Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2003/04 — 28 de Janeiro de 2004

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Sejam X e Y subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ tais que $X \cap Y \neq \emptyset$. Mostre que:

   (a) $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X, \sup Y\}$;

   (b) Nem sempre se tem $\sup(X \cap Y) = \min\{\sup X, \sup Y\}$.

2. Calcule os limites das sucessões:

   (a) $\left(\dfrac{2^n}{3^n + n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $\left(n \arcsin \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{1}{2-x} & \text{se } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{se } x = 2, \\ e^{\frac{1}{2-x}} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade de f. Classifique os seus pontos de descontinuidade.

   (b) Determine $f'(x)$.

   (c) Mostre que existe $c \in]-\pi, 0[$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{2\pi}$.

   (d) Calcule $f([0, +\infty[)$.

4. (a) Deduza a fórmula de Taylor, com Resto de Lagrange, de ordem 4, no ponto $a = 0$, para a função definida por $f(x) = \cosh x$.

   (b) Verifique que: $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ \cosh x \geq 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que:

   (a) Se, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq x^2$, então f é diferenciável em 0 e $f'(0) = 0$.

   (b) Se f for diferenciável e $f(0) = 0$, então:

      i. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ |f'(x)| \leq |x| \ \ \Rightarrow \ \ (\forall x \in \mathbb{R}) \ \ |f(x)| \leq x^2$.
      Sugestão: Utilize o Teorema de Lagrange.

      ii. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ |f(x)| \leq x^2 \ \ \not\Rightarrow \ \ (\forall x \in \mathbb{R}) \ \ |f'(x)| \leq |2x|$.