

Capítulo 2

Noções de Teoria dos Conjuntos

2.1 A noção de conjunto

Como se disse, sempre que se usa uma variável supõe-se que ela pode ser substituída por certos valores. A noção de variável é, pois, inseparável da totalidade das entidades que representa. Não é possível reduzir esta noção a noções mais simples; quando muito, em vez de “totalidade”, podem empregar-se sinónimos: “coleção” ou, mais habitualmente, “conjunto”. Pensamos num conjunto quando pensamos colectivamente em certas entidades e cada uma delas é elemento desse conjunto.

Por exemplo: o conjunto das pessoas que estão nesta sala, o dos números naturais, $1, 2, 3, \dots$, que habitualmente se representa por \mathbb{N} , o dos números inteiros, \mathbb{Z} , e o dos números racionais, \mathbb{Q} , (números cujas propriedades supomos conhecidas), o conjunto dos pontos de uma recta, o das letras do alfabeto português, etc.

Para indicar que a é elemento do conjunto C escreve-se $a \in C$ “ a pertence a C ”; $b \notin C$ significa $\sim (b \in C)$ “ b não pertence a C ”.

Sendo x variável que admita como valores todos os elementos de C e possivelmente outros, $x \in C$ é uma f.p. que se torna proposição verdadeira quando x é elemento de C e só nesse caso.

A recíproca, isto é, que a cada expressão proposicional $A(x)$ corresponde um conjunto, não se pode afirmar sem certas restrições de ordem lógica de que não nos podemos ocupar aqui. Mas convém dar um exemplo das dificuldades que podem surgir (paradoxo de RUSSELL-ZERMELO)¹.

¹Ernst ZERMELO (1871 - 1956), alemão, a quem se deve a teoria axiomática dos con-

Representemos por $\{x : A(x)\}$ o conjunto formado por todos os valores de x que verificam $A(x)$ (e só esses).

Suponhamos que $A(x)$ é $x \notin x$ e que os valores da variável x são todos os conjuntos possíveis. Então, $x \notin x$ significa que x não é elemento de si próprio (o que se verifica por exemplo para o conjunto \mathbb{N} pois o conjunto dos números naturais não é um número natural). Seja C o conjunto formado por todos os conjuntos que satisfazem $x \notin x$, isto é, seja

$$C = \{x : x \notin x\}$$

Pode então perguntar-se se $C \in C$ ou se $C \notin C$. Mas, se fosse $C \in C$, C seria um dos elementos do conjunto C , logo satisfaria $x \notin x$, logo teríamos $C \notin C$; contradição. Analogamente, se $C \notin C$, C não satisfaria $x \notin x$, logo teríamos $C \in C$.

Têm-se construído diversas teorias que permitem eliminar este e outros paradoxos da teoria dos conjuntos – sem garantia aliás de que outros não possam surgir. Neste curso apenas podemos tomar a precaução de não usar nenhuma variável, x , sem supor previamente conhecido o conjunto de todos os seus valores possíveis (o conjunto percorrido por x), que será geralmente um conjunto bastante elementar, e confiar em que não apareçam contradições. De um modo geral, em cada teoria matemática supõe-se que as variáveis só podem tomar valores em certo conjunto universal, U , que abrange todas as entidades que nessa teoria é necessário considerar. Aliás, o significado de $\{x : A(x)\}$ depende do da variável x , isto é, do conjunto percorrido por x . Assim, por exemplo, conforme x designe um número real ou complexo, assim o conjunto $\{x : x^4 = 1\}$ tem como elementos os números -1 e 1 ou os números -1 , 1 , i e $-i$.

Quando um conjunto é indicado por uma notação como $\{x : A(x)\}$, diz-se que está definido em compreensão.

Se um conjunto tem poucos elementos, também pode ser definido em extensão escrevendo os seus elementos um a um, por qualquer ordem, entre chavetas e separados por vírgulas. Por exemplo, os dois conjuntos acima indicados são

$$\{1, -1\} \quad \text{e} \quad \{1, -1, i, -i\}.$$

juntos e em particular o chamado axioma de escolha, de que adiante falaremos. Bertrand RUSSELL, nascido em 1872 e morto há poucos anos, inglês que se dedicou de 1902 a 1919 à lógica matemática e depois a diversas questões.

2.2 Operações sobre conjuntos

Consideremos dois conjuntos, A e B , e as respectivas f.p., $x \in A$ e $x \in B$.

Combinando-se por operações do cálculo proposicional, obtemos novas f.p., a que corresponderão novos conjuntos.

