Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 11

CAPÍTULO IV: Diferenciabilidade

147. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.
   (a) Verifique que f' toma valores positivos e negativos mas nunca se anula. Estará este facto em contradição com o Teorema de Darboux?
   (b) Mostre que $f(-1) = f(1)$ mas $f'(c) \neq 0$ para todo o c no intervalo $]-1, 1[$. Estará este facto em contradição com o Teorema de Rolle?

148. Aplicando o Teorema de Rolle à função $f(x) = (x - 1)\tan x$ no intervalo $[0, 1]$, mostre que a equação $\sin 2x = 2 - 2x$ tem pelo menos uma solução entre 0 e 1.

149. (a) Explique porque é que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real.
   (b) Use o Teorema de Rolle para provar que a equação $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ não pode ter mais do que uma solução real quando $\beta^2 < 3\alpha\gamma$.

150. Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e que $f'(x)$ existe e não se anula em $]a, b[$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, prove que a equação $f(x) = 0$ tem uma e uma só solução em $]a, b[$.

151. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$ tal que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = f(c)$. (Sugestão: Use a função $g(x) = f(x)e^{-x}$.)

152. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, duas vezes derivável em $]a, b[$ e que se anula em três pontos distintos de $[a, b]$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f''(c) = 0$.

*153. Mostre que a equação $k_0 + k_1 x + \ldots + k_{n-1}x^{n-1} + k_n x^n = 0$ tem pelo menos uma solução (real) se $k_0 + \dfrac{k_1}{2} + \ldots + \dfrac{k_{n-1}}{n} + \dfrac{k_n}{n+1} = 0$.

154. Mostre que, ao aplicar o Teorema do Valor Médio de Lagrange à função $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ num intervalo $[a, b]$ qualquer, o ponto x onde a tangente ao gráfico é paralela à recta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é o ponto médio do intervalo $[a, b]$.

155. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ e derivável em $]0, 1[$ tal que $f(1) = 4$. Prove que existe $c \in]0, 1[$ tal que $f(c) + cf'(c) = 4$.

156. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.
   (a) Calcule $f'(x)$ quando $x \neq 0$.
   (b) Verifique que não existem $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.
   (c) Poder-se-á concluir da alínea anterior que não existe $f'(0)$? Verifique, usando a definição, se f é derivável em 0.

157. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$. Mostre que f é constante.

158. Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que, se $f'(x) \neq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então existe no máximo um ponto fixo de f (ou seja, existe no máximo um $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$).

*(b) Mostre que, se existir $k < 1$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}\ |f'(x)| \leq k$, então f possui um ponto fixo c, e qualquer sucessão definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ converge para c.

(c) Para $f(x) = x + \dfrac{1}{1+e^x}$, verifique que $|f'(x)| < 1$ mas f não possui nenhum ponto fixo.

159. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) Se I for um intervalo contendo 0 no seu interior, não existe nenhuma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ cuja derivada seja a função $g : I \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{se } x \neq 0, \\ -5 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(b) Existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja derivada é a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com

$$h(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3} & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

(c) Se existirem as derivadas laterais de uma função f num ponto a do seu domínio, então f é contínua em a.

(d) Existem uma função derivável em $[-1, 1]$ e $c \in]-1, 1[$ tais que o declive da tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é igual a $\frac{1}{2}(f(1) - f(-1))$.

(e) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for constante num subconjunto Y de X, então, em cada ponto de $Y \cap Y'$, a derivada de f existe e é zero.

(f) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for constante num aberto Y de X, então, em cada ponto de Y, a derivada de f existe e é zero.

(g) Uma função contínua num ponto é derivável nesse ponto.

(h) Sejam f e g duas funções deriváveis num ponto de acumulação a do seu domínio. Se $f(a) = g(a)$, então $f'(a) = g'(a)$.

(i) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem duas funções deriváveis em todos os pontos do domínio e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in X$, então $f = g$.

(j) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem duas funções deriváveis em todos os pontos do domínio e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in X$, então $f - g : X \to \mathbb{R}$ é uma função constante.

(k) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X \cap X'$. Se $f'(a) > 0$, então existe um intervalo aberto I, contendo a, tal que f é crescente em $X \cap I$.

(l) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável num ponto $a \in X \cap X'$. Se $f'(a) = 0$, então não existe nenhum intervalo aberto I, contendo a, tal que f seja monótona em $X \cap I$.

(m) A equação $\cos x = 2x$ tem uma única solução em $[0, \frac{\pi}{4}]$.