Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

(Proposta de) Resolução do Exame de Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2003/04 — 28 de Janeiro de 2004

1. Sejam X e Y subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ tais que $X \cap Y \neq \emptyset$. Mostre que:

   (a) $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X, \sup Y\}$;

   (b) Nem sempre se tem $\sup(X \cap Y) = \min\{\sup X, \sup Y\}$.

(a) Como $\sup X$ é majorante de X e $\sup Y$ é majorante de Y temos que

$$(\forall z \in X \cap Y) \;\; z \in X \text{ e } z \in Y \;\Rightarrow\; z \leq \sup X \text{ e } z \leq \sup Y.$$

Logo $\sup X$ e $\sup Y$ são majorantes de $X \cap Y$ e então $\sup(X \cap Y)$, por ser o menor dos majorantes, é menor ou igual a ambos. Ou seja, $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X, \sup Y\}$.

(b) Considerando, por exemplo, $X = \{0, 1\}$ e $Y = \{0, 2\}$, temos $X \cap Y = \{0\}$. Logo $\sup X = 1$ e $\sup Y = 2$ e $\sup(X \cap Y) = 0 \neq 1 = \min\{1, 2\}$.

2. Calcule os limites das sucessões:

   (a) $\left(\dfrac{2^n}{3^n + n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $\left(n \text{ arcsin } \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) De

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < \frac{2^n}{3^n + n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

concluímos, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n + n} = 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n \arcsin \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$; como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \arcsin \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, vamos aplicar a Regra de Cauchy à função

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\;\to\; \mathbb{R} \\ x &\;\mapsto\; \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\arcsin \frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}} = 1$. Podemos então concluir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n \arcsin \frac{1}{n}\right) = 1$, pois, atendendo a que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, tem-se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ para qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que diverge para $+\infty$, em particular para a sucessão definida por $x_n = n$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & \text{se } x < 0, \\[2mm] \dfrac{1}{2 - x} & \text{se } 0 \leq x < 2, \\[2mm] 1 & \text{se } x = 2, \\[2mm] e^{\frac{1}{2-x}} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f. Classifique os seus pontos de descontinuidade.

(b) Determine $f'(x)$.

(c) Mostre que existe $c \in]-\pi, 0[$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{2\pi}$.

(d) Calcule $f([0, +\infty[)$.

(a) A função f é contínua nos intervalos abertos:

- $]-\infty, 0[$ e $]0, 2[$, porque em ambos está definida por um quociente de duas funções contínuas;
- $]2, +\infty[$, porque neste intervalo está definida pela composição de duas funções contínuas.

Resta verificar se f é contínua nos pontos 0 e 2:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2};$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} = f(0).$$

Logo, f é contínua em 0.

De:

$\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$ (porque, quando x tende para 2 com $x < 2$, $2 - x > 0$ tende para 0),

e $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} = 0$ (porque $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty$),

concluímos que f tem uma descontinuidade essencial de 2^a espécie no ponto 2.

(b) A função f não tem derivada no ponto 2, por não ser contínua nesse ponto. Verifiquemos se f tem derivada no ponto 0, calculando as derivadas laterais neste ponto:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x}{2x^2};$$

como $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} (\sin x - x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} 2x^2$, vamos tentar calcular $f'_-(0)$ usando a Regra de Cauchy. Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{(\sin x - x)'}{(2x^2)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{4x}$ nos dá novamente uma indeterminação, desta vez do tipo $\frac{0}{0}$, usamos novamente a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(\cos x - 1)'}{(4x)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{4} = 0.$$

Logo $f'_-(0) = 0$.

Por outro lado,

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 - (2-x)}{2x(2-x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2x(2-x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2(2-x)} = \frac{1}{4}.$$

Logo, f não tem derivada no ponto 0.

Concluímos então que $f' : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{2x^2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{(2-x)^2} & \text{se } 0 < x < 2 \\ e^{\frac{1}{2-x}} \dfrac{1}{(2-x)^2} & \text{se } x > 2, \end{cases}$$

uma vez que:

$$\left(\frac{\sin x}{2x}\right)' = \frac{2x\cos x - 2\sin x}{4x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2},$$
$$\left(\frac{1}{2-x}\right)' = ((2-x)^{-1})' = -1(2-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(2-x)^2}, \text{ e}$$
$$\left(e^{\frac{1}{2-x}}\right)' = e^{\frac{1}{2-x}}\left(\frac{1}{2-x}\right)' = e^{\frac{1}{2-x}}\frac{1}{(2-x)^2}.$$