Interessam-nos três casos:

$\{x : \sim x \in A\}$, conjunto complementar de A que se escreve $\setminus A^2$;

$\{x : x \in A \wedge x \in B\}$, intersecção ou produto lógico, ou parte comum de A e B , que se escreve $A \cap B$;

$\{x : x \in A \vee x \in B\}$, reunião ou soma lógica de A e B , $A \cup B$.

Exemplos: sendo

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, e, i, o, u\},$$

$A \cap B$ é o conjunto $\{a\}$, com um só elemento e $A \cup B$ é o conjunto $\{a, b, c, e, i, o, u\}$.

$\setminus A$ é o conjunto constituído por todas as entidades do conjunto universal, excepto as que são designadas por a , b e c . O complementar de U , $\setminus U$, é um conjunto sem elemento nenhum, o conjunto vazio, que se escreve \emptyset (ou 0 , ou \square) e que pode aparecer em numerosos casos, por exemplo, como $\{a, b, c\} \cap \{d, e\}$ ou como $\{x : x \text{ é inteiro} \wedge x^2 = -1\}$.

A implicação e a equivalência interessam-nos quando são formais; as expressões

a) $\forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

e

b) $\forall_x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

são proposições que afirmam que os conjuntos A e B satisfazem certas relações. A primeira escreve-se $A \subseteq B$ (ou $A \subset B$) e significa, como a expressão a) indica, que todo o elemento de A é também elemento de B ; a segunda escreve-se $A = B$ e significa que os elementos de A são precisamente os mesmos de B .

Estas relações chamam-se, respectivamente, “inclusão” e “igualdade” de conjuntos e lêem-se “ A está contido em B ” (ou “ A é parte de B ” ou “ A é

²Por vezes usam-se outras notações menos convenientes: $\sim A, \bar{A}, C A$.

subconjunto de B ³, podendo ainda escrever-se $B \supseteq A$ e ler-se “ B contém A ”) e “ A é igual a B ”, quer dizer, consideram-se iguais dois conjuntos, mesmo definidos por f.p. diferentes, se tiverem exactamente os mesmos elementos.

As operações \setminus , \cap e \cup sobre conjuntos têm propriedades que vamos estudar sumariamente.

Em geral, dados vários conjuntos A, B, C, \dots , e construídas várias expressões em que figuram algumas destas letras e sinais daquelas operações⁴ (por exemplo, $A, B, \setminus A, \setminus B, A \cup B, A \cap C, B \cap C, \dots$) tratar-se-á de provar que uma destas expressões é igual ou está contida noutra, eventualmente sob a hipótese de certas outras expressões serem também iguais ou satisfazerem as relações de inclusão.

Por exemplo, podemos querer provar que

$$A \subseteq A \cup B$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \setminus B \subseteq \setminus A, \text{ etc.}$$

Todos os problemas deste tipo se podem reduzir a questões de cálculo das proposições ou dos predicados. Atendendo às definições das operações e relações entre conjuntos, trata-se de provar, respectivamente, que

$$\forall_x (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B), \text{ isto é, } \forall_x (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B)$$

$$\forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow \forall_x (x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C)$$

$$\forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall_x (\sim x \in B \Rightarrow \sim x \in A)$$

Exemplifiquemos com a demonstração da segunda destas expressões (as equivalências reduzem-se, como se sabe, a duas implicações). Uma das expressões logicamente válidas que se indicaram no fim do capítulo anterior mostra que basta provar

$$\forall_x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow (x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C)];$$

³Chama-se “parte trivial de B ” o conjunto vazio, “parte imprópria de B ” o próprio B , “parte própria de B ”, qualquer que não seja imprópria. O conjunto das partes de A escreve-se $\mathcal{P}(A)$, ou $\mathcal{B}(A)$, (B é a inicial de BOOLE; ver nota da página ??), ou 2^A .

⁴Quanto ao uso de parêntesis, convencionaremos que a ordem de prioridade é: \setminus, \cap, \cup .

basta, portanto, provar que a expressão dentro de parêntesis rectos é sempre V . Ora, nesta expressão só figuram símbolos do cálculo proposicional aplicados às proposições (mais propriamente, são f.p., mas, para cada valor fixo de x , são proposições) $x \in A$, $x \in B$ e $x \in C$, que representaremos por P, Q, R .

Basta, pois, ver que

$$P \Rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R \Rightarrow Q \wedge R)$$

é uma tautologia, o que é fácil, por construção de uma tabela de valores lógicos (com oito linhas).

Damos a seguir uma lista de propriedades importantes das operações e relações entre conjuntos, que se poderiam demonstrar pelo método acima indicado e também em muitos casos deduzir de outras expressões, já demonstradas, da mesma lista.

