Sumários Alargados

Capítulo I: Fundamentos – o Rigor e a Demonstração em Análise[1]

1. Conjuntos e funções.

[2]

1.1. Definição. Um *conjunto* A é uma colecção de objectos, a que chamamos *elementos* de A. Se x é um elemento de A, dizemos que *x pertence a A* e escrevemos $x \in A$.

1.2. Definição. Dizemos que um conjunto A *é parte de* B, ou que A *está contido em* B, se todo o elemento de A pertencer a B; isto é,

$$\forall x \;\; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B.$$

Escreve-se então $A \subseteq B$.

Dois *conjuntos* A e B são *iguais* se e só se tiverem exactamente os mesmos elementos; logo

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$ (isto é, se existe um elemento x de B que não pertence a A), dizemos que A *está estritamente contido em* B, ou que A *é uma parte própria de* B e escrevemos $A \subset B$.

Por exemplo,

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;
- para todo o conjunto A, $\emptyset \subseteq A$.

1.3. Definição. Dado um conjunto X, designa-se por $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto das partes de* X:

$$\mathcal{P}(X) = \{A\,;\, A \subseteq X\}.$$

1.4. Exemplos.

1. Note-se que se tem sempre $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$.
2. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
3. Se $X = \{1, 2, 3\}$, então $\mathcal{P}(X)$ tem 8 elementos:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

---

[1] Para os temas

- O papel do rigor em Matemática
- O papel das demonstrações em Matemática
- Quantificadores
- Como demonstrar e como usar asserções contendo quantificadores e operadores lógicos

recomenda-se a leitura dos Capítulos 0 e 1 do livro de J. Lewin/M. Lewin, An Introduction to Mathematical Analysis.

[2] Recomenda-se a leitura do Capítulo 1 do livro de Elon Lages Lima, Curso de Análise, vol. 1.

1.5. Definições. Dados dois subconjuntos A e B de um conjunto X, a sua *reunião* é o conjunto

$$A \cup B = \{x \in X \,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\};$$

a sua *intersecção* é o conjunto

$$A \cap B = \{x \in X \,;\, x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são *conjuntos disjuntos.*

1.6. Propriedades da reunião e da intersecção. Se A, B, A', B' são subconjuntos de um conjunto X, então:

$$\begin{array}{ll}
A \subseteq A \cup B & A \cap B \subseteq A \\
A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \cup A = A & A \cap A = A \\
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A & A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \\
A \subseteq B \text{ e } A' \subseteq B' \Rightarrow A \cup A' \subseteq B \cup B' & A \subseteq B \text{ e } A' \subseteq B' \Rightarrow A \cap A' \subseteq B \cap B' \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{array}$$

1.7. Exercício. Demonstre as propriedades enunciadas.

1.8. Definição. Dados subconjuntos A e B de um conjunto X, a *diferença entre A e B* é o conjunto

$$A - B = \{x \,;\, x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Chamamos *complementar de A* ao conjunto $X - A$, que também designamos por $X \setminus A$ ou A^c.

1.9. Propriedades do complementar. Se A e B são subconjuntos de X, então:

$$\begin{array}{ll}
A^c = \emptyset \Leftrightarrow A = X & A^c = X \Leftrightarrow A = \emptyset \\
(A^c)^c = A & \\
(A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c
\end{array}$$

1.10. Definição. Dados conjuntos A e B, podemos formar o conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \,;\, a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

A $A \times B$ chama-se *produto cartesiano de A e B*; cada elemento (a, b) de $A \times B$ chama-se *par ordenado*, sendo a a *primeira coordenada* e b a *segunda coordenada.*

Note-se que $(a, b) = (a', b')$ se e só se $a = a'$ e $b = b'$.

1.11. Observação. Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então $A \times B = \emptyset$.

1.12. Definição. Uma *função* $f : A \to B$ é constituída por:

- um conjunto A, a que se chama *domínio de* f, e que se designa habitualmente por D_f,
- um conjunto B, a que se chama *conjunto de chegada de* f, e
- uma lei de correspondência, que permite associar a cada elemento x de A um (único) elemento $f(x)$ de B; a $f(x)$ chama-se o *valor de* f *em* x.

Duas *funções* $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são *iguais* se $A = C$, $B = D$ e

$$\forall x \in A \ f(x) = g(x).$$

1.13. Definição. O *gráfico de uma função* $f : A \to B$ é o subconjunto do produto cartesiano de A e B

$$G(f) = \{(a, b) \in A \times B \,;\, b = f(a)\},$$

que também se costuma designar por $\Gamma(f)$.

1.14. Definições. Uma *função* $f : A \to B$ diz-se:

- *injectiva* se

$$\forall x \in A \ \ \forall x' \in A \ \ f(x) = f(x') \ \Rightarrow \ x = x';$$

  isto é, a elementos diferentes f atribui valores diferentes;

- *sobrejectiva* se

$$\forall y \in B \ \ \exists x \in A \quad : \quad f(x) = y;$$

- *bijectiva* se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva; isto é,

$$\forall y \in B \ \ \exists^1 x \in A \quad : \quad f(x) = y.$$

1.15. Definições. Dada uma função $f : A \to B$, para cada subconjunto X de A podemos considerar o seguinte subconjunto de B

$$f(X) = \{f(x) \,;\, x \in X\},$$

e para cada subconjunto de B podemos considerar o subconjunto de A

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \,;\, f(x) \in Y\}.$$

Estas correspondências definem duas funções entre os conjuntos de partes de A e de B:

$$\begin{array}{rcl} f(\ ) : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & f(X) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} f^{-1}(\ ) : \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(A) \\ Y & \mapsto & f^{-1}(Y). \end{array}$$

A $f(\ )$ chamamos *função imagem directa de* f e a $f^{-1}(\ )$ chamamos *função imagem inversa de* f.

