Capítulo 1

Noções de lógica

1.1 Introdução

A nossa vida intelectual consiste primariamente em conhecer e finalmente em comunicarmos uns aos outros os nossos conhecimentos por meio de proposições, que, ou são verdadeiras (V) – se o que exprimem é adequado ao objecto do conhecimento –, ou são falsas (F) – no caso contrário e sem terceira hipótese.

Mas esta distinção entre proposições verdadeiras e falsas exige alguns esclarecimentos.

1.°) Umas vezes porque a nossa inteligência é limitada, outras talvez pela natureza das coisas, temos de nos contentar com proposições sobre que apenas temos uma opinião ou a que atribuímos uma probabilidade numérica. A matemática também se ocupa destas proposições, na disciplina chamada Cálculo das Probabilidades. Aí, por exemplo, falando-se do lançamento de um dado, a proposição "vai ser um 5" não é V nem F: tem a probabilidade $\frac{1}{6}$. Mas proposições deste tipo só se constituem em teoria matemática, porque aparecem integradas noutras "a probabilidade de que saia um 5 é igual a $\frac{1}{6}$" que já são, não prováveis mas ou V ou F, conforme o dado não está ou está viciado.

2.°) Do mesmo modo, em Análise Numérica aparecem proposições como "a é aproximadamente igual a b", mas elas formam uma teoria matemática porque se interpretam não como "é aproximadamente verdadeiro que $a = b$" mas como "é verdade que (num sentido que tem de ser rigorosamente definido, por exemplo, acrescentando "a menos de $0,001$") a é aproximadamente igual a b".

3.°) Também na disciplina de Lógica, que faz parte deste curso, se estudam teorias para as quais há três espécies de proposições: as que se pode demonstrar que são verdadeiras, as que se pode demonstrar que são falsas e as que não têm nem uma nem outra destas propriedades. Mas, quando afirmamos, por exemplo, que, em certa teoria, certa proposição se pode demonstrar, fazemos uma afirmação que ou é V ou é F, sem terceira hipótese.

Nesta disciplina basta mantermo-nos sempre dentro deste esquema primário e fundamental: cada proposição tem um e só um dos dois valores lógicos V ou F. E, como em qualquer teoria matemática, o que vamos fazer é deduzir certas proposições, a partir de outras que se supõem já verdadeiras (axiomas), apenas por considerações lógicas – mas não deixaremos de recorrer, nas aplicações da análise matemática, à intuição geométrica ou física. Convém então começar por estudar certas noções de lógica: como se decompõem proposições em proposições mais simples (cálculo proposicional) ou em partes que já não são proposições (cálculo dos predicados).

1.2 Cálculo proposicional

Dadas duas proposições, A e B, podem, com elas, formar-se outras mais complexas, por meio de certas operações lógicas, das quais estudaremos cinco: a operação de negação (correspondente ao advérbio não), que se aplica a uma proposição só e se representa por $\sim$ anteposto à proposição (por exemplo: $\sim A$ "não A" e as operações de conjunção, adjunção (ou disjunção), implicação (ou implicação material) e equivalência (ou equivalência material), que correspondem na linguagem corrente, a certas conjunções (e, ou, etc.), aplicando-se a duas proposições, A e B por exemplo, e representando-se respectivamente pelos sinais $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, escritos entre as letras que representam as duas proposições, por exemplo $A \wedge B$ "A e B", $A \vee B$ "A ou B", etc.[1].

Dizemos que se trata de operações lógicas, porque o valor lógico de $\sim A$, $A \wedge B$, etc., depende apenas do valor lógico de A, ou dos de A e B, e fica por

[1]Alguns autores usam outros sinais, principalmente $\neg$ para a negação, $\supset$ para a implicação e $\equiv$ para a equivalência

eles inteiramente determinado, podendo, portanto, ser indicado por meio de tabelas, que são as seguintes:

A	$\sim A$
V	F
F	V

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Como se vê por estas tabelas, $\sim$ significa exactamente o mesmo que o advérbio não ($\sim A$ é V se A é F, e vice-versa), $\wedge$ significa exactamente o mesmo que a conjunção e ($A \wedge B$ é V quando e só quando A é V e B é V), $\vee$ significa o mesmo que a conjunção ou (no seu sentido não-exclusivo[2], isto é: ou A, ou B, ou ambas). $A \Rightarrow B$ lê-se "A implica B" ou "se A, então B" mas pode causar estranheza que se considere $A \Rightarrow B$ como V nos casos em que A é F; adiante se poderá explicar melhor por que é que, como todos os autores, adoptamos esta definição de $\Rightarrow$, mas, de qualquer modo, trata-se de uma convenção, que nada nos impede de adoptar. $A \Leftrightarrow B$ lê-se "A se e só se B" (o que, por vezes, abreviaremos para "A sse B") ou "A é equivalente a B", subentendendo-se "do ponto de vista do cálculo proposicional".

Com um número finito de proposições, estes cinco sinais e parêntesis podem construir-se proposições mais complexas; alguns parêntesis – ou todos – poderão suprimir-se convencionando que as operações lógicas se efectuam pela seguinte ordem de prioridade

$$\sim \quad \wedge \ \vee \quad \Rightarrow \ \Leftrightarrow$$

e que, quando se seguem operações idênticas, se começa da esquerda para a direita. Por exemplo: $A \Rightarrow B \wedge (C \ \vee \ D) \wedge E$, significa $A \Rightarrow ((B \wedge (C \ \vee \ D)) \wedge E)$ e $\sim A \vee B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$ significa $((\sim A) \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.

É fácil calcular o valor lógico destas proposições compostas atendendo ao modo por que são formadas e consultando as tabelas supra. Por exemplo, para a fórmula anterior, nos quatro casos correspondentes aos valores de A e B, temos, sucessivamente,

---

[2]Neste sentido, a conjunção latina correspondente é *vel*, o que deu origem ao sinal $\vee$.

A	B	$\sim A$	$\sim A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\sim A \vee B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Para a expressão acima considerada, acontece que, quaisquer que sejam os valores lógicos de A e B, a expressão é sempre verdadeira, isto é, é verdadeira por causa da sua estrutura lógica, independentemente do significado das letras A e B. Tais expressões chamam-se tautologias e exprimem regras de lógica. Por exemplo o princípio de não-contradição, $\sim (A \wedge \sim A)$, e o princípio do terceiro excluído $A \vee \sim A$, são tautologias, como facilmente se veria.

Têm particular importância as tautologias que se apresentam como implicações ou equivalências entre duas expressões. No primeiro caso, estabelecem que, quando o primeiro membro for verdadeiro, também o segundo o é; por exemplo:

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \quad \text{“modus ponens”}$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \quad \text{(propriedade transitiva da implicação}^3\text{)}$$

No segundo caso, os dois membros pelo que respeita a valores lógicos podem ser substituídos um pelo outro, pois cada um é verdadeiro se e só se o outro o é; isto permite, por vezes, dar às expressões uma forma mais conveniente.

Exemplos:

$\sim\sim A \Leftrightarrow A$ (lei da dupla negação)

$$\left.\begin{array}{l} \sim (A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B \\ \sim (A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B \end{array}\right\} \text{(leis da dualidade lógica, ou de De Morgan)}^4$$

$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge B \Rightarrow A]$: a equivalência é a conjunção de duas implicações recíprocas (condição necessária e suficiente)

[3] A verificação desta tautologia, em que há três letras, exigiria uma tabela com oito linhas, correspondentes a todos os possíveis arranjos com repetição de valores lógicos de A, B e C.

[4] Augustus de Morgan (1806-1871) foi um dos renovadores do estudo da lógica no séc. XIX, mas estas leis eram já conhecidas no séc. XIII, julgando-se que foram enunciadas pela primeira vez nas Summulae Logicales de Pedro Hispano.