1. propriedades reflexiva e transitiva da inclusão:

- (a) $A \subseteq A$
- (b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

2. inclusões triviais:

- (a) $\emptyset \subseteq A$
- (b) $A \subseteq U$

3. a igualdade como dupla inclusão:

- (a) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

4. propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da igualdade:

- (a) $A = A$
- (b) $A = B \Rightarrow B = A$
- (c) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

5. complementos triviais:

- (a) $\setminus \setminus A = A$
- (b) $\setminus \emptyset = U$

$$(c) \setminus U = \emptyset$$

$$6. A \subseteq B \Leftrightarrow \setminus B \subseteq \setminus A$$

7. idempotência, comutatividade e associatividade da intersecção:

$$(a) A \cap A = A$$

$$(b) A \cap B = B \cap A$$

$$(c) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

8. intersecções triviais:

$$(a) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(b) A \cap U = A$$

$$(c) A \cap \setminus A = \emptyset$$

9. monotonia da \cap : $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

$$10. A \cap B \subseteq A$$

11. idempotência, comutatividade e associatividade da reunião:

$$(a) A \cup A = A$$

$$(b) A \cup B = B \cup A$$

$$(c) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

12. reuniões triviais:

$$(a) A \cup \emptyset = A$$

$$(b) A \cup U = U$$

$$(c) A \cup \setminus A = U$$

13. monotonia da \cup : $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

$$14. A \subseteq A \cup B$$

15. mútua⁵ distributividade entre a reunião e a intersecção:

⁵Há, pois, esta diferença importante entre as operações \cup e \cap (soma e produtos lógicos) e a adição e multiplicação de números, em que só a segunda é distributiva em relação à primeira. Na disciplina de Sistemas Lógicos estudam-se álgebras em que se verifica esta dupla distributividade, chamadas Álgebras de BOOLE. A George BOOLE (1815-1864), inglês, e a DE MORGAN, se devem as primeiras matematizações da lógica (1847).

- (a) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
 (b) $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

16. dualidade entre a reunião e a intersecção por passagem aos complementares:

- (a) $\setminus(A \cap B) = \setminus A \cup \setminus B$
 (b) $\setminus(A \cup B) = \setminus A \cap \setminus B$.

Observações:

1. Convém não confundir os sinais \in e \subseteq . O primeiro estabelece uma relação entre uma entidade e um conjunto a que pertence; o segundo, uma relação entre dois conjuntos. E distingue-se também entre um conjunto, $\{a\}$, com um só elemento, e esse elemento, a . De modo que se escreve $a \in \{a\}$ e $\{a\} \subseteq \{a\}$ mas não inversamente. Aliás, nada impede que os elementos de um conjunto sejam por sua vez conjuntos.

Por exemplo, podemos falar de um conjunto de rectas, que por sua vez estamos considerando como conjunto de pontos. Mas o conjunto de todos os pontos pertencentes a essas rectas é uma entidade distinta do conjunto das rectas (os elementos deste conjunto, são rectas; os do outro, pontos). Do mesmo modo, é preciso distinguir entre

$$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\} \text{ e } \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}, \text{ que é } = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. Dado um conjunto, A , passa a ter um sentido preciso a noção de variável que percorre A (isto é, cujos valores são todos os elementos de A e só esses). Isto permite simplificar as expressões dos tipos

$$\forall_x [x \in A \Rightarrow B(x)] \text{ e } \exists_x [x \in A \wedge B(x)]$$

que se poderão escrever $\forall_{x \in A} B(x)$ e $\exists_{x \in A} B(x)$, respectivamente. Por vezes até se omite a indicação de que x pertence a A se isso constar do contexto.

3. Além das operações acima referidas, também se considera a diferença de conjuntos, $A \setminus B$, definida por

$$A \setminus B = A \cap \setminus B$$

cujas propriedades se estabelecem facilmente a partir da definição. Não é necessário que $B \subseteq A$.

2.3 Produto cartesiano. Funções.

A noção de par (ordenado), (a, b) , que já usámos em exemplos anteriores, difere da de conjunto com dois elementos, $\{a, b\}$ com $a \neq b$, por dois motivos:

- 1.º) Se $a \neq b$, $(a, b) \neq (b, a)$, ao passo que $\{a, b\}$ é sempre $= \{b, a\}$.
- 2.º) (a, a) é um par – em que acontece que são iguais ambos os elementos – mas $\{a, a\}$ não é um conjunto com dois elementos.