1.16. Propriedades das funções imagem directa e imagem inversa. Se $f : A \to B$ é uma função e X, X' são subconjuntos de A e Y, Y' são subconjuntos de B, então:

$$
\begin{array}{ll}
f(\emptyset) = \emptyset & f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\
f(A) \subseteq B & f^{-1}(B) = A \\
X \subseteq X' \Rightarrow f(X) \subseteq f(X') & Y \subseteq Y' \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y') \\
f(X \cup X') = f(X) \cup f(X') & f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y') \\
f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X') & f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y') \\
 & f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c
\end{array}
$$

1.17. Definição. Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são funções com $B = C$ (isto é, o domínio de g coincide com o conjunto de chegada de f), define-se a *função composição*

$$
\begin{aligned}
g \circ f : A &\to D \\
x &\mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)).
\end{aligned}
$$

1.18. Proposição. *A composição de duas funções injectivas (respectivamente sobrejectivas; bijectivas) é uma função injectiva (respectivamente sobrejectiva; bijectiva).*

1.19. Proposição. *A atribuição das imagens directas e das imagens inversas preserva a composição de funções; isto é, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então a função imagem directa de $g \circ f$ é a composição das funções imagem directa de f e de g, e analogamente para as funções imagem inversa:*

$$(g \circ f)(\ ) = g(\ ) \circ f(\ ) \qquad e \qquad (g \circ f)^{-1}(\ ) = f^{-1}(\ ) \circ g^{-1}(\ ).$$

1.20. Observação. Toda a função $f : A \to B$ se pode escrever como:

- composição de uma função injectiva com uma sobrejectiva: $f = i_{f(A)} \circ h$, onde $h : A \to f(A)$ é definida por $h(x) := f(x)$, e $i_{f(A)} : f(A) \to B$ é a inclusão.
- composição de uma função sobrejectiva com uma injectiva: $f = \pi_2 \circ g$, com $g : A \to A \times B$, $g(x) = (x, f(x))$ e $\pi_2 : A \times B \to B$ a segunda projecção.

1.21. Definições.

1. Chama-se *restrição de $f : A \to B$ a $X \subseteq A$* à função $g : X \to B$ com $g(x) = f(x)$ para todo o $x \in X$. Denota-se por vezes por $f_{|X}$.
2. Se $f : A \to B$ e $g : X \to B$ com $X \subseteq A$ e

$$\forall x \in X \;\; f(x) = g(x),$$

diz-se que f *é uma extensão de* g.

1.22. Observação. Note-se que a restrição de uma função a um subconjunto dado é única, enquanto que cada função tem em geral diversas extensões a todo o conjunto que contém o domínio.

1.23. Definições. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ duas funções.

1. A função g diz-se *inversa à esquerda de* f se $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
2. g diz-se *inversa à direita de* f se $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
3. A função g diz-se *inversa de* f se $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

1.24. Proposição. *Seja $f : A \to B$ uma função.*

1. *Se $A \neq \emptyset$, então f tem inversa à esquerda se e só se é injectiva.*
2. *A função f tem inversa à direita se e só se é sobrejectiva.*
3. *f tem função inversa se e só se é bijectiva. Nesse caso a inversa de f é única.*

1.25. Definição. Dados conjuntos L e X, uma família de elementos de X indexada por L é uma função

$$\begin{aligned} x : L &\to X \\ \lambda &\mapsto x_\lambda, \end{aligned}$$

que habitualmente designamos por $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

1.26. Exemplos.

1. Famílias definidas por $L = \{1, 2\}$ não são mais do que pares ordenados. Podemos pois identificar $X \times X$ com o conjunto das famílias de elementos de X indexadas por $\{1, 2\}$.
2. Se $L = \{1, 2, \cdots, n\}$, uma família $L \to X$ diz-se um *n-uplo de elementos de* X, e denota-se por $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
3. Para o caso de L ser infinito, obtemos como caso particular importante $L = \mathbb{N}$, sendo então uma família no conjunto X exactamente uma *sucessão* em X.

1.27. Definições. Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X (isto é, uma função $a : L \to \mathcal{P}(X)$ com $a(\lambda) = A_\lambda$), podemos definir a sua *reunião*

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda := \{x \in X \,;\, \exists \lambda \in L \ : \ x \in A_\lambda\},$$

e a sua *intersecção*

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda := \{x \in X \,;\, \forall \lambda \in L \quad x \in A_\lambda\}.$$

1.28. Exercício. Enuncie e demonstre as propriedades da reunião e intersecção de famílias tendo por base as propriedades enunciadas em 1.6.

1.29. Definição. Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos, definimos o seu produto cartesiano

$$\prod_{\lambda \in L} A_\lambda := \{(a_\lambda)_{\lambda \in L} \,;\, \forall \lambda \in L \quad a_\lambda \in A_\lambda\},$$

onde cada $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família; isto é,

$$\prod_{\lambda \in L} A_\lambda := \{a : L \to \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \,;\, a \text{ é uma função e } \forall \lambda \in L \quad a(\lambda) \in A_\lambda\}.$$

2. Relações de ordem

2.1. Definição. Dados conjuntos A e B, uma *relação binária* de A em B é um subconjunto de $A \times B$. Dada uma relação $\rho \subseteq A \times B$, escrevemos indiferentemente $(x, y) \in \rho$ ou $x\rho y$.

Se $A = B$, dizemos apenas que ρ é uma *relação binária em A*. Isto é, uma relação binária em A é um subconjunto de $A \times A$.

