f(x) = e^x$ (sabendo que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$);

   (c) $f(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$; explique como pode concluir imediatamente o resultado do gráfico de f;

   (d) $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$; explique como pode concluir imediatamente o resultado do gráfico de f;

   (e) $f(x) = x|x|$;

   (f) $f(t) = t^2 - 1$;

   (g) $f(x) = x - x^2$;

   (h) $g(u) = \frac{1}{u^2}$.

130. Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo o $x \in X$ e $a \in X \cap X'$. Mostre que, se $f(a) = h(a)$, f e h são deriváveis em a e $f'(a) = h'(a)$, então g é derivável em a e $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.

131. Sejam $f(x) = x^2$ e $a = 3$.

   (a) Qual a função linear $l(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ quando x está próximo de a?

   (b) Use $l(x)$ para obter um valor aproximado de $(3.12)^2$ (cujo valor real é 9.7344).

132. Para cada uma das funções f seguintes, use a aproximação linear em a para calcular um valor aproximado de x. Compare estes valores com os valores obtidos numa calculadora.

   (a) $f(x) = x^3$, $a = 1$, $x = (1.06)^3$;

   (b) $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $a = 2$, $x = \frac{2.04}{1+2.04}$;

   (c) $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{3}$, $x = \cos 1$;

   (d) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{6}$, $x = \sin 0.5$.

133. Em cada um dos casos seguintes, escolha uma função e um ponto a adequados, e use a aproximação linear dessa função em a para obter um valor aproximado dos seguintes números:

   (a) $(3.026)^2$;

   (b) $\frac{1}{(0.97)^3}$;

   (c) $\sqrt[4]{15}$;

   (d) $\tan 3$;

   (e) $\sin 0.045$;

   (f) $\tan 0.092$.

134. Use o Método de Newton com o valor inicial x_1 dado, para encontrar a terceira aproximação, x_3, da raiz da equação dada:

(a) $x^3 + x + 1 = 0$, $x_1 = -1$; (b) $x^3 - x^2 - 1 = 0$, $x_1 = 1$;
(c) $x^4 - 20 = 0$, $x_1 = 2$; (d) $x^7 - 100 = 0$, $x_1 = 2$.

135. Explique porque é que o Método de Newton não funciona para encontrar as raízes da equação $x^3 - 3x + 6 = 0$ se o valor inicial escolhido for $x_1 = 1$.

136. Determine a função derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) $f(x) = \tan x - 3\sec x$; (b) $f(x) = \cot x + 2\csc x$;
(c) $f(x) = \sin x \cos x$; (d) $f(x) = \sqrt[4]{x}(x^2 + 1)$;
(e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3+1}$; (f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cos x - x^{-\frac{1}{3}} \sin x$.

137. Determine as funções derivadas das funções seguintes:

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ -5 & \text{se } x = 0 \\ \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \le 0 \\ -x^2 + 4x & \text{se } 0 < x < 2 \\ 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = 1 + |\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$;

(e) $f(x) = \begin{cases} x + \ln(2 - x) & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$

138. Usando o Teorema da derivada da função composta, determine a derivada das funções definidas por:

(a) $f(x) = \ln x$; (b) $f(x) = \sin\sqrt{x}$; (c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

139. Use as identidades

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

e o Teorema da derivada da função composta para calcular a derivada da função cos à custa da derivada da função sin.

140. Dê uma demonstração da fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

usando a fórmula do produto e o Teorema da derivada da função composta.

141. Cada uma das equações seguintes define uma ou mais funções y na variável x. Usando o regra da derivada da função implícita, determine y':

(a) $x^2 + y^2 = 3$; (b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$; (c) $y = (x + y)^2$;
(d) $\sin(x + y) = \sin x + siny$; (e) $x = \frac{y-1}{y+1}$; (f) $x^2 - y^2 = \frac{x^2}{y^2}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 12

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

142. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$.

    (a) Verifique que f' toma valores positivos e negativos mas nunca se anula. Estará este facto em contradição com o Teorema de Darboux?

    (b) Mostre que $f(-1)=f(1)$ mas $f'(c)\neq 0$ para todo o c no intervalo $]-1,1[$. Estará este facto em contradição com o Teorema de Rolle?

143. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ se $x\neq 0$ e $f(0)=0$.

    (a) Calcule $f'(x)$ quando $x\neq 0$.

    (b) Verifique que não existem $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

    (c) Poder-se-á concluir da alínea anterior que não existe $f'(0)$? Verifique, usando a definição, se f é derivável em 0.

144. O que acontece ao tentarmos aplicar o Teorema de Rolle à função $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ no intervalo $[-1,1]$?