A noção de par não é independente da de conjunto, pois pode tomar-se como definição de (a, b) o conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Quer dizer: os conjuntos deste tipo têm todas as propriedades que nos interessa que os pares tenham. Por exemplo, com $a \neq b$, $(a, b) \neq (b, a)$ porque então $\{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{b, a\}\}$. Outra propriedade importante, que também se pode demonstrar a partir da mesma definição, é que, dados dois pares (a, b) e (a', b')

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Consideremos agora uma relação binária, isto é, uma f.p. com duas variáveis, $R(x, y)$, em que supomos que x percorre X e y percorre Y ⁶. Como sabemos, esta relação é satisfeita por alguns pares (x, y) eventualmente todos ou nenhum.

O conjunto desses pares chama-se o gráfico da relação,

$$G = \{(x, y) : R(x, y)\}$$

Por exemplo, sendo $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$ e sendo $R(x, y)$ dada por $x + y = 4$,

$$G = \{(1, 3), (2, 2)\}$$

Se nenhum par (x, y) satisfaz R , $G = \emptyset$; se todos satisfazem, escreve-se $G = X \times Y$, conjunto que se chama produto cartesiano de X por Y . Por exemplo, com os conjuntos X e Y dados,

$$X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

⁶Conjuntos que geralmente se supõem não vazios; mas não é obrigatório.

A designação de cartesiano vem do processo de representação gráfica que se usa em geometria analítica. Supondo que os elementos de X e os de Y estão representados por certos pontos de duas rectas do plano, uma para cada conjunto, os elementos (x, y) de G ficam representados pelos pontos do plano cujas projecções nos dois eixos são os pontos correspondentes a x e y .

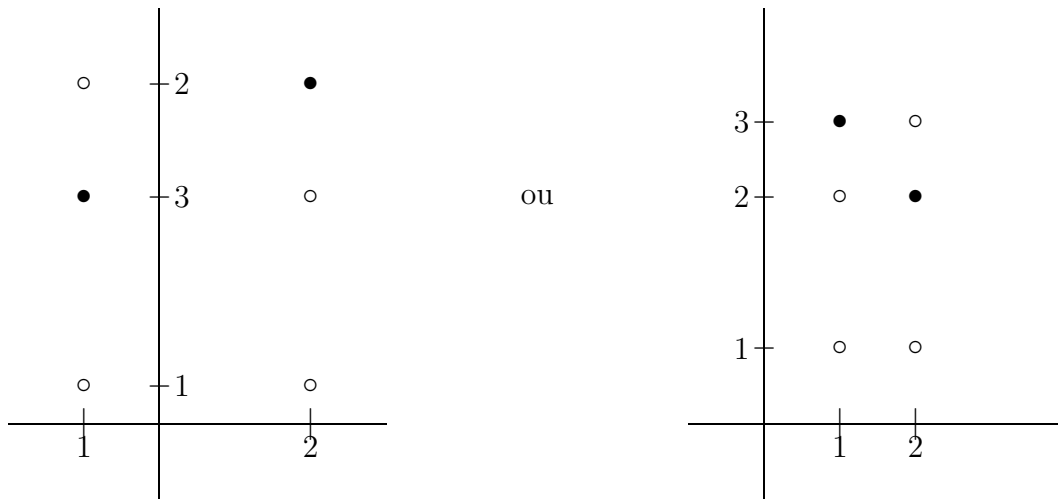


Fig. 1

Na figura 1, os elementos de G são os pontos representados pelos círculos negros e os de $X \times Y$, os representados pelos negros e pelos brancos.

Note-se que, como X e Y têm um número finito de elementos (e poucos) a correspondência entre os seus elementos e pontos de recta pode ser arbitrária.

Outro exemplo: sejam X e Y os próprios eixos, considerados como conjuntos de pontos, e seja G o conjunto dos pontos de uma circunferência.

Podem distinguir-se três espécies de elementos de X , conforme as paralelas ao eixo Y que passam por tais pontos não intersectam G , intersectam G em um ponto e um só ou intersectam G em mais de um ponto. São os casos de x_0 , x_1 e x_2 (figura 2).

Podem exprimir-se esta distinção dizendo que x_0 não satisfaz, mas x_1 e x_2 satisfazem, a condição $\exists_y R(x, y)$ e que x_2 não satisfaz, mas x_1 satisfaz (e x_0 também), a condição $\forall_y \forall_{y'} [R(x, y) \wedge R(x, y') \Rightarrow y = y']$.