2.2. Exemplo. Se $f : A \to B$ é uma função, então o gráfico de f (definido em 1.13.) é uma relação binária de A em B.

2.3. Definições. Se ρ é uma relação binária num conjunto A, diz-se que:

1. ρ é *reflexiva* se
$$\forall x \in A \quad x\rho x;$$

2. ρ é *simétrica* se
$$\forall x, y \in A \quad x\rho y \;\Rightarrow\; y\rho x;$$

3. ρ é *anti-simétrica* se
$$\forall x, y \in A \quad x\rho y \text{ e } y\rho x \;\Rightarrow\; x = y;$$

4. ρ é *transitiva* se
$$\forall x, y, z \in A \quad x\rho y \text{ e } y\rho z \;\Rightarrow\; x\rho z.$$

2.4. Definição. Uma relação binária que seja simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma *relação de equivalência*. Dados uma relação de equivalência ρ em A e um elemento x de A, chama-se *classe de equivalência de x, relativamente a ρ*, ao conjunto
$$\{x' \in A\,;\, x\rho x'\}.$$

2.5. Definições.

1. Uma *relação de ordem* (ou *relação de ordem parcial*) é uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Se ρ é uma relação de ordem parcial no conjunto A, ao par (A, ρ) chama-se *conjunto parcialmente ordenado*.

2. Uma *relação de ordem* ρ em A diz-se *total* se
$$\forall x, y \in A \quad x\rho y \quad \text{ou} \quad y\rho x.$$
O par (A, ρ) diz-se então um *conjunto totalmente ordenado* ou *cadeia*.

2.6. Exemplos.

1. Em $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, a relação definida por
$$x\rho y \quad \text{se} \quad xy > 0$$
é uma relação de equivalência.

2. Em $\mathbb{Q}$, a relação definida por
$$x\rho y \quad \text{se} \quad [x] = [y],$$
onde $[a]$ é o maior inteiro menor ou igual a a, é uma relação de equivalência.

3. O par $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, isto é, a relação $\leq$ é uma relação de ordem total em $\mathbb{N}$.

4. De modo análogo, $(\mathbb{Q}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado.

5. Para todo o conjunto X, a relação de inclusão $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto $\mathcal{P}(X)$. Note-se que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ não é em geral totalmente ordenado.

6. A relação
$$x\rho y \quad \text{se} \quad x \text{ divide } y$$
é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$.

2.7. Definições. Sejam $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, X um subconjunto de A e a um elemento de A. Diz-se que:

1. a é *minorante* de X se
$$\forall x \in X \quad a \leq x.$$

2. a é elemento *mínimo* de X se a for minorante de X e pertencer a X.

3. a é *ínfimo* de X se a for minorante de X e
$$\forall a' \in A \; ((\forall x \in X \;\; a' \leq x) \;\Rightarrow\; a' \leq a).$$

De modo análogo, diz-se que:

1. a é *majorante* de X se
$$\forall x \in X \quad x \leq a.$$

2. a é elemento *máximo* de X se a for majorante de X e pertencer a X.

3. a é *supremo* de X se a for majorante de X e
$$\forall a' \in A \; ((\forall x \in X \;\; x \leq a') \;\Rightarrow\; a \leq a').$$

2.8. Proposição. *Sejam $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, X um subconjunto de A e a um elemento de A.*

1. *Quando existe, o mínimo (respectivamente ínfimo; máximo; supremo) de X é único.*

2. *Se a é elemento mínimo (respectivamente máximo) de X, então a é ínfimo (respectivamente supremo) de X.*

3. *Quando existe, o ínfimo de X é o maior dos minorantes de X, enquanto que o supremo de X é o menor dos majorantes de X.*

2.9. Definição. Um *conjunto* parcialmente ordenado $(A, \leq)$ diz-se *bem ordenado* se todo o subconjunto não vazio de A tiver mínimo.

O Princípio da Boa Ordenação dos números naturais garante-nos que $(\mathbb{N}, \leq)$ é bem ordenado.

3. Conjuntos finitos e infinitos

3.1. Definição. Dois *conjuntos* A e B dizem-se *numericamente equivalentes* se existir uma bijecção $A \to B$, e escreve-se $A \sim B$.

3.2. Definição. Diz-se que o *conjunto* A *é numericamente inferior ou igual ao conjunto* B, ou que *o cardinal de* A *é menor ou igual ao o cardinal de* B se existir uma função injectiva de A em B. Neste caso escreveremos $A \leq^\sharp B$.

3.3. Proposição. *Se X, Y e Z são conjuntos, então:*

(1) $X \leq^\sharp X$;

(2) $X \leq^\sharp Y$ *e* $Y \leq^\sharp X \;\Rightarrow\; X \sim Y$;

(3) $X \leq^\sharp Y$ *e* $Y \leq^\sharp Z \;\Rightarrow\; X \leq^\sharp Z$.

A propriedade (2) segue do seguinte resultado.

3.4. Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder. [3] *Se existirem funções injectivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$, então existe uma bijecção $A \to B$.*

3.5. Definições. Um *conjunto* A diz-se *finito* se for vazio ou for numericamente equivalente a $\{1, 2, \cdots, n\}$ para algum número natural n. Diz-se então que A tem n elementos, ou que A tem cardinal n.

Um *conjunto* diz-se *infinito* se não for finito.

3.6. Definição. Um *conjunto* diz-se *numerável* se for finito ou numericamente equivalente a $\mathbb{N}$. Caso contrário, diz-se *não numerável.*

3.7. Proposição. *Se $X \subseteq \mathbb{N}$, então X é finito ou numericamente equivalente a $\mathbb{N}$. Logo, um conjunto é numerável se e só se é numericamente equivalente a uma parte de $\mathbb{N}$.*

3.8. Proposição. *Seja $f : X \to Y$ uma função.*

1. *Se f for injectiva e Y for numerável, então X é numerável.*

2. *Se f for sobrejectiva e X for numerável, então Y é numerável.*

3.9. Corolário.

1. *O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável.*

2. *O produto cartesiano de dois conjuntos numeráveis é numerável.*

3. *$\mathbb{Q}$ é numerável.*

4. *A reunião de uma família numerável de conjuntos numeráveis é numerável.*

3.10. Teorema. *O cardinal de $\mathbb{N}$ é menor ou igual ao cardinal de qualquer conjunto infinito.*

[3] Pode consultar a demonstração deste resultado no livro de P.R. Halmos, Naive Set Theory.