145. Aplicando o Teorema de Rolle à função $f(x)=(x-1)\tan x$ no intervalo $[0,1]$, mostre que a equação $\sin 2x = 2-2x$ tem pelo menos uma solução entre 0 e 1.

146. Seja $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+1)$.

    (a) Porque é que $f'(x)$ tem que ser 0 para algum x entre 1 e 2?

    (b) Calcule $f'(x)$ e confirme, usando o Teorema de Darboux, que a equação $f'(x)=0$ tem uma solução entre 1 e 2.

147. (a) Explique porque é que a equação $x^3+x-1=0$ não pode ter mais do que uma raiz real.

    (b) Use o Teorema de Rolle para provar que a equação $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ não pode ter mais do que uma solução real quando $\beta^2<3\alpha\gamma$.

148. Suponha que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e que $f'(x)$ existe e não se anula em $]a,b[$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, prove que a equação $f(x)=0$ tem uma e uma só solução em $]a,b[$.

149. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a,b[$ tal que $f(a)=f(b)=0$. Mostre que existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=f(c)$. (Sugestão: Use a função $g(x)=f(x)e^{-x}$.)

150. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$, duas vezes derivável em $]a,b[$ e que se anula em três pontos distintos de $[a,b]$. Mostre que existe $c\in]a,b[$ tal que $f''(c)=0$.

151. Considere a função f definida por $f(x)=\begin{cases}(\ln|x|)+1 & \text{se } x<0,\\ (\ln x)-7 & \text{se } x>0.\end{cases}$

(a) Verifique que f possui derivada em todos os pontos do domínio e que $f'(x) = (\ln|x|)'$.

(b) Verifique que a função $h(x) = f(x) - \ln|x|$ não é constante.

(c) Estarão estes resultados em contradição com o Teorema de Lagrange? Porquê?

152. Mostre que, ao aplicar o Teorema do Valor Médio à função $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ num intervalo $[a, b]$ qualquer, o ponto x onde a tangente ao gráfico é paralela à recta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é o ponto médio do intervalo $[a, b]$.

153. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) Se I for um intervalo contendo 0 no seu interior, não existe nenhuma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ cuja derivada seja a função $g : I \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{se } x \neq 0, \\ -5 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(b) Existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja derivada é a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com

$$h(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x < 3, \\ -1 & \text{se } x = 3, \\ \frac{1}{x-3} & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

(c) Se existirem as derivadas laterais de uma função f num ponto a do seu donínio, então f é contínua em a.

(d) Existem uma função derivável em $[-1, 1]$ e $c \in]-1, 1[$ tais que o declive da tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é igual a $\frac{1}{2}(f(1) - f(-1))$.

(e) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for constante num subconjunto Y de X, então, em cada ponto de Y, a derivada de f existe e é zero.

(f) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for constante num intervalo Y contido em X, então, em cada ponto de Y, a derivada de f existe e é zero.

(g) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for constante num aberto Y de X, então, em cada ponto de Y, a derivada de f existe e é zero.

(h) Uma função contínua num ponto é derivável nesse ponto.

(i) Sejam f e g duas funções deriváveis num ponto de acumulação a do seu domínio. Se $f(a) = g(a)$, então $f'(a) = g'(a)$.

(j) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem duas funções deriváveis em todos os pontos do domínio e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in X$, então $f = g$.

(k) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem duas funções deriváveis em todos os pontos do domínio e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in X$, então $f - g : X \to \mathbb{R}$ é uma função constante.

(l) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X \cap X'$. Se $f'(a) > 0$, então existe um intervalo aberto I, contendo a, tal que f é crescente em $X \cap I$.

(m) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável num ponto $a \in X \cap X'$. Se $f'(a) = 0$, então não existe nenhum intervalo aberto I, contendo a, tal que f seja monótona em $X \cap I$.

(n) A equação $\cos x = 2x$ tem uma única solução em $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 13

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

154. Considere as funções cujos gráficos estão esboçados em seguida. Com a excepção da função da alínea (l), todas as funções têm a sua derivada também representada. Identifique cada uma das derivadas, justificando a sua resposta.

(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

(g) (h) (i)

(j) (k) (l)

155. Diz-se que a função $F : X \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : X \to \mathbb{R}$ se, para todo o $x \in X$, $F'(x) = f(x)$.

Determine todas as primitivas das funções seguintes:

(a) $f(x) = 1 - x$; (b) $f(x) = x^2 - 4$; (c) $f(x) = x - |x|$;

(d) $f(x) = \sin x$; (e) $f(x) = \cos x$; (f) $f(x) = \tan x$.

156. Determine a equação de uma curva que passa na origem e que cuja recta tangente ao ponto (x, y) tem declive $2(x-1)$.