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$

Em face desta última equivalência, podemos transformar o modus ponens em $A \wedge (\sim B \Rightarrow \sim A) \Rightarrow B$, obtendo o conhecido processo de demonstração por absurdo. Do mesmo modo, podemos transformar $\sim (A \Rightarrow B)$ sucessivamente em $\sim (\sim A \vee B)$, em $\sim\sim A \wedge \sim B$ e em $A \wedge \sim B$, obtendo, por meio da equivalência que acima se verificou, da lei da dualidade lógica e da da dupla negação, aquilo que já sabíamos: que $A \Rightarrow B$ é F sse A é V e B é F.

1.3 Cálculo dos predicados

Tradicionalmente decompõem-se as proposições em sujeito e predicado, mas, aqui, generalizaremos bastante a noção de sujeito.

Em qualquer proposição encontramos diversos termos (palavras ou expressões) que designam entidades a respeito das quais a proposição, seja V ou F, afirma qualquer coisa. Por exemplo, em

$$4 < 5 \ \vee \ 3^2 + 5 = 4$$

há os termos $2, 3, 4, 5, 3^2$ e 3^2+5 e os termos 4 e 5 até ocorrem duas vezes cada um. Podemos destacar desta proposição, como sujeito, alguma ou algumas destas ocorrências de termos e considerar como predicado que se atribui a esse sujeito todo o resto da expressão. E isto de muitos modos. Por exemplo, deixando espaços em branco ($\Box$) no lugar dos termos destacados, podemos entender aquela proposição como a afirmação de que:

1) o n.° 14, que é a entidade designada pelo termo 3^2+5, tem o predicado $4 < 5 \vee \Box = 4$ (isto é, a propriedade de ser 4 menor que 5 ou ser esse número, 14, igual a 4) – aliás, todos os inteiros têm este predicado porque 4 é menor que 5;

2) o n.° 5 tem o predicado $4 < \Box \vee 3^2 + 5 = 4$ (isto é, a propriedade de ser 4 menor que esse número ou ser $3^2 + 5 = 4$) – por exemplo, o número 5 não tem este predicado, o número 7 tem-no;

3) o n.° 5 tem também outro predicado $4 < \Box \vee 3^2 + \Box = 4$ (isto é, a propriedade de ser 4 menor que esse número ou ser a soma do quadrado de 3 com esse mesmo número igual a 4) – por exemplo, -6 não tem esta propriedade, -5 tem-na;

4) os n.°s 3 e 5, por esta ordem, têm o predicado $4 < \Box_2 \vee \Box_1^2 + \Box_2 = 4$ (quer dizer, ser 4 menor que o segundo número ou ser a soma do quadrado do

primeiro número com o segundo número igual a 4); aqui foi preciso distinguir $\Box_1$ de $\Box_2$ para se saber onde se tratava do primeiro e onde do segundo número. Em vez de "os números 3 e 5, por esta ordem" também se diz "o par de números $(3, 5)$" e, nestes casos, em vez de "uma propriedade de certo par de números" também se diz "uma relação (binária) entre certos números". Sendo mais de duas as entidades que constituem o sujeito, fala-se de relações ternárias, quaternárias, etc. Pode verificar-se que o par[5] $(5, 5)$ satisfaz a relação acima indicada, mas não o par $(5, 3)$, que é distinto de $(3, 5)$;

5) os n.°s 5 e 5 satisfazem a relação $4 < \Box_1 \vee 3^2 + \Box_2 = 4$, que já não será necessário traduzir em linguagem corrente, e que é um predicado distinto do referido em 3);

6) os n.°s $6, 5, 5$ e 7 satisfazem a relação quaternária

$$4 < \Box_2 \vee 3^2 + \Box_3 = 4$$

quer dizer, admitimos, mesmo, que o sujeito de uma proposição (ou parte dele) não figure na proposição: a própria proposição $4 < 5 \vee 3^2 + 5 = 4$, sem espaços em branco, pode ser considerada como um predicado que qualquer sujeito[6] possui (porque a proposição é V) e adiante se dará uma justificação desta convenção.