3.11. Teorema de Cantor. *Se X for um conjunto arbitrário e Y for um conjunto com pelo menos dois elementos, então o cardinal de X é estritamente inferior ao do conjunto $\mathcal{F}(X;Y)$ das funções de X em Y; isto é, não existe uma função sobrejectiva de X em $\mathcal{F}(X;Y)$.*

3.12. Corolário. *O produto cartesiano de uma família indexada por $\mathbb{N}$ de conjuntos infinitos numeráveis não é numerável.*

3.13. Corolário. *Todo o conjunto tem cardinal estritamente inferior ao cardinal do conjunto das suas partes.*

3.14. Corolário. *O conjunto das partes de $\mathbb{N}$ não é numerável.*

4. A recta real

4.1. Subconjuntos de $\mathbb{R}$. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$.

1. X diz-se *limitado superiormente* se tiver um majorante em $\mathbb{R}$; isto é, se existir $b \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in X$, $x \leq b$.

2. X diz-se *limitado inferiormente* se tiver minorante em $\mathbb{R}$;

3. X diz-se *limitado* se for limitado superior e inferiormente;

4. X diz-se um intervalo se tiver a seguinte propriedade:

$$\forall a, b \in X \ \ \forall c \in \mathbb{R} \ \ a \leq c \leq b \ \Rightarrow \ c \in X.$$

Um intervalo X pode escrever-se numa das formas, com $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\} &]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leq b\} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x < b\} & [a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x\} \\
]a,+\infty\,[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x\} &]-\infty,b\,] & = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq b\} \\
]-\infty,b\,[& = & \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < b\} &]-\infty,+\infty\,[& = & \mathbb{R}
\end{array}$$

4.2. Algumas propriedades de $\mathbb{R}$.

Completude: Todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.

Propriedade Arquimediana: $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.

4.3. Proposição. *As seguintes condições equivalem-se:*

(i) $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) *para cada par a, b de números reais com $a > 0$, existe um número natural n tal que $na > b$;*

(iii) *para cada $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

4.4. Definições. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$.

1. Um ponto $x \in X$ diz-se *ponto interior de* X se existir um intervalo aberto $]a,b[$ tal que $x \in]\,a,b\,[\subseteq X$.

2. Um número real x diz-se *ponto aderente de* X se todo o intervalo aberto ao qual x pertença intersectar X.

3. O conjunto X diz-se *aberto* se todo o seu ponto for interior.

4. O conjunto X diz-se *fechado* se o seu complementar em $\mathbb{R}$ for aberto.

4.5. Lema. *Sejam X um subconjunto de X e $x \in \mathbb{R}$.*

1. *x é ponto interior de X se existir $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq X$.*

2. *x é ponto aderente de X se, para todo o $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap X \neq \emptyset$.*

4.6. Exemplos. Todo o intervalo aberto (resp. fechado) é um subconjunto aberto (resp. fechado) de $\mathbb{R}$. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

4.7. Lema. *Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente fechados e abertos são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.*

4.8. Proposição. *Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é fechado se e só se coincide com o conjunto dos seus pontos aderentes.*

4.9. Definição. Um *subconjunto* X de $\mathbb{R}$ diz-se *denso* se o conjunto dos seus pontos aderentes for $\mathbb{R}$.

4.10. Proposição. *$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são subconjuntos densos de $\mathbb{R}$.*

4.11. Definição. Um ponto x diz-se *ponto de acumulação de* $X \subseteq \mathbb{R}$ se todo o intervalo aberto ao qual x pertença intersecta $X \setminus \{x\}$.

4.12. Lema. *Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *x é ponto de acumulação de X;*

(ii) *para todo o $\varepsilon > 0$, o conjunto $X \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contém algum ponto diferente de x;*

(iii) *para todo o $\varepsilon > 0$, o conjunto $X \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ é infinito.*

4.13. Lema. *Se A é um subconjunto finito de $\mathbb{R}$, então A não tem pontos de acumulação.*

4.14. Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Todo o subconjunto infinito limitado de $\mathbb{R}$ tem algum ponto de acumulação.*

Capítulo II: Limites

5. Limites de sucessões

5.1. Definições. Uma *sucessão* num conjunto X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$; é habitual designarem-se as imagens da sucessão x por x_n e a própria sucessão por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou apenas por (x_n).

Chama-se *subsucessão* da sucessão $x : \mathbb{N} \to X$ uma sucessão que se obtenha como composição de x com uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo o par de números naturais j, k, se $j < k$ então $\varphi(j) < \varphi(k)$.

De agora em diante vamos falar apenas de sucessões de números reais, isto é, de sucessões em $\mathbb{R}$.

5.2. Definição. Uma sucessão (x_n) de números reais diz-se *limitada superiormente* (resp. *limitada inferiormente*, *limitada*) se o conjunto das suas imagens $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto limitado superiormente (resp. limitado inferiormente, limitado) em $\mathbb{R}$.

5.3. Definições. Uma sucessão (x_n) em $\mathbb{R}$ diz-se:

1. *crescente* (ou *estritamente crescente*) se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$;
2. *não decrescente* (ou *crescente em sentido lato*) se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$;
3. *decrescente* (ou *estritamente decrescente*) se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$;
4. *não crescente* (ou *decrescente em sentido lato*) se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n+1}$.

A sucessão (x_n) diz-se *monótona* se tiver uma das propriedades anteriores.

5.4. Definição. Diz-se que um número real a é *limite* da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} \; : \; \forall n \in \mathbb{N} \; n \geq p \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon.$$

Neste caso diz-se que (x_n) *converge para* a, e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$.

Em geral, se (x_n) tiver algum limite em $\mathbb{R}$, diz-se que (x_n) é uma *sucessão convergente*.

Se uma *sucessão* não for convergente, diz-se *divergente*.