Podem, porém, acontecer, para certas relações, que só haja pontos do tipo x_1 , isto é, que R satisfaça as duas condições

$$a) \forall_x \exists_y R(x, y)$$

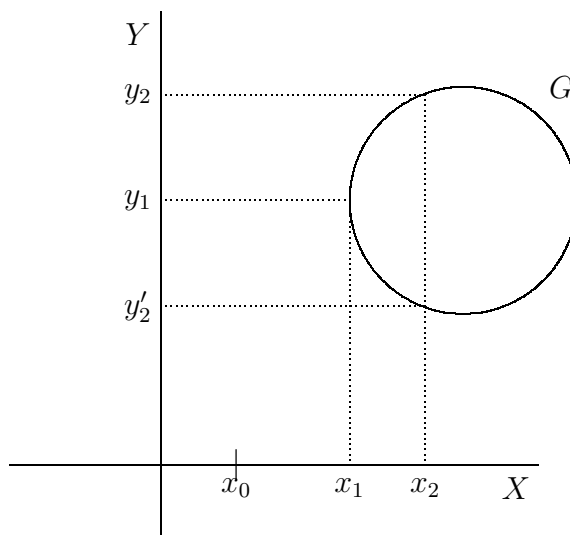


Fig. 2

$$\text{b) } \forall_x \forall_y \forall_{y'} [R(x, y) \wedge R(x, y') \Rightarrow y = y']$$

ou, de outro modo, a condição

$$\forall_x \exists_y! R(x, y)$$

Nestas condições, diz-se que $R(x, y)$ define uma função ou transformação, ou aplicação, de X para Y : para cada x de X há um único valor de y tal que $R(x, y)$ e este valor de y representa-se por uma notação do tipo $f(x)$, isto é,

$$\forall_x \forall_y [R(x, y) \Leftrightarrow y = f(x)].$$

O facto de f designar uma função de X para Y indica-se escrevendo $f : X \rightarrow Y$; X chama-se o domínio⁷ de f e $f(x)$ o transformado ou imagem de x por f . Se $S(x, y)$ é outra relação e se $\forall_x \forall_y [R(x, y) \Leftrightarrow S(x, y)]$, os gráficos de R e S são iguais e também S define uma função, $g : X \rightarrow Y$, mas $\forall_x \forall_y [y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x)]$ de modo que $\forall_x f(x) = g(x)$. Toma-se esta propriedade como definição de igualdade de funções (ambas com o mesmo domínio) escrevendo-se então $f = g$.

⁷Se X for vazio, obtém-se em particular a função vazia, cujo gráfico é vazio.

Uma função pode então ser definida de muitos modos: ou explicitamente por equações do tipo $y = f(x)$, $y = g(x), \dots$, em que as expressões designatórias $f(x)$, $g(x), \dots$ (em que normalmente figurará x), podem ser diferentes (embora conduzam sempre aos mesmos valores) ou implicitamente por f.p., $R(x, y)$, $S(x, y), \dots$ (equivalentes entre si), que não tenham aquela forma explícita.

Por exemplo, com $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$, $G = \{(1, 3), (2, 2)\}$ é o gráfico de uma função que pode ser definida por $x + y = 4$, por $[(x - 1)^2 + (y - 3)^2] \times [(x - 2)^2 + (y - 2)^2] = 0$, por $y = 4 - x$, por $y = \sqrt[3]{(4 - x)^3}$, etc. Pode indicar-se esta função indicando o seu domínio, $\{1, 2\}$, o seu conjunto de chegada, $\{1, 2, 3\}$, e uma regra que permita passar de x para $f(x) : x \mapsto 4 - x$, $x \mapsto \sqrt[3]{(4 - x)^3}$, etc.

Sendo $A \subseteq X$, representa-se por $f(A)$ ⁸ o conjunto $\{y : \exists x x \in A \wedge y = f(x)\}$ ou, como abreviadamente se costuma escrever, $\{f(x) : x \in A\}$, que vem a ser o conjunto dos transformados, por f , dos elementos de A ; em particular $f(X)$ chama-se o contradomínio de f . Em geral Y não é o contradomínio; é apenas o conjunto de chegada.

Sendo do mesmo modo $A \subseteq X$, $G \cap (A \times Y)$ é o gráfico de uma função, $h : A \rightarrow Y$, que se representa por $f|_A$ e se chama a restrição de f a A .

Também se diz que f é um prolongamento de h a X . Quando uma relação R satisfizer b) mas não a), sendo $X_0 = \{x : \exists y R(x, y)\}$, $G \cap (X_0 \times Y)$ é já o gráfico de uma função, não de X para Y , mas de X_0 para Y . Quando R satisfizer a) mas não b) ainda por vezes se diz que define uma função não-unívoca (como no caso de $x - y^2 = 0$ que conduz a $y = \pm\sqrt{x}$), mas quando nada se disser, supõe-se que as funções de que se fala são unívocas.