Correntemente, os predicados indicam-se colocando letras (em geral, das últimas do alfabeto), ou letras com índices, em vez dos espaços em branco; estas letras chamam-se as variáveis do predicado, ou propriedade, ou relação; a noção de variável envolve a da possibilidade de ser substituída (ou de serem preenchidos os respectivos espaços), por certos valores, que, ou são indicados, ou se subentendem a partir do contexto. No exemplo anterior, tendo em conta o que sabemos, as variáveis podem, por exemplo, representar números inteiros, ou números racionais, mas como vão ficar relacionadas pelo sinal $<$, já não podem representar números complexos. Nem podem representar triângulos, pessoas, etc.[7] Como veremos é, por vezes, indispensável, ao usar-

[5]Podia definir-se a noção de par a partir de outras, mas basta dizer que os elementos do par podem ser iguais e que interessa saber por que ordem são tomados; o mesmo se diz de sistemas ou famílias de 3 ou mais elementos, por ex., $(-1,\ 0,\ \sqrt{2},\ x)$.

[6]Falar de "qualquer sujeito" envolve complicações lógicas de que não podemos ocupar-nos neste curso.

[7]As variáveis, como se vê pelas interpretações dos predicados supra em linguagem corrente formalizam pronomes ("certo", "esse", "o primeiro", etc.), seguidos da palavra "número" que indica a classe de valores da variável.

se uma variável saber quais os valores que a essa variável se podem atribuir (quer tornem as expressões V, quer F).

Os predicados acima referidos são, então, correntemente indicados por expressões como

1) $4 < 5 \vee x = 4$

2) $4 < a_1 \vee 3^2 + 5 = 4$

3) $4 < z \vee 3^2 + z = 4$

4) $4 < b \vee a^2 + b = 4$

5) $4 < x_1 \vee 3^2 + x_2 = 4$

6) $4 < x_2 \vee 3^2 + x_3 = 4$

Expressões deste tipo chamam-se fórmulas proposicionais (f.p.) ou expressões proposicionais ou condições; não são proposições mas transformam-se em proposições se se substituir cada uma das variáveis por um dos valores que pode tomar[8]. Por exemplo, representando por $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ a f.p. 6) e supondo que as variáveis representam inteiros, $A(8, 2, 5, 9)$ representa a proposição $4 < 2 \vee 3^2 + 5 = 4$, por sinal F. Mas podemos, mais geralmente, substituir as variáveis por termos, que até podem, ainda, conter variáveis, (chamando-se-lhes então expressões designatórias), desde que as entidades que esses termos designam, ou podem designar, sejam valores que se podem atribuir à variável substituída.

Por vezes é necessário usar parêntesis para a expressão ficar correcta e, mais tarde, veremos outra restrição importante à possibilidade de substituir variáveis por termos. De qualquer modo, o resultado da substituição é, em geral[9] uma f.p. Por exemplo, $A(z^2,\ z^2+1,\ -5, 9)$ é $4 < z^2+1 \vee 3^2+(-5) = 4$.

Podemos agora fazer a classificação dos tipos de expressões que nos têm

[8] Subentende-se que a cada variável se pode atribuir pelo menos um valor.

[9] As proposições podem considerar-se f.p. em que as variáveis não figuram.

aparecido

$$\text{Expressões}\begin{cases}\text{sem significado}\\[2em] \text{com significado}\begin{cases}\text{sem variáveis}\begin{cases}\text{termos, ou designações}\\ \text{proposições}\end{cases}\\[2em] \text{com variáveis}\begin{cases}\text{expressões designatórias}\\ \text{expressões proposicionais,}\\ \text{ou fórmulas proposicionais,}\\ \text{ou condições}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Note-se que uma expressão proposicional pode representar diversos predicados, visto que estes se podem referir a variáveis que não figurem na expressão.

As f.p. podem, como as proposições, combinar-se por meio das operações de $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ dando novas f.p.

Ao contrário das proposições, que só podem ser V ou F, para as f.p. há três casos. Consideremos uma f.p. $A(x)$ em que figure uma só variável, x.