5.5. Teorema. *Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a se e só se toda a sua subsucessão converge para a.*

5.6. Teorema: Unicidade do limite. *Uma sucessão de números reais tem no máximo um limite em $\mathbb{R}$.*

5.7. Proposição. *Toda a sucessão convergente é limitada.*

5.8. Teorema. *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

5.9. Proposição. *Se (x_n) é uma sucessão limitada e (y_n) é uma sucessão que converge para 0, então a sucessão $(x_n y_n)$ converge para 0.*

5.10. Lema. *Se (x_n) é uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ se e só se $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.*

5.11. Teorema. *Se (x_n) e (y_n) são sucessões convergentes, para a e b respectivamente, então:*

(1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

(2) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;

(3) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$;

(4) *se* $b \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

5.12. Teorema das sucessões enquadradas. *Se (x_n), (y_n) e (z_n) são sucessões tais que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_n \leq y_n \leq z_n,$$

e $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, *então* $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

5.13. Proposição. *Se (x_n) é uma sucessão que converge para $a > 0$, então*

$$\exists p \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n \geq p \;\Rightarrow\; x_n > 0.$$

5.14. Corolário. *Se (x_n) e (y_n) são sucessões convergentes e tais que $x_n \leq y_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$. Em particular, se (x_n) é uma sucessão convergente que só toma valores iguais ou inferiores a um número real a, então $\lim_{n\to\infty} x_n \leq a$.*

5.15. Definições. Seja (x_n) uma sucessão divergente.

1. Diz-se que (x_n) *tende para* $+\infty$ (ou *diverge para* $+\infty$) se

$$\forall r > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} \; : \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n \geq p \;\Rightarrow\; x_n > r,$$

   e escreve-se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Diz-se que (x_n) *tende para* $-\infty$ (ou *diverge para* $-\infty$) se

$$\forall r > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} \; : \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n \geq p \;\Rightarrow\; x_n < -r,$$

   e escreve-se $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

3. Diz-se que (x_n) *tende para* ∞ (ou *diverge para* ∞) se a sucessão $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ divergir para $+\infty$; isto é, se

$$\forall r > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} \; : \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n \geq p \;\Rightarrow\; |x_n| > r,$$

   e escreve-se $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

5.16. Teorema. *Sejam (x_n) e (y_n) sucessões de números reais.*

(1) *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e (y_n) é limitada inferiormente, então* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

(2) *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e (y_n) é limitada inferiormente por um número real $c > 0$, então* $\lim_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = +\infty$.

(3) *Se (x_n) não tiver nenhum termo igual a 0, então* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$ *se e só se* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

5.17. Definição. Um número real a diz-se *valor de aderência* (ou *ponto de acumulação*) da sucessão (x_n) se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; m \geq n \;\; \text{e} \; x_m \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[.$$

5.18. Proposição. *Se (x_n) é uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes condições equivalem-se:*

(i) *a é valor de aderência de (x_n);*

(ii) *existe uma subsucessão de (x_n) que converge para a.*

5.19. Proposição. *Toda a sucessão limitada tem um valor de aderência.*

5.20. Teorema: Critério de convergência de Cauchy. *Uma sucessão (x_n) de números reais é convergente se e só se*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} \; : \; \forall m, n \in \mathbb{N} \;\; m \geq p \;\; e \;\; n \geq p \;\Rightarrow\; |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

5.21. Teorema. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *X é fechado e limitado;*

(ii) *Todo o subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação que pertence a X;*

(iii) *Toda a sucessão com valores em X tem um valor de aderência que pertence a X.*

6. Limites de funções

Ao longo deste parágrafo $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função cujo domínio X é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de X. (De agora em diante denotaremos o conjunto de pontos de acumulação de X por X'.)

6.1. Definição. Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X, dizemos que o número real L *é o limite de $f(x)$ quando x tende para a*, e escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; \forall x \in X \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

6.2. Proposição. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $Y \subseteq X$, a um ponto de acumulação de Y e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. A restrição de f a Y, $g : Y \to \mathbb{R}$, com $g(y) = f(y)$ para todo o $y \in Y$, ainda tem limite L quando y tende para a.*

6.3. Teorema. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O limite de $f(x)$ quando x tende para a é L.*

(ii) *Qualquer que seja a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $X \setminus \{a\}$ com limite a, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.*

6.4. Teorema. *Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

6.5. Teorema. *Se existe* $\lim_{x\to a} f(x)$*, então* f *é limitada numa vizinhança de* a*; isto é,*

$$\exists A > 0\ \exists \delta > 0\ \ : \forall x \in X\ \ 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x)| < A.$$

6.6. Teorema. *Sejam* $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ *funções e* a *um ponto de acumulação de* X*. Se, para todo o elemento* x *de* X *diferente de* a*,* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$*, então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$*.*

6.7. Corolários.

(1) *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que, se* $x \in X$ *e* $0 < |x-a| < \delta$*, então* $f(x) > 0$*.*

(2) *Se* $f(x) \le g(x)$ *para todo o* $x \in X \setminus \{a\}$*,* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, então* $L \le M$*.*

6.8. Teorema. *Sejam* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $a \in X'$ *e* $f, g : X \to \mathbb{R}$*. Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(X) = M$*, então:*

(1) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$*;*

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = LM$*;*

(3) *Se* $M \neq 0$*, então* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$*.*

Além disso, se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* g *for uma função limitada, então* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$*.*

6.9. Teorema: Critério de Cauchy para funções. *Se* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $a \in X'$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$*, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe* $\lim_{x\to a} f(x)$*.*

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x, y \in X\ 0 < |x-a| < \delta$ *e* $0 < |y-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$*.*

6.10. Teorema. *Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$*,* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(X) \subseteq Y$*, e* $a \in X'$*. Se* $\lim_{x\to a} f(x) = b \in Y' \cap Y$ *e* $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$*, então* $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b)$*.*

6.11. Definições.

1. Um ponto a de $\mathbb{R}$ diz-se um *ponto de acumulação à direita* de um conjunto X se for ponto de acumulação do conjunto $X \cap]a, +\infty[$. Analogamente, a diz-se um *ponto de acumulação à esquerda* de X se for ponto de acumulação de $X \cap]-\infty, a[$. Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação à direita (respectivamente à esquerda) de X por X'_+ (respectivamente por X'_-).

