Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2003/04 — 15 de Dezembro de 2003

Teste 3 **Nome do aluno:**

1. Determine constantes a e b tais que a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x \le 2 \\ 1-\frac{2}{x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

seja diferenciável em $\mathbb{R}$.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ pois para $x<2$ é polinomial e para $x>2$ é um quociente de funções polinomiais. Para ser diferenciável em $x=2$ é necessário que seja contínua, isto é, $f(2)=2a+b=\lim_{x\to 2^-}(ax+b)=\lim_{x\to 2^+}(1-\frac{2}{x})$; vem então $2a+b=0$. Além disso, $f'_-(2)=f'_+(2)$:

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{ax+b}{x-2} = a; \\ f'_+(2) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1-\frac{2}{x}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo f é diferenciável quando $a=\frac{1}{2}$ e $b=-1$.

2. Determine $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin(3x)}{(e^x-1)^2}$.

Como $\lim_{x\to 0} x\sin(3x)=\lim_{x\to 0}(e^x-1)^2=0$, vamos aplicar a Regra de Cauchy, calculando

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\sin(3x))'}{((e^x-1)^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)+3x\cos(3x)}{2(e^x-1)e^x}.$$

Novamente, $\lim_{x\to 0}(\sin(3x)+3x\cos(3x))=\lim_{x\to 0}2(e^x-1)e^x=0$.

Tentando usar novamente a Regra de Cauchy, calculamos

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(3x)+3x\cos(3x))'}{(2e^x(e^x-1))'} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)+3\cos(3x)-9x\sin(3x)}{2e^xe^x+2e^x(e^x-1)} = \frac{6}{2}=3.$$

Logo, $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin(3x)}{(e^x-1)^2}=3$.

3. (a) Determine a Fórmula de Taylor de ordem n no ponto $a=3$, com Resto de Lagrange, da função e^x.

Como, se $f(x)=e^x$, então $f'(x)=e^x$, vem imediatamente que, para todo o $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)=e^x$. Donde, para algum número c entre 3 e x,

$$e^x = e^3+e^3(x-e)+e^3\frac{(x-3)^2}{2!}+\cdots+e^3\frac{(x-3)^n}{n!}+e^c\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Prove que

$$e^x > e^3\left(x-2+\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x-3)^3}{6}\right).$$

Fazendo $n=3$ na fórmula da alínea (a), temos:

$$e^x = e^3+e^3(x-3)+e^3\frac{(x-3)^2}{2!}+e^3\frac{(x-3)^3}{3!}+e^c\frac{(x-3)^4}{4!}.$$

Como a função exponencial só toma valores positivos e $(x-3)^4$ é sempre maior ou igual a 0, temos que o Resto de Lagrange de ordem 3, $e^c\frac{(x-3)^4}{4!}$, é sempre maior ou igual a zero, donde segue a desigualdade indicada.