157. Confirme que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin^2 x$, é uma primitiva de $g(x) = 2\sin x \cos x$. Da igualdade $2\sin x \cos x = \sin 2x$ resulta que outra primitiva de g é dada por $h(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$. Atendendo a um dos corolários do Teorema do Valor Médio, as funções f e h diferem por uma constante. Qual é essa constante?

158. As funções $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e $g(x) = 2$ têm a mesma derivada em todos os pontos x diferentes de zero. No entanto, a sua diferença não é uma função constante. Explique porque é que esta situação não invalida o corolário do Teorema do Valor Médio referido no exercício anterior.

159. Calcule os limites das funções seguintes, nos pontos indicados:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{1}{x}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

160. (a) Usando a Regra de L'Hôpital, prove que:

i. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$, qualquer que seja o número real positivo α;

ii. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, qualquer que seja o número natural n.

(b) Usando a alínea anterior, conclua que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

161. Verificando que não se pode aplicar a Regra de L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

162. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 1$. Determine os seus polinómios de Taylor de ordem 4 no ponto 0 e no ponto 1.

163. Determine o polinómio de Taylor da função $f(x) = x + \frac{1}{x}$ de ordem 3 no ponto -1.

164. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função três vezes derivável tal que $f''(x) + xf'(x) + x^2 = 1$, $f'(0) = 1$, $f(0) = -1$. Determine o polinómio de Taylor, de ordem três, de f em 0.

165. Determine o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto zero, da função f, quando:

(a) $f(x) = x^3 - 1$; (b) $f(x) = e^x$; (c) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(d) $f(x) = \ln(1+x)$; (e) $f(x) = \frac{1}{2-x}$; (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

166. Determine o polinómio de Taylor:

(a) de ordem $2n$, quando $f(x) = \cos x$, no ponto 0;

(b) de ordem $2n+1$, para $f(x) = \sin x$, no ponto 0.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 14

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

167. (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n no ponto 0, com resto de Lagrange, da função $\ln(1+x)$.

(b) Usando a fórmula anterior, demonstre que

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

168. Considere a função $f(x) = e^x$ e o seu polinómio de Taylor $p_n(x)$ (já calculado no Exercício 165) e seja $r_n(x) = e^x - p_n(x)$.

(a) Mostre que

$$|r_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

(b) Use o polinómio de Taylor de ordem 4 para calcular um valor aproximado de $e^{0.2}$.

(c) O valor de e pode ser calculado tomando $x = 1$ na fórmula de Taylor da função f.

i. Usando o facto de $e < 3$, explique porque porque é que

$$|r_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

ii. Qual o valor de n que guarante que no valor estimado de e as três primeiras casas decimais estão correctas?

(d) Determine um valor aproximado de $\sqrt{e}$ a menos de 10^{-3}.

169. No Exercício 166 determinou-se o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto 0, da função sin. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n desta função, no ponto 0, e mostre que

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

170. (a) Explique porque é que $|\sin x - x| \leq \frac{1}{6}|x|^3$.

(b) Deduza que

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leq \frac{1}{6}|x|^2$$

para todo o $x \neq 0$ e use esta desigualdade para provar que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

171. Dê um exemplo de uma função derivável, definida num intervalo, que tenha um máximo nesse intervalo e cuja derivada nunca se anule.

172. Será que a função $f :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ definida por $\dfrac{\sin x}{x}$ atinge um máximo e um mínimo em $]0,\pi[$? Justifique.

173. Determine, caso existam, os extremos locais das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 1$, $x \in [-2, 3[$;

(b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x \in]1, +\infty[$;

(c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 3, \\ -5 & \text{se } x = 3, \\ (x-2)^2 - 9 & \text{se } x > 3; \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 4$.

174. Faça o estudo completo das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; (b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; (c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;

(d) $f(x) = \frac{4(x-1)}{x^2}$; (e) $f(x) = \sqrt{|x|}$; (f) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

175. Faça o estudo completo das seguintes funções trigonométricas:

(a) $y = \tan x$; (b) $y = \cot x$; (c) $y = \sec x$; (d) $y = \csc x$.

176. Seja $y = \sqrt{3 - x}$.

(a) Verifique que $y' = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$.

(b) Use a igualdade anterior para provar que $y'' = \frac{3(x-4)}{4(3-x)^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Analise a afirmação: Existe um ponto de inflexão em $x = 4$ porque y'' muda aí de sinal. Qual é a afirmação correcta a fazer sobre o sinal de y''?

(d) Esboce o gráfico de y.

177. A equação $y^2 = 4x$ representa uma parábola. Use derivação implícita na análise da sua concavidade e esboce o gráfico.