2. Se $a \in X'_+$, dizemos que o número real L *é o limite à direita de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, e escrevemos $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in X\ a < x < a + \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

   Analogamente se define *limite à esquerda de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, que se denota por $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

6.12. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Seja $Y = X \cap]a, +\infty[$ e $g = f_{|Y}$. Então $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ se e só se $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = L$.*

6.13. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se e só se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.*

6.14. Definições. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se:

1. *estritamente crescente* se, para todo o par $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$;
2. *crescente* (*em sentido lato*) se, para todo o par $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$;
3. *estritamente decrescente* se, para todo o par $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) > f(y)$;
4. *decrescente* (*em sentido lato*) se, para todo o par $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \geq f(y)$;
5. *monótona* se verificar alguma das propriedades anteriores, isto é, se for crescente ou decrescente.

6.15. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Então existem os limites laterais $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.*

6.16. Definições. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(X) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A > 0 \;\; \forall x \in X \;\; x > A \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Define-se de modo análogo $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

6.17. Teorema. *Se X for ilimitado superiormente e $f : X \to \mathbb{R}$ for monótona limitada, então existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.*

6.18. Definições. Dados $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ se

$$\forall A > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; \forall x \in X \;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > A.$$

De igual modo, diz-se que:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ se

$$\forall A > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; \forall x \in X \;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < -A.$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ se

$$\forall A > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; \forall x \in X \;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > A.$$

De forma análoga, definem-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, -\infty, \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \; (-\infty, \infty)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty \; (-\infty, \infty)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty \; (-\infty, \infty)$.

6.19. Resultados que envolvem limites infinitos.

(1) *Se existe* $\lim_{x\to a} f(x)$*, este limite é único, independentemente de ser real ou infinito.*

(2) *Se* $f : X \to \mathbb{R}$*,* $a \in X'$*,* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$*,* $g : Y \to \mathbb{R}$ *é a restrição de* f *a* Y *e* $a \in Y'$*, então* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$*.*

(3) *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(-\infty, \infty)$*, então a função* f *não é limitada.*

(4) *Se* $f, g : X \to \mathbb{R}$*,* $a \in X'$*,* $f(x) \le g(x)$ *para todo o* $x \in X$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$*, então* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$*.*
Logo, se $f, g : X \to \mathbb{R}$*,* $a \in X'$*,* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$*, então*

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < g(x).$$

(5) *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$*;*

(ii) *para toda a sucessão* (x_n) *em* $X \setminus \{a\}$*, se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$*, então* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$*.*

(6) *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{y\to +\infty} g(y) = L$ *(ou* $\lim_{y\to +\infty} g(y) = +\infty$*), então* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$ *(ou* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = +\infty$*).*

(7) *Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *é monótona e* $a \in X'_+$ *e* $b \in X'_-$*, então existem (sendo possivelmente infinitos) os limites laterais* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to b^-} f(x)$*.*

Capítulo III: Continuidade

7. Definições.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua em* $a \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

A função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos de X.

Se f não for contínua em a, então f diz-se *descontínua em* a e a diz-se um *ponto de descontinuidade de* f. A função f diz-se *descontínua* se for descontínua nalgum ponto do domínio.

7.1. Observações. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função.

1. Repare-se que, contrariamente à situação do estudo do limite de f num ponto a, só faz sentido falar de continuidade de f em a se a pertencer ao domínio de f.
2. Se a pertencer a X, mas não for ponto de acumulação de X, então f é contínua em a.
3. Se $a \in X \cap X'$, então f é contínua em a se e só se existir o $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e for igual a $f(a)$.

7.2. Proposição. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, $g : Y \to \mathbb{R}$ a restrição de f a um subconjunto Y de X e $a \in Y$.*

(1) *Se f for contínua em a, então g é contínua em a.*

(2) *Se $Y = X \cap I$, onde I é um intervalo aberto, então f é contínua em a desde que g o seja.*

7.3. Proposição. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a, então f é limitada em $X \cap I$, onde I é um intervalo aberto contendo a.*

7.4. Teorema. *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$, então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas no ponto a. Se $g(a) \neq 0$, então também $\frac{f}{g}$ é contínua em a.*

7.5. Exemplos.

1. Toda a função constante é contínua.
2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x$ é contínua.
3. Pelo Teorema anterior, todo o polinómio
$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$
é contínuo.
4. Ainda pelo Teorema anterior, toda a função racional
$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)}, \end{aligned}$$
onde p e q são polinómios e $X = \{x \in \mathbb{R} \,;\, q(x) \neq 0\}$, é uma função contínua.

7.6. Teorema. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. As seguintes condições equivalem-se:*

(i) *f é contínua em a;*

(ii) *se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão em X que converge para a, então $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

7.7. Teorema. *A composta de duas funções contínuas é contínua.*

7.8. Definições. Seja $a \in X$ um ponto de descontinuidade da função $f : X \to \mathbb{R}$; isto é,

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in X \ : \ |x - a| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Diz-se que f tem:

1. uma *descontinuidade removível* em a se existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e for um número real for diferente de $f(a)$.
2. um *pólo* em a se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (isto é, $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$);
3. uma *descontinuidade essencial* em a se não for removível nem pólo.

   As descontinuidades essenciais dividem-se em dois tipos:

   (a) *descontinuidade essencial de 1ª espécie*, se existirem os limites laterais em a e forem diferentes;

   (b) *descontinuidade essencial de 2ª espécie*, se não existir o limite à esquerda de f em a, sendo a um ponto de acumulação à esquerda de X, ou se não existir o limite à direita de f em a, sendo a um ponto de acumulação à direita de X.

