Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 29 de Outubro de 2004

Teste 1 **Nome do aluno:**

1. Indique se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa:

   (a) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ \ x < y$; FALSA

   (b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ \ x < y$; VERDADEIRA

   (c) $(\exists x \in \,]0,1[\,)\ (\forall \varepsilon > 0)\ \ ]x-\varepsilon,\, x+\varepsilon\,[\, \subseteq \,]0,1[$; FALSA

   (d) $(\forall x \in \,]0,1[\,)\ (\exists \varepsilon > 0)\ \ ]x-\varepsilon,\, x+\varepsilon\,[\, \subseteq \,]0,1[$; VERDADEIRA

   (e) Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \cup B$ é limitado, então A e B são limitados; VERDADEIRA

   (f) Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \cap B$ é limitado, então A e B são limitados. FALSA

2. Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de $\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que, se $\sup A < \inf B$, então $A \cap B = \emptyset$.

   Quaisquer que sejam $x \in A$ e $y \in B$, $x \leq \sup A < \inf B \leq y$, logo $x < y$ e então $x \neq y$; portanto, A e B não têm elementos comuns.

   (b) Mostre que, se $\sup A = \inf B$, então $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

   Seja $c = \sup A = \inf B$. Para cada $\varepsilon > 0$, $c - \varepsilon$ não é majorante de A, logo existe $x \in A$ tal que $x > c - \varepsilon$, e então $x \in A \cap]\, c-\varepsilon,\, c+\varepsilon\,[$, donde se conclui que $c \in \overline{A}$. Do mesmo modo se deduz que $c \in \overline{B}$, atendendo a que, para todo o $\varepsilon > 0$, $c + \varepsilon$ não é minorante de b. Portanto, $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

3. Considere as funções

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x,\ x^2) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (y,\ z) & \mapsto & y\, z. \end{array}$$

   (a) Verifique se f é sobrejectiva e/ou injectiva.

   A função f não é sobrejectiva: Se $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $(x, y) = f(a)$ para $a \in \mathbb{R}$, então $x = a$ e $y = a^2$. Logo, por exemplo, $(0, -1)$ não é imagem por f de nenhum número real.

   A função f é injectiva: se $a, b \in \mathbb{R}$ e $f(a) = f(b)$, então $(a, a^2) = (b, b^2)$, isto é $a = b$ e $a^2 = b^2$, donde $a = b$.

   (b) Verifique se g é sobrejectiva e/ou injectiva.

   A função g é sobrejectiva: Qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, $y = y \cdot 1 = g(y, 1)$.

   A função g não é injectiva: Por exemplo, $g(2, 2) = 4 = g(1, 4)$.

   (c) Determine:

   i. $g^{-1}(\{0\}) = \{(y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;\ yz = 0\} = \{(y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;\ y = 0 \vee z = 0\} =$
   $= (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

   ii. $f^{-1}([-4,4] \times [-4,4]) = \{x \in \mathbb{R}\,;\ (x, x^2) \in [-4,4] \times [-4,4]\} =$
   $= \{x \in \mathbb{R}\,;\ -4 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq x^2 \leq 4\} = [-2, 2]$.

   iii. $(g \circ f)^{-1}([-1,1]) = \{x \in \mathbb{R}\,;\ g(f(x)) \in [-1,1]\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\ xx^2 \in [-1,1]\} = [-1,1]$.

   (d) Determine, se possível, a inversa de $g \circ f$.

   Como $g(f(x)) = x^3$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, a função $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijectiva e então tem como inversa a função:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}.$$