Quando se substitui esta variável pelos seus possíveis valores (dados por termos constantes, sem novas variáveis), obtêm-se proposições e pode acontecer que:

1.°) todas essas proposições sejam V;

2.°) pelo menos uma dessas proposições seja V e pelo menos uma seja F;

3.°) todas essas proposições sejam F

(abreviadamente, $A(x)$ pode ser: sempre V, ora V ora F, ou sempre F).

Esquematicamente[10],

$$\text{predicados}\begin{cases}\text{possíveis}\begin{cases}\text{universais (sempre } V)\\ \text{não-universais (ora } V, \text{ ora } F)\end{cases}\\[2em] \text{impossíveis (sempre } F)\end{cases}$$

[10] O mesmo esquema vale para predicados com mais de uma variável; se se tratar de uma expressão proposicional em que não figurem variáveis (que, portanto, se exprime como uma proposição), ou representa um predicado universal ou um predicado impossível.

No primeiro caso, escreve-se $\forall_x\ A(x)$ "qualquer que seja x, [verifica-se] $A(x)$" e, se não se está no terceiro caso (portanto se acontece o primeiro ou o segundo), escreve-se $\exists_x\ A(x)$ "existe [pelo menos] um x tal que [se verifica] $A(x)$". As palavras entre parêntesis rectos costumam omitir-se na linguagem corrente.

Os sinais $\forall_x$ e $\exists_x$ chamam-se quantificadores, respectivamente universal (ou geral) e particular (ou existencial). Escrevem-se à esquerda[11] das f.p. a que se aplicam e têm, como a negação ($\sim$), prioridade sobre as operações de $\wedge, \vee, \Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ no que se refere ao uso de parêntesis.

Note-se que, como supusemos que em $A(x)$ havia uma só variável, as expressões $\forall_x\ A(x)$ e $\exists_x A(x)$ já não são f.p.: são proposições, visto que afirmam, a primeira, que a f.p. $A(x)$ é sempre V e, a segunda, que não é sempre F.

Vejamos alguns exemplos, que servirão também para justificar certas convenções ou afirmações anteriores.

a) Seja x uma variável inteira (isto é, admita como valores todos os números inteiros e apenas esses) e considere-se a f.p. $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$. Se $x = 2, 3, 4, \ldots, x > 1$ é V e $x^2 > 1$ também; se $x = -1$, 0 ou 1, $x > 1$ é F e $x^2 > 1$ também; se $x = -2, -3, -4, \ldots$, $x > 1$ é F e $x^2 > 1$ é V. Em todos os casos, de acordo com a tabela de valores lógicos de $\Rightarrow$ a f.p. dada é V, isto é, $\forall_x\ x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ é uma proposição V.

   A definição de $\Rightarrow$ adoptada no cálculo proposicional está, pois, de acordo com certo uso que já se dava à conjunção "se", pois já dizíamos, sem restrição quanto aos valores de x, "se $x > 1$, então $x^2 > 1$". O que sucede é que até aqui sempre que se afirmava uma implicação, $A \Rightarrow B$, pensávamos em certa argumentação (neste caso aritmética) que a justificasse e para tal argumentação não era necessário considerar os casos em que A era F, pois nesses nada havia a provar. Mas no cálculo proposicional não interessa o significado de A nem o de B, apenas os seus valores lógicos e foi preciso convencionar o que sucede a $A \Rightarrow B$ quando A é F.

b) Ainda com variável inteira, a f.p. $0 \times z > 1$ é sempre F; sendo, pois, V a proposição $\forall_z \sim 0 \times z > 1$. Se se notar que $0 \times z$ designa sempre o número 0, compreende-se que se possa considerar $0 > 1$ uma f.p.

[11] Por vezes usam-se outras notações, mas esta é mais clara.

sempre F, embora em $0 > 1$ não figurem variáveis, e, analogamente, $0 < 1$ uma f.p. sempre V.

c) Ainda com x inteiro, a f.p. $x^2 + 2 = 6$ é ora V (se x é 2 ou -2), ora F (para os restantes valores de x). É, pois, V a proposição $\exists_x\ x^2 + 2 = 6$, mas é F a proposição $\exists_x\ x^2 + 2 = 1$. No entanto, se x fosse variável complexa, já esta última proposição seria V, porque $x^2 + 2 = 1$ admite as soluções i e $-i$. E se os valores de x fossem apenas estes dois números (o que é questão de convenção: que significado tem a letra x?) até seria V a proposição $\forall_x\ x^2 + 2 = 1$.