7.9. Teorema. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona e f for descontínua em $a \in X'_- \cap X'_+$, então f tem uma descontinuidade essencial de 1ª espécie em a.*

7.10. Teorema. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona e $f(X)$ é um intervalo, então f é contínua.*

7.11. Lema. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a, $d \in \mathbb{R}$ e $f(a) > d$, então*

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > d.$$

7.12. Teorema do Valor Intermédio. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$.*

7.13. Observação. O resultado ainda é válido se se tiver $f(a) > d > f(b)$. Resulta imediatamente da aplicação do Teorema à função contínua $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$.)

7.14. Corolários.

(1) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

(2) *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Se $a, b \in I$ e $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$.*

(3) *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo.*

7.15. Teorema. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injectiva, definida num intervalo I. Então f é monótona, com imagem $J = f(I)$ um intervalo, e a sua função inversa $g : J \to \mathbb{R}$ é contínua.*

7.16. Teorema. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Se X é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$, então $f(X)$ é também um subconjunto de $\mathbb{R}$ fechado e limitado.*

7.17. Teorema de Weierstrass. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$, então f tem máximo e mínimo.*

7.18. Observação. A hipótese de que X é fechado e limitado é essencial no Teorema de Weierstrass. De facto:

1. Se X não for limitado, então a função

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

   é contínua mas não tem máximo, se X for ilimitado superiormente, ou não tem mínimo, se X for ilimitado inferiormente.

2. Se X não for fechado e a for um ponto aderente de X que não pertence a X, então a função

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array}$$

   é contínua mas não tem máximo, se a for um ponto de acumulação à direita de X, ou não tem mínimo, se a for um ponto de acumulação à esquerda de X.

7.19. Teorema. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua e injectiva e X é fechado e limitado, então $f(X) = Y$ é fechado e limitado e a função inversa $g : Y \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Capítulo IV: Cálculo Diferencial

8. Conceito de derivada

8.1. Definições.

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Diz-se que f *é derivável no ponto* a se existir $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, que se designa habitualmente por $f'(a)$. Note-se que
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

2. Para cada função $f : X \to \mathbb{R}$, define-se a *função derivada de* f, que tem como domínio o conjunto Y dos pontos de $X \cap X'$ onde f é diferenciável:
$$\begin{aligned} f' : Y &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \end{aligned}$$

8.2. Aproximação linear da função f. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X \cap X'$, então, para todo o $x \in X$,*
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$$
com $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{r(x)}{x-a} = 0$. Reciprocamente, se $f(x) = f(a) + L(x-a) + s(x)$, para todo o $x \in X$, com $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{s(x)}{x-a} = 0$, então f é derivável em a e $f'(a) = L$.

8.3. Método de Newton. Se $f : X \to \mathbb{R}$ for derivável no seu domínio, com derivada limitada, $x_1 \in X$ e a sucessão definida por
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
convergir para $a \in X$, então $f(a) = 0$.

8.4. Proposição. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a, então f é contínua em a.*

9. Regras de derivação

9.1. Teorema: Derivação da soma, do produto e do quociente de funções. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Então as funções $f+g$, $f-g$, $f \times g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$) são diferenciáveis em a, e*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$,
3. $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

9.2. Corolário. *Se f é derivável em a e $c \in \mathbb{R}$, então*

1. $(cf)'(a) = cf'(a)$,
2. $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$, *se* $f(a) \neq 0$.

9.3. Teorema: Derivada da função composta. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subseteq Y$, $a \in X \cap X'$ e $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existirem $f'(a)$ e $g'(b)$, então a função $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

9.4. Corolário: Derivada da função inversa. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g : Y = f(X) \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em $a \in X \cap X'$ e g é contínua em $b = f(a)$, então g é derivável em b se e só se $f'(a) \neq 0$. Nesse caso, tem-se*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

9.5. Derivada da função implícita. Suponhamos que queremos obter a derivada de uma função f que nos é apresentada, não na sua forma explícita, mas como solução de uma equação dada (em $f(x)$ e na variável x). Dizemos então que *a equação define implicitamente a função f*.

A equação estabelece uma igualdade entre funções (as definidas pelo primeiro e segundo membros da equação). Derivando essas funções, obtemos uma igualdade entre as suas derivadas, e que é uma equação que já envolve a função derivada. A este processo chama-se *derivação implícita da função f*.

Este cálculo é por vezes muito útil. Por exemplo, se quisermos calcular a derivada da função $f(x) = x^\alpha$, com α número real não nulo fixo, fazendo $y = y(x) = f(x)$, se $x \neq 0$ a função é solução da equação

$$\ln |y| = \alpha \ln |x|.$$

Derivando implicitamente y, obtemos

$$\frac{y'}{y} = \alpha \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

E é óbvio que esta fórmula é também válida quando $x = 0$ e $\alpha \geq 1$.

10. Uso da derivada no estudo de máximos e mínimos de funções

10.1. Definições. Seja $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Se $a \in X \cap X'_+$, definimos a *derivada à direita da função f no ponto a* como
$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
quando este limite existir.

2. De igual modo, se $a \in X \cap X'_-$, definimos a *derivada à esquerda de f em a* por
$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
quando este limite existir.

10.2. Definições. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$.

1. Diz-se que f possui um *máximo local* no ponto a se

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ x \in]a - \delta, a + \delta[\Rightarrow \ f(x) \leq f(a).$$

   Se se tiver $f(x) < f(a)$ para todo o elemento x, diferente de a, do intervalo $]a - \delta, a + \delta[$, diz-se que f possui um *máximo local estrito* em a.

2. De modo análogo definem-se *mínimo local* e *mínimo local estrito.*

10.3. Lema.

1. *Se f é crescente e derivável em a, então $f'(a) \geq 0$.*

2. *Se f é decrescente e derivável em a, então $f'(a) \leq 0$.*

10.4. Observação. Note-se que, de $f'(a) \geq 0$, não se pode concluir que f é crescente. Por exemplo, a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \ &\to \ \mathbb{R} \\ x \ &\mapsto \ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

tem derivada em 0, igual a $\frac{1}{2}$, mas não é crescente em nenhum intervalo aberto contendo 0.