(c) A função f é contínua no intervalo $[-\pi, 0]$, como provámos na alínea (a), e derivável em $]-\pi, 0[$, como indicado em (b). Logo, usando o Teorema de Lagrange, concluímos que

$$\exists c \in]-\pi, 0[\quad : \quad f'(c) = \frac{f(0) - f(-\pi)}{0 - (-\pi)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{-2\pi}}{\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

(d) Em $[0, 2[$ a função é crescente, pois aí $f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2} > 0$; $f(0) = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$. Logo, como f é contínua no intervalo $[0, 2[$,

$$f([0, 2[) = [\tfrac{1}{2}, +\infty[.$$

Em $]2, +\infty[$ a função é também crescente, porque f' é positiva; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$ e $f(2) = 1$. Logo, como f é contínua em $]2, +\infty[$,

$$f(]2, +\infty[) =]0, 1].$$

Em conclusão $f([0, +\infty[) = [\frac{1}{2}, +\infty[\cup]0, 1] =]0, +\infty[$.

4. (a) Deduza a fórmula de Taylor, com Resto de Lagrange, de ordem 4, no ponto $a = 0$, para a função definida por $f(x) = \cosh x$.

   (b) Verifique que: $\quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cosh x \geq 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

(a) Seja $f(x) = \cosh x$. Então $f'(x) = \sinh x$, $f''(x) = f^{(4)}(x) = \cosh x$ e $f^{(3)}(x) = f^{(5)}(x) = \sinh x$. Como $\cosh(0) = 1$ e $\sinh(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \cosh x &= \cosh 0 + \sinh 0\, x + \cosh 0 \frac{x^2}{2} + \sinh 0 \frac{x^3}{3!} + \cosh 0 \frac{x^4}{4!} + \sinh c \frac{x^5}{5!}, \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \sinh c \frac{x^5}{5!}, \end{aligned}$$

para algum um número real c entre 0 e x.

(b) Usando a Fórmula de Taylor obtida na pergunta anterior, a desigualdade pretendida resulta de:

para $x=0$, $\cosh 0 = 1 = 1 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^4}{4!}$;

se $x<0$, então $c<0$, logo também $\sinh c < 0$, e $x^5<0$; donde $\sinh c\,\frac{x^5}{5!} > 0$;

de $x>0$ vem $c>0$ e então $\sinh c > 0$, e $x^5>0$; logo $\sinh c\,\frac{x^5}{5!} > 0$.

5. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função. Prove que:

   (a) Se, para todo o $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\le x^2$, então f é diferenciável em 0 e $f'(0)=0$.

   (b) Se f for diferenciável e $f(0)=0$, então:

      i. $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ |f'(x)|\le|x| \ \ \Rightarrow\ \ (\forall x\in\mathbb{R})\ \ |f(x)|\le x^2$.
      Sugestão: Utilize o Teorema de Lagrange.

      ii. $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ |f(x)|\le x^2 \ \ \not\Rightarrow\ \ (\forall x\in\mathbb{R})\ \ |f'(x)|\le|2x|$.

(a) Em primeiro lugar, $|f(0)|\le 0$, logo $f(0)=0$. Então

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{x}\right| = \lim_{x\to 0}|x| = 0,$$

logo $f'(0)=0$.

(b) Por hipótese f tem derivada em todo o $\mathbb{R}$.

Se $x=0$, então $f(0)=0$ e a desigualdade verifica-se.

Seja $x\in\mathbb{R}$, com $x>0$. A função f é contínua em $[0,x]$ e diferenciável em $]0,x[$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $c\in]0,x[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$. Então

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = |f'(c)| \le |c| \le |x| \ \Rightarrow\ |f(x)|\le x^2.$$

Para $x<0$ a demonstração é idêntica: aplica-se o Teorema de Lagrange à restrição de f ao intervalo $[x,0]$.

(c) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(0)=0$ e $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ para $x\ne 0$ satisfaz $|f(x)|\le x^2$. Pela alínea (a), $f'(0)=0$; calculemos $f'(x)$ para $x\ne 0$:

$$f'(x) = (x^2\sin\tfrac{1}{x})' = 2x\sin\tfrac{1}{x} + x^2\cos\tfrac{1}{x}(-\tfrac{1}{x^2}) = 2x\sin\tfrac{1}{x} - \cos\tfrac{1}{x}.$$

Se considerarmos, por exemplo, $x=\frac{1}{2\pi}$, temos $\sin\frac{1}{x}=0$ e $\cos\frac{1}{x}=1$; logo

$$|f'(x)| = 1 > |2x| = \frac{1}{\pi}.$$