Facilmente se demonstra que, se $A \subseteq B \subseteq X$, $f(A) \subseteq f(B)$.

Consideremos agora três variáveis, x , y e z que percorrem respectivamente os conjuntos X , Y e Z , e duas funções, $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ ⁹.

Chama-se composta (ou produto) de g e f e representa-se por $g \circ f$ a função de X para Z definida por

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Esta operação de composição de funções não é comutativa, nem se põe em geral esse problema (só se $Z = X$). Mesmo quando é possível considerar

⁸Por vezes usam-se outras notações, como $f \langle A \rangle$, para fazer notar que A não é elemento de X .

⁹Bastaria que o contradomínio de f estivesse contido no domínio de g , mas é costume, quando se fala de $g \circ f$, convencionar que o conjunto de chegada de f é o domínio de g .

$g \circ f$ e $f \circ g$, em geral trata-se de funções diferentes porque $g \circ f$ tem por domínio X e $f \circ g$ tem por domínio Y . Mas mesmo quando $X = Y = Z$ pode ser $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo:

$X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$, $g(y) = y+1$. $g \circ f(x) = 2x+1$, $f \circ g(x) = 2(x+1)$ e $f \circ g \neq g \circ f$ porque, por exemplo para $x = 1$, $f \circ g(x) = 4$ e $g \circ f(x) = 3$.

Pelo contrário, esta operação é associativa. Dados quatro conjuntos e três funções de acordo com o esquema $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$, tanto $h \circ (g \circ f)$ como $(h \circ g) \circ f$ são funções de X para T e, qualquer que seja x , $h \circ (g \circ f)(x) = h[g \circ f(x)] = h\{g[f(x)]\} = h \circ g[f(x)] = (h \circ g) \circ f(x)$, como era necessário provar.

Quanto a esta mesma operação, há funções que desempenham o papel de elementos neutros à direita ou à esquerda, mas não em relação a qualquer função, pois se $f : X \rightarrow Y$ e $i \circ f = f$ tem de ser $i : Y \rightarrow Y$. A função $i_Y : Y \rightarrow Y$ definida por $i_Y(y) = y$ chama-se a função identidade do conjunto Y e desempenha o papel de (único) elemento neutro à esquerda para qualquer função cujo conjunto de chegada seja Y e, analogamente, o papel de (único) elemento neutro à direita para qualquer função, g , cujo domínio seja Y ($g \circ i_Y = g$).

Também facilmente se demonstra que sendo $A \subseteq X$, $g \circ f(A) = g[f(A)]$.

O problema da existência de elementos neutralizadores da operação de produto é mais complicado. Diz-se que f é sobrejectiva, ou uma sobrejecção, se $f(X) = Y$ (o contradomínio coincide com o conjunto de chegada) e que é injectiva, ou uma injecção se nenhum elemento do conjunto de chegada é imagem de mais de um elemento do domínio, isto é, se, respectivamente:

$$a') \quad \forall y \exists x R(x, y)$$

$$b') \quad \forall y \forall x \forall x' [R(x, y) \wedge R(x', y) \Rightarrow x = x']$$

(naturalmente agora, tratando-se de funções, pode escrever-se

$$\begin{aligned} \forall y \exists x y = f(x) \\ \forall y \forall x \forall x' (y = f(x) \wedge y = f(x') \Rightarrow x = x'). \end{aligned}$$

Se f é injectiva e sobrejectiva, diz-se que é bijectiva, ou uma bijecção ou uma correspondência biunívoca de X para Y . Neste caso, $\forall y \exists x! R(x, y)$.

Neste caso, como a') e b') dizem o mesmo que a) e b), só com troca de x por y , a relação R define também x em função de y e esta função chama-se

a inversa de f e representa-se por f^{-1} . É claro que o domínio de f^{-1} é Y e o seu conjunto de chegada (que agora coincide com o contradomínio), é X .

Também é fácil ver que $f^{-1} \circ f = i_X$ e $f \circ f^{-1} = i_Y$, o que justifica a designação de função inversa.

Enunciemos algumas propriedades simples das sobrejecções e injecções:

- 1) f e g são injectivas $\Rightarrow g \circ f$ é injectiva $\Rightarrow f$ é injectiva;
- 2) f e g são sobrejectivas $\Rightarrow g \circ f$ é sobrejectiva $\Rightarrow g$ é sobrejectiva;
- 3) A composição de bijecções e a inversa de uma bijecção são bijecções; deste modo, as bijecções: $A \rightarrow A$ formam um grupo.
- 4) Se $f : X \rightarrow Y$ é bijectiva e $A \subseteq X$, $f|_A$ é uma bijecção de A para $f(A)$.