10.5. Teorema. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'$. Se $f'_+(a) > 0$, então*

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \ \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ f(a) < f(x).$$

10.6. Corolário. *Se $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a e possui um máximo ou mínimo local em a, então $f'(a) = 0$.*

11. Funções deriváveis em intervalos

Ao longo deste parágrafo I é um intervalo.

11.1. Definição. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I e a sua função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é contínua, a função f diz-se *de classe $\mathcal{C}^1$* (ou *continuamente derivável*).

11.2. Observações.

1. Uma função pode ser derivável em todo o seu domínio e não ser de classe $\mathcal{C}^1$ (veja, por exemplo, a função h definida em 10.4.).

2. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for de classe $\mathcal{C}^1$, o Teorema do Valor Intermédio aplicado à função $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-nos que f' toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$. O próximo resultado diz-nos que esta afirmação é válida mesmo quando f' não é contínua.

11.3. Teorema de Darboux. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em $[a, b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = d$.*

11.4. Corolário. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I e $f' : I \to \mathbb{R}$ é descontínua em $c \in I$, então essa descontinuidade é essencial de segunda espécie.*

11.5. Teorema de Rolle. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em $]a,b[$, então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

11.6. Teorema do Valor Médio de Lagrange. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em $]a,b[$, existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

11.7. Corolários do Teorema de Lagrange.

1. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de $]a,b[$, então f é uma função constante.*

2. *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, deriváveis em $]a,b[$ e $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in]a,b[$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo o $x \in [a,b]$.*

3. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo o $x \in I$, então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*

4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, então existe $f'_+(a)$, e é igual a L.*

5. *Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ contínua em $]a,b[$ e derivável em $]a,b[\setminus \{c\}$, com $c \in]a,b[$. Se $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, então existe $f'(c)$ e é igual a L.*

6. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I.*

   (a) *Tem-se $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$ se e só se f for crescente em I.*

   (b) *Se $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I. Neste caso, f possui inversa $g : f(I) = J \to \mathbb{R}$ derivável em J, com $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(g(y))}$, para todo o $y = f(x) \in J$.*

7. *Sejam $c \in]a,b[\subseteq X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua em $]a,b[$ e derivável em $]a,b[\setminus \{c\}$.*

   (a) $\forall x \in X \ (a < x < c \ \Rightarrow \ f'(x) > 0) \ \wedge \ (c < x < b \ \Rightarrow \ f'(x) < 0) \ \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(c)$ *é máximo local de* f.

   (b) $\forall x \in X \ (a < x < c \ \Rightarrow \ f'(x) < 0) \ \wedge \ (c < x < b \ \Rightarrow \ f'(x) > 0) \ \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(c)$ *é mínimo local de* f.

   (c) *Se f' não muda de sinal em c, então $f(c)$ não é extremo local de f.*

11.8. Teorema do Valor Médio de Cauchy. *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$, e se g' não se anula em $]a,b[$, então existe $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

11.9. Regra de Cauchy.

(a) *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínuas em* $[a, b]$ *e deriváveis em* $]a, b[\backslash\{c\}$*, com* $c \in]a, b[$*. Se* g' *não se anula em* $]a, b[\backslash\{c\}$*, se* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *e se existe o* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, então*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) *Sejam* $f, g :]a, b[\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$ *deriváveis em* $]a, b[\backslash\{c\}$*, com* $c \in]a, b[$*. Se* g' *não se anula, se* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ *e se existe o* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, então*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(c) *Se* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *são deriváveis no intervalo* I*, ilimitado superiormente, se* g' *não se anula em* I *e se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ *e existe o* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, então*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A demonstração da alínea (b) é delicada, e usa o seguinte

11.10. Lema. *Nas condições da alínea* (b) *de* 11.9.*, existe uma função* $u :]c - \delta, c + \delta[\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x\to c} u(x) = c$ *e*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{f(u(x))} = \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{g(u(x))} = 0.$$

12. Fórmula de Taylor

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima derivada de uma função f designa-se por $f^{(n)}$ e é definida por $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$; denotamos neste caso f por $f^{(0)}$.

12.1. Definições. Seja $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que:

1. f é *n vezes derivável* no intervalo I se existir $f^{(n)}(x)$ para todo o $x \in I$;

2. f é *n vezes derivável no ponto* $a \in I$ se existir $f^{(n)}(a)$; para isso, é necessário que exista um intervalo aberto J contendo a tal que $f_{|I\cap J}$ seja $(n-1)$ vezes derivável em J e que exista $\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$;

3. f é de classe $\mathcal{C}^n$ se f for derivável n vezes e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for contínua;

4. f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ se for de classe $\mathcal{C}^n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

12.2. Exemplos.

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|x^n$ é de classe $\mathcal{C}^n$ mas não é de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

2. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é de classe $\mathcal{C}^\infty$, sendo $g^{(n)}(0) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

12.3. Observação. Um polinómio de grau n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

é completamente determinado pelas suas derivadas, até à ordem n, no ponto 0: $a_0 = p(0)$, $a_1 = p'(0)$, $a_2 = \dfrac{p^{(2)}(0)}{2}$, $a_3 = \dfrac{p^{(3)}(0)}{3 \cdot 2}$, $\cdots$, $a_n = \dfrac{p^{(n)}(0)}{n!}$.

12.4. Definição. Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto a, chama-se *polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto a* ao polinómio

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Note-se que a diferença entre a função f e o seu polinómio de Taylor é uma função que tem derivadas nulas, até à ordem n, no ponto a.

12.5. Lema. *Para uma função $r : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável ($n \geq 1$) no ponto $0 \in I$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $r(0) = r'(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

12.6. Teorema: Fórmula de Taylor Infinitesimal. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. Para todo o $x \in I$, tem-se*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x),$$

onde $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

12.7. Teorema: Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $(n+1)$ vezes derivável no intervalo $]a,b[$ e seja $x \in]a,b[$. Então existe $c \in]a,x[$ tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

equivalentemente, para todo o $h \in]0, b-a[$, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$