178. A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa uma hipérbole. Use derivação implícita para provar que $y'' = \frac{b^4}{a^2 y^3}$ e discuta a sua concavidade.

179. O gráfico de $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ é um *hipociclóide com quatro cúspides.*

(a) Verifique que

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}}}.$$

(b) Esboce a curva.

180. Faça o estudo completo das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} e - \frac{1}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1-x}{e^x} & \text{se } x > 0; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{4}\ln x & \text{se } x > 1, \\ \sqrt{5 - x} & \text{se } x \leq 1; \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq -1, \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 < x < 1, \\ 1 + e^{-x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 Folha 15

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

181. As funções f e g definidas por $f(x) = \sin(\arcsin x)$ e $g(x) = \arcsin(\sin x)$ são diferentes. Justifique esta afirmação.

182. Considere a função arcsec, definida como a inversa da restrição da função sec ao conjunto $[0, \frac{\pi}{2}[\cup [\pi, \frac{3\pi}{2}[$.

    (a) Mostre que $(\text{arcsec}\, x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

    (b) Faça o estudo completo da função.

183. Use derivação para mostrar que:

    (a) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;

    (b) $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, para todo o $x \in]-1, 1[$.

184. Use a fórmula $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ para provar as igualdades:

    (a) $\tanh^2 t + \text{sech}^2\, t = 1$ (b) $\coth^2 t - \text{csch}^2\, t = 1$.

185. Use as definições de sinh e de cosh para provar as igualdades:

    (a) $\sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v$;

    (b) $\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v$.

186. Mostre que:

    (a) $(\tanh x)' = \text{sech}^2\, x$; (b) $(\coth x)' = -\text{csch}^2\, x$;

    (c) $(\text{sech}\, x)' = -\text{sech}\, x \tanh x$; (d) $(\text{csch}\, x)' = -\text{csch}\, x \coth x$.

187. Use a fórmula de Euler
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
para concluir que $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Prove então que
$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

188. De Moivre provou que, para qualquer número natural n, se tem
$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

    (a) Use indução matemática e as fórmulas para $\sin(u + v)$ e $\cos(u + v)$ para provar esta fórmula.

    (b) Prove que, para qualquer número natural n,
$$(\cosh t + \sinh t)^n = \cosh(nt) + \sinh(nt).$$

189. Gera-se um cilindro circular recto pela rotação de um rectângulo de perímetro P em torno de um dos seus lados. Quais as dimensões do rectângulo que gerará um cilindro de volume máximo?

190. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

191. Prove que, para números reais a, b e c quaisquer, se tem
$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$
estudando a função $f(x) = \frac{a+b+x}{\sqrt[3]{abx}}$.

192. Encontre a área do maior rectângulo que pode ser inscrito num semi-círculo de raio r.

193. Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

194. Na produção de umas caixas, uma companhia de embalagens pinta a base, o topo e dois lados de branco e os restantes dois lados de vermelho. Se a tinta vermelha custar 50% mais do que a branca, quais as dimensões da caixa com volume V que tem menor custo de pintura?

195. O número de bactérias numa determinada cultura cresce de forma proporcional à população. O número inicial de bactérias é 20000, sendo 48000 ao fim de 3 horas.
    (a) Encontre a função que apresenta a população de bactérias como função do tempo.
    (b) Qual é a população ao fim de 7 horas?
    (c) Quanto tempo é necessário para a população atingir um milhão?

196. (a) Mostre que, se $y = ce^{kx}$, onde c e k são constantes, então $y' = ky$, isto é, a função y varia com uma razão proporcional a si própria.
    (b) Suponha agora que $y = f(x)$ é uma função que varia proporcionalmente a si própria, isto é, $y' = ky$, onde k é constante.
        i. Verifique que, se $g(x) = f(x)e^{-kx}$, então $g'(x) = 0$.
        ii. Conclua que $f(x) = ce^{kx}$ para alguma constante c.
        iii. A função nula tem a propriedade descrita acima (isto é, varia em proporção com ela própria). Isto entra em contradição com a alínea anterior?

197. (a) Mostre que, se r é uma raiz real da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então a função $y = e^{rx}$ é solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.
    (b) Use a alínea anterior para obter duas soluções de cada uma das equações diferenciais:
        i. $y'' - y = 0$;
        ii. $y'' - 3y' + 2y = 0$;
        iii. $y'' - y' = 0$.
    (c) Mostre que as funções $y = e^x$ e $y = xe^x$ são ambas soluções da equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.
    (d) Mostre que $y = e^x \sin x$ e $y = e^x \cos x$ são ambas soluções da equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.
    (e) Compare estes dois últimos casos com os anteriores.