Demonstremos, por exemplo, 2).

Sendo $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se f é sobrejectiva, $f(X) = Y$, logo $g \circ f(X) = g[f(X)] = g(Y) = Z$, porque g é sobrejectiva. Logo, $g \circ f$ é sobrejectiva.

Suponhamos agora que g não era sobrejectiva (demonstração por absurdo). Então, $g(Y) \neq Z$; portanto,

$$\exists_{z_0} (z_0 \in Z \wedge z_0 \notin g(Y)).$$

Como $f(X) \subseteq Y$, $g \circ f(X) = g[f(X)] \subseteq g(Y)$ e portanto $z_0 \notin g \circ f(X)$. Logo, $g \circ f$ não seria sobrejectiva, contra a hipótese.

Mesmo quando $f : X \rightarrow Y$ não satisfaz a') e b') se emprega a notação f^{-1} nas seguintes condições:

$$f^{-1}(y) = \{x : y = f(x)\}$$

e, sendo $B \subseteq Y$

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

Estes conjuntos podem ser vazios, por exemplo, se $B = \emptyset$ ou se $\sim \exists_x y = f(x)$. E há certa incoerência na notação $f^{-1}(y)$ que aqui representa um conjunto e, quando f é bijectiva, um elemento, x ; mais propriamente devia escrever-se

$$f^{-1}(\{y\}).$$

Por vezes usam-se outras notações.

É fácil ver que, se $B \subseteq C \subseteq Y$, $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(C)$. Sendo $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, pode ver-se que $\forall_A A \subseteq f^{-1}[f(A)]$, verificando-se a igualdade destes conjuntos sse f é injectiva e que $\forall_B f[f^{-1}(B)] \subseteq B$, verificando-se a igualdade sse f é sobrejectiva.

Por exemplo, quanto às primeiras afirmações; se $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ por definição de $f(A)$, e por definição de f^{-1} , $x \in f^{-1}[f(A)]$.

Supondo agora f injectiva, se $x \in f^{-1}[f(A)]$, $f(x) \in f(A)$, isto é, $\exists_y (y \in f(A) \wedge y = f(x))$, e, como $y \in f(A)$, $\exists_{x'} (x' \in A \wedge f(x') = y)$, mas o facto de ser f injectiva implica $x = x'$, de modo que $x \in A$.

Finalmente, se $\forall_A f^{-1}[f(A)] = A$, isto verifica-se em particular para os conjuntos com um só elemento, como $\{x\}$, vindo

$$f^{-1}[f(\{x\})] = \{x\}.$$

Se $f(x) = f(x')$, vem

$$\begin{aligned} \{x\} &= f^{-1}[f(\{x\})] = f^{-1}[f(\{x\})] = f^{-1}[f(\{x\})] = \\ &= f^{-1}[f(\{x'\})] = \{x'\}, \end{aligned}$$

de modo que $x = x'$, isto é, f é injectiva.

2.4 Famílias. Famílias de conjuntos.

Consideram-se dois conjuntos, I e X , percorridos pelas variáveis i e x , respectivamente, e uma função de I para X que designaremos até pela própria letra x . O transformado de i será então $x(i)$, mas é costume neste caso usar-se outra notação, x_i . Trata-se apenas de uma mudança de notação, que se usa quando se pensa mais nos transformados, x_i , que na função, x . I chama-se neste caso o conjunto dos índices e a função x chama-se uma família de elementos de X (como esse conjunto, I , de índices) e indica-se por notações do tipo $(x_i : i \in I)$, que se devem distinguir de $\{x_i : i \in I\}$ como a seguir se explicará.

Já conhecíamos um caso particular de família. Sendo $I = \{1, 2\}$, um par (x_1, x_2) de elementos de X é, no fundo, uma função que associa ao n.º 1 o

elemento x_1 de X (primeiro elemento do par) e ao n.º 2 o elemento x_2 de X (segundo elemento do par).

A distinção entre a família $(x_i : i \in I)$ e o conjunto $\{x_i : i \in I\}$ é a mesma que se faz entre um par e um conjunto de dois elementos.

Na família não interessa só saber quais são os elementos x_i que a constituem mas também como correspondem aos diversos valores de i : pode aí haver elementos repetidos ($x_i = x_{i'}$; com $i \neq i'$) e se os mesmos elementos corresponderem aos valores do índice de dois modos diferentes, tratar-se-á de duas famílias distintas.