Mais geralmente, podemos aplicar um quantificador a uma f.p. que tenha mais de uma variável, obtendo-se expressões como $\exists_x\ x^2 + 2 = z$, (supomos x e z inteiros).

Tal expressão não é proposição apenas porque não está fixado o valor de z: é, portanto, uma f.p. apenas com a variável z. De facto, substituindo z por 6 e por 1, vimos que se obtinham proposições, a primeira V e a segunda F.

Logo, se a certa f.p., por exemplo $A(x_1, x_2, x_3)$, aplicarmos um quantificador, por exemplo $\forall_{x_2}$, ficam com papéis diferentes a variável x_2 (que se diz quantificada, ou ligada) e as restantes (que se dizem livres)[12]: a expressão torna-se proposição quando se substituem as variáveis livres por valores (constantes), não as ligadas que devem ser conservadas para que a expressão mantenha o seu significado.

Se aplicássemos novo quantificador – por exemplo, $\exists_{x_3} \forall_{x_2} A(x_1, x_2, x_3)$ – viria uma f.p. apenas com uma variável livre (x_1). Etc.

A distinção entre variáveis livres e ligadas é importante, por dois motivos:

1.°) uma variável ligada pode ser substituída por qualquer letra que possa tomar os mesmos valores e que seja diferente das restantes letras abrangidas pelo mesmo quantificador. Por exemplo, $\exists_x\ x^2+2 = 1$ e $\exists_n\ n^2+2 = 1$, com x e n inteiros, significam exactamente o mesmo (que há pelo

[12]Mais geralmente podemos ter expressões como $x < 2\ \vee\ \exists_x\ x^2 + 2 = z$, de modo que podem ser livres certas ocorrências duma variável e ligadas outras. Mas é conveniente, nestes casos, para evitar confusões e como se verá que é possível, substituir as ocorrências ligadas por letra diferente, de modo que cada variável ou seja ligada ou seja livre:

$$x < 2 \vee \exists_n\ n^2 + 2 = z.$$

menos um inteiro cujo quadrado, somado com 2, dá 1), o que, aliás, é F.

Por outro lado, $\forall_x\ x + y = y + z$ (com variáveis inteiras) é sempre F mas $\forall_z\ z + y = y + z$ é sempre V; $\forall_x\ \forall_z\ x = z$ é F, e $\forall_x\ \forall_z\ z = z$ é V.

2.°) Se uma variável livre figura numa expressão abrangida por um quantificador não se pode substituir essa variável por termos que contenham a variável do quantificador.

Por exemplo, $\forall_x\ x^2+2 = z$ é f.p. sempre F, pois não há nenhum número z que seja igual a todos os valores de $x^2 + 2$, mas $\forall_x\ x^2 + 2 = x^2 + 2$ é (proposição) V.

No cálculo dos predicados interessa (como já sucedia no cálculo das proposições com as tautologias) procurar expressões logicamente válidas, isto é, cuja validade resulta apenas da sua estrutura lógica, independentemente, portanto, do significado dos sinais não-lógicos que lá figuram. O problema é mais complicado que no cálculo das proposições (onde tudo se resolvia com as tabelas de valores) e limitamo-nos a dar uma lista das expressões logicamente válidas mais importantes, acrescentando num ou noutro caso, para exemplo, argumentos em seu favor.

1) $\forall_x\ A(x) \wedge \forall_x\ B(x) \Leftrightarrow \forall_x\ [A(x) \wedge B(x)]$

2) $\forall_x\ A(x)\ \vee\ \forall_x\ B(x) \Rightarrow \forall_x\ [A(x)\ \vee\ B(x)]$

De facto, a hipótese de implicação afirma que ou $A(x)$ é sempre V ou $B(x)$ o é.

No primeiro caso, para qualquer valor de x, $A(x)$ é V, logo $A(x) \vee B(x)$ também e, portanto, $A(x) \vee B(x)$ é sempre V.

No segundo caso, analogamente.

Então, em qualquer dos casos $\forall_x\ [A(x) \vee B(x)]$ é V e a implicação dada é logicamente válida.

A implicação recíproca $\forall_x\ [A(x)\ \vee\ B(x)]\ \Rightarrow\ \forall_x\ A(x)\ \vee\ \forall_x\ B(x)$ não é logicamente válida, como se vê pelo seguinte exemplo (x inteiro): $\forall_x$ [x é par $\vee$ x é ímpar] é V, mas $\forall_x x$ é par $\vee \forall_x x$ é ímpar é F.

3) $\forall_x\ [A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow [\forall_x A(x) \Rightarrow \forall_x B(x)]$, mas não reciprocamente.[13]

[13]Quando se verifica $\forall_x [A(x) \Rightarrow B(x)]$, ou $\forall_x\ \forall_y\ [A(x, y) \Rightarrow B(x, y)]$, etc., diz-se que se

4) $\forall_x \forall_y A(x,y) \Leftrightarrow \forall_y \forall_x A(x,y)$ e analogamente com ambos os quantificadores existenciais.

5) $$\begin{array}{lcl} \exists_x A(x) & \Leftrightarrow & \sim \forall_x \sim A(x) \\ \forall_x A(x) & \Leftrightarrow & \sim \exists_x \sim A(x) \end{array}$$

6) $$\begin{array}{lcl} \sim \forall_x B(x) & \Leftrightarrow & \exists_x \sim B(x) \\ \sim \exists_x B(x) & \Leftrightarrow & \forall_x \sim B(x) \end{array}$$

Estas expressões são conhecidas por leis de De Morgan do cálculo dos predicados mas traduzem exactamente a regra da lógica aristotélica segundo a qual uma proposição universal afirmativa (A) é contraditória da correspondente particular negativa (0) e uma particular afirmativa (I) é contraditória da correspondente universal negativa (E).

7) $\exists_x \forall_y A(x,y) \Rightarrow \forall_y \exists_x A(x,y)$

De facto, suponhamos que para $x = x_0$ se verifica $\forall_y A(x,y)$, isto é, que $\forall_y A(x_0,y)$, é V. Então, para qualquer y, $A(x_0,y)$ é V e, portanto, $\exists_x A(x,y)$ é sempre V. Logo, $\forall_y \exists_x A(x,y)$.

A implicação recíproca não é logicamente válida, como se vê pelo seguinte exemplo em que x e y são inteiros: $\forall_y \exists_x\, x+y=2$ é V, pois, para qualquer y, a equação $x+y=2$ tem solução (que é $x=2-y$). Mas $\exists_x \forall_y\, x+y=2$ é F, pois o que esta proposição afirma é que existe um inteiro x tal que, para qualquer inteiro y, o referido inteiro x satisfaz $x+y=2$, isto é, é $x=2-y$ e nenhum inteiro fixo, x, pode ser igual a todos os valores de $2-y$. A diferença está em que, em $\forall_y \exists_x\, x+y=2$, o quantificador $\exists_x$ é aplicado à f.p. $x+y=2$, em que y é variável livre e o valor de x desejado pode vir dependente de y; pelo contrário, em $\exists_x \forall_y\, x+y=2$, o quantificador $\exists_x$ é aplicado a $\forall_y\, x+y=2$, em que y é variável ligada, isto é, aplica-se $\exists_x$ a uma f.p. cujo significado não depende de se atribuirem valores a y, de modo que o valor procurado de x não pode depender de y, tem de ser uma constante. Estas considerações mostram que, em geral, não se pode alterar a

trata de uma implicação formal. Neste caso, quando x puder tomar uma infinidade de valores, é necessário um argumento genérico que permita relacionar, para todos os valores de x, os valores lógicos de $A(x)$ com os de $B(x)$, isto é, é necessária uma demonstração, como aquelas a que estamos habituados, que tem de se fundamentar no significado dos predicados A e B. Não aparece neste caso o que havia de estranho em se considerar V uma proposição como "se ontem choveu, então $2+2=4$" (implicação material). De modo análogo se define a equivalência formal, $\forall_x [A(x) \Leftrightarrow B(x)]$, etc.