Por exemplo: – adoptando para funções $x : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$ a notação (x_1, x_2, \dots, x_n) – $(1, 3, 1) \neq (1, 1, 3)$ e $(1, 1, 3)$ não é o mesmo que $\{1, 1, 3\}$ porque, se alguma vez se usar esta última notação, é com o significado de $\{1, 3\}$.

Em particular, pode ser X um conjunto de conjuntos. Suponhamos que a variável que percorre X é designada por A . Teremos uma família de conjuntos $(A_i : i \in I)$ e poderemos definir as seguintes extensões das operações de \cup e \cap

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I} x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I} x \in A_i\}$$

para as quais se verificam certas propriedades análogas às das operações de reunião e intersecção de conjuntos ¹⁰.

$$1) \forall_i A_i = A \Rightarrow \bigcap_i A_i = \bigcup_i A_i = A$$

$$2) \exists_i A_i = \emptyset \Rightarrow \bigcap_i A_i = \emptyset; \exists_i A_i = U \Rightarrow \bigcup_i A_i = U$$

$$3) \text{ Sendo } p : J \rightarrow I \text{ sobrejectiva, } \bigcap_{j \in J} A_{p(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ e o mesmo para } \cup.$$

¹⁰ $A_1 \cap A_2$ é caso particular de $\bigcap_{i \in I} A_i$; com $I = \{1, 2\}$; $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ sem parêntesis graças à propriedade associativa é outro caso particular, com $I = \{1, 2, 3\}$, etc.; facilmente se justificam estas afirmações.

Demonstração. Temos que provar $\forall_x (\forall_j x \in A_{p(j)} \Leftrightarrow \forall_i x \in A_i)$. Seja x qualquer que satisfaça $\forall_j x \in A_{p(j)}$; como p é sobrejectiva, qualquer que seja i , i é um $p(j)$ e x pertence ao correspondente $A_{p(j)}$, logo $x \in A_i$, logo $\forall_i x \in A_i$.

Reciprocamente, se $\forall_i x \in A_i$, qualquer que seja j , $p(j) \in I$, logo $x \in A_{p(j)}$, logo $\forall_j x \in A_{p(j)}$.

Ficou então provado que os conjuntos definidos pelas f.p. $\forall_j x \in A_{p(j)}$ e $\forall_i x \in A_i$ são iguais, isto é

$$\bigcap_{j \in J} A_{p(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

A demonstração para o caso de \bigcup é semelhante. No caso particular de ser $J = I$ e p uma bijecção (p. permutação de I) esta propriedade traduz a comutatividade generalizada de \bigcup e \bigcap de conjuntos.

$$4) \forall_i A_i \subseteq B_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i \wedge \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$$

$$5) J \subseteq I \Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i \wedge \bigcup_{i \in J} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$
¹¹

6) Seja A_i uma família de partes de X e $f : X \rightarrow Y$. Então,

$$f\left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq \bigcap_i f(A_i) \text{ e } f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$$

Em particular $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. A igualdade verifica-se se f é injectiva¹²; contraexemplo:

$$f : \{a_1, a_2\} \rightarrow \{b\}, \text{ com } A_1 = \{a_1\} \text{ e } A_2 = \{a_2\}, \text{ vindo}$$

$$f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \text{ e } f(A_1) \cap f(A_2) = \{b\}.$$

¹¹Costuma convencionar-se que $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = U$ e $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$.

¹²E, se a igualdade se verifica para todas as famílias de partes de X , f é injectiva.

7) Sendo B_i uma família de partes de Y e $f : X \rightarrow Y$,

$$f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(B_i) \quad \text{e} \quad f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i).$$

Em particular, considerando as famílias $(A, X \setminus A)$ e $(B, Y \setminus B)$ com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, deduz-se que

8) $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$ e, se f é injectiva, $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.

Dada uma família $(A_i : i \in I)$ de conjuntos não vazios (cada um deles tem, portanto, pelo menos um elemento) e disjuntos 2 a 2, admite-se, geralmente, que é possível considerar um conjunto C constituído por um e um só elemento, x_i , de cada conjunto A_i . É o chamado axioma de ZERMELO, ou axioma de escolha. Os matemáticos da chamada escola intuicionista¹³ apenas admitem a existência de C se for possível indicar efectivamente x como função de i , isto é, qual o x_i que $\in A_i \cap C$. Algumas vezes faremos notar que certas demonstrações utilizam este axioma, que, em símbolos lógicos, se poderia escrever

$$\forall_i \forall_j (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = 0) \wedge \forall_i A_i \neq 0 \Rightarrow (\exists_C (\forall_i \exists_x! x \in A_i \cap C \wedge C \subseteq \bigcup_i A_i))$$

¹³Fundada por L.E.J. BROUWER (1881-1966), holandês.