ordem dos quantificadores quando uns forem universais e outros particulares. De modo que é necessário, para evitar ou confusões ou uso de parêntesis, escrever os quantificadores todos à esquerda das expressões proposicionais a que se referem. Mas, por vezes, suprimiremos os quantificadores universais que estiverem à esquerda de todos os restantes.

1.4 Igualdade

Em vários dos exemplos anteriores usou-se, sem mais esclarecimentos, o predicado =, que é uma relação binária. Mas é possível defini-lo em termos puramente lógicos numa generalização do cálculo dos predicados (cálculo dos predicados de segunda ordem) em que é lícito considerar não apenas variáveis representativas dos sujeitos das proposições, mas também variáveis representativas de predicados. Pode então formalizar-se a noção intuitiva de igualdade entre a e b: tudo o que é possível dizer de a é possível dizer de b e reciprocamente. E isto faz-se introduzindo uma variável, R que representa um predicado qualquer[14] (com um só sujeito) e definindo

$$a = b \quad \text{como} \quad \forall_R \, [R(a) \Leftrightarrow R(b)]$$

Daqui podem deduzir-se as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da igualdade

$$\forall_x \, x = x$$

$$\forall_x \, \forall_y \, (x = y \Rightarrow y = x)$$

$$\forall_x \, \forall_y \, \forall_z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$$

Por exemplo, a demonstração da propriedade simétrica é:
Como $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$ é uma tautologia do cálculo proposicional,

$$[R(x) \Leftrightarrow R(y)] \Rightarrow [R(y) \Leftrightarrow R(x)]$$

independentemente dos valores de x, y e R, donde

$$\forall_R \{[R(x) \Leftrightarrow R(y)] \Rightarrow [R(y) \Leftrightarrow R(x)]\}$$

[14]Falar de "um predicado qualquer" levanta dificuldades lógicas. Para cada teoria matemática supõe-se fixada a totalidade dos valores que R pode tomar.

e daqui, pela fórmula logicamente válida 3) da secção anterior,

$$\forall_R\,[R(x) \Leftrightarrow R(y)] \Rightarrow \forall_R\,[R(y) \Leftrightarrow R(x)]$$

isto é,

$$x = y \Rightarrow y = x$$

O predicado = permite-nos, ainda, definir logicamente outras noções.

Se se verifica, para certo predicado, R,

8) $\forall_x\,\forall_{x'}\,[R(x) \wedge R(x') \Rightarrow x = x']$

diz-se "existe quando muito um x que satisfaz $R(x)$" (pois, se houvesse dois, x e x', seriam iguais); note-se que isto não implica $\exists_x\,R(x)$ "existe pelo menos um x que..." pois 8) é V se a hipótese $R(x) \wedge R(x')$ for sempre F.

Pode ainda acontecer que se verifique a conjunção das duas propriedades anteriores:

$$\begin{array}{ll} \exists_x\,R(x) \wedge & \text{existe pelo menos um } x \ldots \\ \wedge\,\forall_x\,\forall_{x'}[R(x) \wedge R(x') \Rightarrow x = x'] & \text{existe quando muito um } x \ldots \end{array}$$

Diz-se então "existe um e um só x que satisfaz $R(x)$" e escreve-se

$$\exists_x\,!\,R(x)$$

Pode demonstrar-se no cálculo dos predicados que uma condição necessária e suficiente para que

$$\exists_x!\,R(x)$$

é que

$$\exists_a\forall_x\,[R(x) \Leftrightarrow x = a]$$

Note-se ainda que é este quantificador singular $\exists!$ que permite definir termos a partir de predicados, como na expressão "o homem que vimos ontem", que tem sentido sse

$$\exists_h!\ (h\ \text{ é homem e nós vimo-lo ontem}).$$